
3 1761 06240124 5


UNIV.OF
TORONTO
LIBRARY

ŒUVRES COMPLÈTES

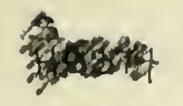
DE

CHRISTIAAN HUYGENS.

Imprimerie de Joh. ENSCHEDÉ & Fils, Harlem.



Dessin de Christiaan Huygens de 1658.



ŒUVRES COMPLÈTES

DE

CHRISTIAAN HUYGENS

PUBLIÉES PAR LA

SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES

TOME VINGTIÈME

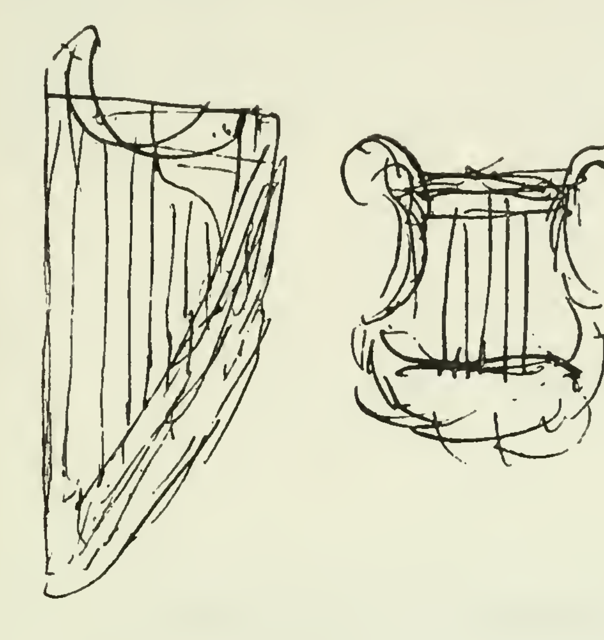
MUSIQUE ET MATHÉMATIQUE
MUSIQUE
MATHÉMATIQUES DE 1666 À 1695



LA HAYE
MARTINUS NIJHOFF
1940

MUSIQUE ET MATHÉMATIQUE
MUSIQUE
MATHÉMATIQUES DE 1666 À 1695

HOMMAGE DE HUYGENS À THÉOCRITE.



La f. 1. du portefeuille „Musica” [1]) porte outre les figures d'une harpe et d'une lyre que nous reproduisons ici, les citations suivantes de Théocrite [2]):

πωτωντο ξουθαι περι πιδακος ἀμφι μελισσαι.
παντ' ὠσδεν θερεος μαλα πιονος ὠσδε δ'ὀπωρης [3]).

Les abeilles dorées voltigeaient autour de la source. De toutes parts flottait l'odeur d'un riche été, l'odeur de l'automne.

ἠ καλας ἀμμε ποων ἐλεληθει βωκος ἀοιδας
ὡς ἐυ ταν ἰδεαν τας ἁρμονιας ἐμετρησεν [4]).

En vérité, nous n'avons pas suffisamment remarqué la beauté des chants du berger qui observe si bien les règles de l'harmonie.

ὑψηλον δ' Ἱερωνι κλεος φορεοιεν ἀοιδοι
και ποντου Σκυθικοιο περαν και ὁπου πλατυ τειχος
ἀσφαλτῳ δησασα Σεμιραμις ἐμβασιλευεν [5]).

Chantons hautement la gloire de Hiéron depuis la mer scythique jusqu'à la ville de Sémiramis [6]) qui cimenta son large mur avec de l'asphalte.

χαιρετε δ'ἀλλοι
ἀστερες εὐκηλοιο κατ' ἀντυγα Ζηνος ὀπαδοι [7]).

Salut à vous, autres astres, qui parcourez fidèlement vos orbes par rapport à Zeus l'immuable.

χρηματα δε ζωοντες ἀμαλδυνοντι θανοντων [8])

Or, les vivants corrompent les choses des morts.

---

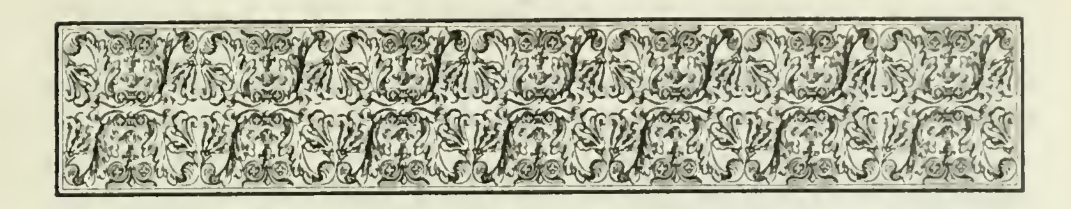
[1]) Voyez sur sa date la p. 88 qui suit.

[2]) Nous citons les nos des idylles et des vers d'après l'édition de 1909 de H. L. Ahrens des „Buco-

licæ græci". Comparez la note 7 de la p. 88 du T. XIX. Pour les variantes il faut consulter les différentes éditions de Théocrite. Nous croyons devoir traduire les citations sans tenir compte du contexte: chez le poète χαίρετε δ' ἄλλοι ἀστέρες veut dire „adieu les autres astres", c.à.d. autres que la lune; pour ἄμμε nous écrivons „nous" au lieu de „nous deux"; nous conservons le mot „asphalte" quoiqu'en français „bitume" soit plus correct.

[3]) Idylle VII, vs 141—142.
[4]) Idylle X, vs 38—40.
[5]) Idylle XVI, vs 98—100.
[6]) Babylone.
[7]) Idylle II, vs 164—165.
[8]) Idylle XVI, vs 59.

MUSIQUE ET MATHÉMATIQUE.



Avertiſſement.

Dans le T. XIX [1]) nous avons dit que la théorie des rapports provient de la conſidération des accords muſicaux. C'eſt ce qu'on voit clairement en comparant la définition du λόγος muſical donnée par Ariſtoxène, cité par Porphyre [2]):

δύο φθόγγων ἀνομοίων ἡ κατὰ πηλικότητα ποιὰ σχέσις, ὅ ἐστι λόγος [3])

avec celle, également vague, du λόγος de deux grandeurs de même nature donnée ou inſérée un peu plus tard par Euclide dans ſes Éléments [4]):

λόγος ἐστι δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις.

L'une et l'autre définition ſont citées par Meibomius dans ſon „Dialogus" de 1655 [5]) auquel ſe rapporte la Pièce I qui ſuit.

---

[1]) P. 356.

[2]) ΠΟΡΦΥΡΙΟΥ ΕΙΣ ΤΑ ΑΡΜΟΝΙΚΑ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ, Chap. 13; p. 139 de „Porphyrios' Kommentar zur Harmonielehre des Ptolemaios" éd. I. Düring, Göteborg, Wettergren et Kerber, 1932.

[3]) Il ne s'agit apparemment pas ici des rapports des longueurs des cordes d'un instrument de musique, mais des rapports quantitatifs de deux sons c.à.d. de leurs hauteurs respectives, de quelque manière qu'ils soient produits. Le mot πηλικότης a donc en ce temps un sens fort général.

Voyez encore sur ce mot grec la note 2 de la p. 11 qui suit: Theo Smyrnaeus, plusieurs siécles plus tard, considère le πηλίκον comme une grandeur géométrique continue. Asklepios, commentant l'Arithmétique de Nicomaque, avait dit également: τὸ πηλίκον μέγεθός ἐστι συνεχές (p. 83 du „Dialogus" de Meibomius).

[4]) Troisième définition du livre 5.

[5]) P. 83 et 85.

On a ſans doute compris de temps immémorial que les longueurs des cordes vibrantes des inſtruments de muſique rendent les πηλικότητες des ſons, pour ainſi dire, meſurables.

„Nous ſommes aujourd'hui habitués" dit P. Tannery dans ſon article de 1902 „Du rôle de la muſique grecque dans le développement de la mathématique pure" — il y parle brièvement du quadrivium des Univerſités au moyen âge — „à conſidérer la notion du logarithme comme dérivant directement de celle des progreſſions des puiſſances entières" [1]) quoique „la forme ſous laquelle [Neper] a préſenté ſon invention en maſque la première origine". Nous ne ſavons pas en vérité ce qui fut chez Neper la *première* origine de l'invention: rien, ſi ce n'eſt, comme l'obſerve Tannery, *le mot logarithme* créé par lui [2]), n'indique que la conſidération des deux progreſſions, arithmétique et géométrique, partant auſſi celle de l'échelle muſicale, y ſoit pour quelque choſe [3]). Mais ſi, ſelon toute probabilité, la muſique n'a joué ici qu'un rôle nul ou extrêmement effacé, il eût certes pu en avoir été autrement. Meibomius, lui, penſe en muſicien; il ſemble ne pas connaître les logarithmes de Neper, de Bürgi ou de Briggs, mais ſa „Tabula rationis ſuperoctageſimæ — quam commatis rationem [4]) recentiores faciunt — centiesduodecies ſibi ſuperadditæ: quâ, tanquam communi menſurâ, cæterarum rationum magnitudinem deinceps explorabimus" [5]) fait voir qu'il conſidère,

[1]) L'article de Tannery se trouve dans le „3. Band, 3. Folge" de 1902 de la „Bibliotheca mathematica, Zeitschrift für Geschichte der math. Wissenschaften" publié par G. Eneström (Leipzig, Teubner): il est réimprimé dans „Paul Tannery, Mémoires scientifiques", publié par J. L. Heiberg et H. G. Zeuthen III, 1915 (Toulouse, E. Privat et Paris, Gauthier-Villars).

[2]) La Prop. I du Cap. II de la „Descriptio mirifici logarithmorum canonis" de 1614 est la suivante: „Proportionalium numerorum aut quantitatum æquidifferentes sunt logarithmi".

[3]) Voyez „The law of exponents in the works of the sixteenth century" par D. E. Smith, et d'autres articles contenus dans le „Napier Tercentenary Memorial Volume" publié par Cargill Gilston Knott (Royal Soc. of Edinburgh, Longmans, Green & Co., London 1915). Le lecteur hollandais peut consulter aussi N. L. W. A. Gravelaar „John Napier's Werken" (Verhandelingen der Kon. Akademie van Wetenschappen, Eerste Sectie, Deel VI, Amsterdam, J. Müller, 1899).

[4]) Comparez le premier alinéa de la p. 45 qui suit.

[5]) „Dialogus", p. 70—71. Il conclut de sa table, contenant les puissances de $\frac{81}{80}$ depuis la première jusqu'à la 112ième: „Ratio $\frac{2}{1}$ major est commatis 55, minor commatis 56", c.à.d. $\frac{2}{1}$ est compris entre $\left(\frac{81}{80}\right)^{55}$ et $\left(\frac{81}{80}\right)^{56}$. De même $\frac{3}{1}$, $\frac{4}{1}$ et $\frac{3}{2}$ sont respectivement compris entre les puissances 88 et 89, 111 et 112, 32 et 33ième. Comparez la fin de la note 11 de la p. 46 qui ſuit.

comme Briggs, et aussi comme N. Mercator écrivant en 1667 (voyez la p. 11), comme une chose importante d'exprimer approximativement les nombres comme les puissances d'une quantité fort peu supérieure à l'unité [6]). Or, la lecture du „Dialogus" peut avoir fortement contribué à amener Huygens à considérer simultanément — Pièce II qui suit, datant de 1661 — „la division du monochorde" et „les logarithmes.... ces merveilleux nombres". Nous sommes d'autant plus autorisés à croire à l'influence de Meibomius, que la critique de 1656 de Huygens de la pensée de cet auteur — voyez dans la Pièce I ses remarques sur la p. 127 de M. — n'est pas bien fondée, ce qu'il a dû reconnaître bientôt après, comme notre observation en cet endroit le fait voir.

Voyez cependant aussi ce que nous disons aux p. 203—204 qui suivent sur le „Cours Mathematique" de P. Hérigone, connu à Huygens au moins depuis 1652.

R. C. Archibald [7]) remarque dans un mémoire de 1924 que, même en 1691 lorsque Huygens publia le „Nouveau cycle harmonique" [8]), aucun autre que lui, semble-t-il, n'avait encore calculé des intervalles musicaux en se servant d'une table de logarithmes (et pourtant en 1661, ainsi que dans les années suivantes [9]), Huygens n'avait nullement fait un mystère de sa trouvaille). F. J. Fétis, ainsi que K. W. J. H. Riemann, ne connaissant apparemment pas l'écrit de Huygens, émettaient bien à tort l'hypothèse que l'application des logarithmes à la musique n'aurait eu lieu qu'au dix-huitième siècle; ce qu'on lit encore dans une édition du „Musik-Lexikon" de Riemann postérieure à 1924 [10]).

La Pièce III de 1662 fait voir que Huygens, d'accord avec Aristoxène et Euclide, ne partage pas la „multorum sententia", en particulier celle de J. Wallis, d'après laquelle les „quantitates rationum" seraient des nombres.

---

[6]) Nous mentionnons cette „Tabula" de Meibomius aussi dans la note 2 de la p. 155 qui suit.

[7]) R. C. Archibald „Mathematicians and Music", The American Math. Monthly, Vol. XXXI, No. 1, Jan. 1924. C'est un „presidential address" delivered before the mathematical association of America, Sept. 6, 1923.

[8]) Notre T. X, p. 169—174 et p. 164 du présent Tome.

[9]) On peut voir à la p. 368 de notre T. VII qu'en 1673(?), dans une Pièce qui n'a pas été conservée, Huygens donnait au musicologue Cousin le conseil de se servir de logarithmes.

[10]) Voyez la note 12 de la p. 145 qui suit. Ailleurs — note de la p. 359 de sa „Geschichte der Musiktheorie" — Riemann fait pourtant preuve de connaître le „Nouveau cycle harmonique": consultez la note 14 de la p. 158 qui suit (où l'on voit aussi que Riemann y découvre une erreur imaginaire).

I[1].

CRITIQUE DU LIVRE DE 1655 DE M. MEIBOMIUS „DE PROPORTIONIBUS DIALOGUS" [2]).

Huygens avait vu le „Dialogus" en France en 1655 [2]). En avril 1656 Fr. v. Schooten demanda son opinion sur ce livre ce qui l'amena à „pervolvere" le volume de nouveau et à écrire: Homo plane ineptus est, totaque disputatio contra definitionem 7mam libri 5 Elementorum (quæ Clavio 8a est) huic enim nititur propositio 8a ejusdem libri. Quid autem magis frivolum quam de definitionibus altercari? cum liberum sit aut certe parum referat quo nomine quidque designetur [3]). Comparez toutefois la Pièce sur Euclide à la p. 184 qui suit, ainsi que celle de la p. 190, où Huygens — à un âge plus avancé — n'approuve pas également toutes les définitions anciennes.

Pag. 103. v. 8. [4]) Rationem æqualitatis nihili rationem seu nullam appellat.

Voyez à propos de cette première proposition de Meibomius une sentence analogue de Mersenne de 1644, citée dans la note 98 de la p. 214 qui suit.

Pag. 104 in fine. Rationem duplam subduplæ æqualem dicit (licet non eadem sit), quoniam idem est inter utriusque terminos intervallum. Attamen rationem subduplam dupla superat ratione quadrupla. Pag. 124 in med. Eodem modo pag. 106 in fine æquales dicit rationes 6 ad 4 et 4 ad 6. quia una tantum excedat quantum altera deficit à nihili ratione.

Pag. 118. Quantitas rationis in duarum magnitudinum inter se distantia spectatur. Ideo ratio æqualitatis ratio quidem est sed nullius quantitatis.

Ces définitions de Meibomius, éditeur des „Antiquæ Musicæ Auctores septem", 1652 [5]) s'expliquent par le fait qu'il considère les rapports en musicien. La „quantitas rationis" étant censée dépendre de la „distantia", il est évident que la „ratio 6 ad 4" est à peu près identique avec la „ratio 4 ad 6". Il ne fait aucune mention de logarithmes, qu'il semble ne pas connaître. Néanmoins, on peut dire qu'il considère les rapports à un point de vue logarithmique: le logarithme du rapport des longueurs égales de deux cordes rendant le même son est nul et les logarithmes des rapports „6

[1]) Chartæ mathematicæ, f. 11. Le texte qui suit fait voir que cette feuille date de 1656.

[2]) Nous avons mentionné ce livre dans la note 5 de la p. 409 du T. I; en voici le titre complet: M. Meibomii, Consiliarii Regii, De Proportionibus Dialogus. Ad Serenissimum Principem, Fridericum III, Daniæ, Norvegiæ, Vandalorum, Gotthorumque Regem, &c. ΞΥΝ ΤΩ ΘΕΩ ΑΕΙ ΓΕΩΜΕΤΡΟΥΝΤΙ ΠΑΣ ΣΟΦΟΣ ΑΕΙ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ. Hafniæ, Typis Melchioris Martzani, MDCLV.

[3]) T. I, p. 413. Van Schooten approuve cette sentence (T. I, p. 422).

[4]) Toutes les citations se trouvent en effet aux endroits indiqués par Huygens.

ad 4" et „4 ad 6" font égaux (aux fignes près) comme il convient, puifque les cordes de longueurs 6 et 4 produifent le même intervalle foit qu'on frappe premièrement l'une ou l'autre.

[Pag. 118]. Quæcumque autem alia [ratio], magna aut parva unitatis loco accipi poteft.

Si l'on voulait confidérer p.e. le rapport $\frac{a}{b}$ comme „unitas", les rapports également diftants $\frac{p}{q}$ et $\frac{a^2q}{b^2p}$ pourraient être cenfés égaux.

Pag. 125 in fine gloriatio.

Le dialogue a lieu dans les champs Elyfées. Les ombres d'Euclide, d'Archimède, d'Apollonius Pergæus, de Pappus, d'Eutocius et de Theo (Alexandrinus?) y prennent part. Un certain Hermotimus, vifiteur du féjour des morts, développe devant eux le nouveau fyftème qu'il attribue à fon ami Euthymius. A la p. 125 Hermotimus dit: „Atque ex his principiis omnia Euthymii dogmata, tàm quæ veftra, illuftres Geometræ, principia convellunt, & falfitatis convincunt, quàm quæ recentiorum hallucinationes oftendunt, deducuntur". En parlant des „recentiores" Meibomius fonge furtout à Grégoire de Saint Vincent dans le livre duquel — l'„Opus geometricum" de 1647, où il prétendait avoir trouvé la quadrature du cercle; voyez la note 6 de la p. 53 du T. I, et confultez les T. XI et XII — il eft conftamment fait ufage de compofitions ou additions de rapports[6]).

Pag. feq. falfa igitur eft 8ª propofitio lib. 5 Elem. et 10, et multæ aliæ quæ ab his pendent. &c.

Comme Huygens le dit fort bien — début et fin de la préfente Pièce — il ne s'agit en fomme que d'une difpute (pour employer ce terme) fur les définitions.

D'après la prop. 8 du livre 5 des Eléments d'Euclide — dont la prop. 10 eft l'inverfe — on doit dire, lorfque $a > b$, que le rapport $\frac{a}{c}$ eft toujours fupérieur au rapport $\frac{b}{c}$.

Pag. 127. dicit 16 ad 24 majorem habere rationem quam 21 ad 31. Quia enim eft ut 16 ad 24, ita 21 ad 31½ major eft diftantia inter 21 et 31½ hoc eft 16 ad 24 quam inter 21 et 31. Ego vero fic dicam. Quia enim eft ut 16 ad 24 ita 8 ad 12, minor eft diftantia inter 8 et 12, hoc eft 16 et 24 quam inter 21 et 31.

---

[5]) Nous avons fait mention de ce recueil — contenant e.a. „Euclidis liber de Canonis Sectione" — à la p. 362 du T. XIX.

Comme la note 4 de la p. 138 du T. I ne donne que peu de détails biographiques sur Meibomius (1630—1711), nous ajoutons, sans être complets, qu'il avait publié déjà en 1649 à Amsterdam ses „Observationes ad loca quædam librorum decem M. Vitruvii Pollionis de Architectura". Son „Dialogus" ayant été attaqué e.a. par W. Lange — „Epistola ad Meibomium", Hafniæ 1656 — il répliqua en 1657 („Responsio ad Langii epistolam", Hafniæ). En 1671 il publia à Amsterdam son „De fabrica triremium".

[6]) Fr. X. Aynscom dans l'ouvrage de 1656 („Expositio et deductio geometrica") cité dans la note 6 de la p. 210 du T. I, et dont nous avons reproduit une partie aux p. 248—261 du T. XII, défend Grégoire de Saint Vincent à la fois contre Meibomius et contre Huygens.

Ici la critique de Huygens eſt apparemment ſans valeur. Il n'y a aucune indétermination ou contradiction logique puiſque chez Meibomius le mot „diſtantia" déſigne un *rapport*, et non pas une *différence*.

Dans le T. XVI [1]) nous avons relevé que dans un cas ſpécial Huygens dit, probablement en cette même année 1656, qu'une grandeur Q_1 „recedit" autant qu'une autre Q_2 d'une grandeur donnée intermédiaire Q lorſqu'on a $\frac{Q_1}{Q} = \frac{Q}{Q_2}$. En cet endroit il adopte, peut-on dire, la manière de parler de Meibomius ſoutenant que les „rationes" ou „diſtantiæ" de Q_1 à Q et de Q_2 à Q ſont égales. Obſervons en paſſant que, autrement que Meibomius, Eratoſthène et Théon de Smyrne font ſous ce rapport une diſtinction entre le λόγος, ratio, d'une part et le διάστημα, intervallum ou diſtantia, d'autre part [2]).

Pag. 129. Falſum vero [ſuivant Meibomius] 4 ad 5 majorem rationem habere quam 4 ad 7. Falſum 4 ad 6 majorem rationem habere quam 3 ad 6.

Falſum 4 ad 3 majorem habere rationem quam 2 ad 3, quod diverſi generis rationes exceſſiva et defectiva inter ſe comparari nequeant. Quaſi dicas falſum eſſe cubum quadrato eſſe majorem.

Pag. eadem 129 bene Euclides reſpondet.

Voici la réponſe d'Euclide laquelle montre que Meibomius comprend fort bien la manière ordinaire d'enviſager les choſes. „Si quæ unquam ineptiæ, & olim, cum inter mortales degerem, & ex quo hac beatâ quiete mihi frui licuit, fando ad aures meas pervenere, inter illas certe has Euthymii tui, o Hermotime, primo loco cenſere poſſum. Ut enim illud nunc prætercam, inconcuſſo fundamento, ſeptima nimirum ejuſdem libri definitione, niti hanc noſtram propoſitionem, faciliori adhuc viâ eandem veritatem hic demonſtratam dabo. Sint enim eædem lineæ, iidem numeri, quos tu ante proferebas. Dico (numeros ſolos adcommodans, ut brevius me expediam) non tantùm 7 ad 4 majorem rationem habere quàm 5 ad 4; quod etiam conceſſit Euthymius; ſed & revertendo: quod ejuſdem propoſitionis ſecundo membro volo; 4 ad 5 majorem rationem habere quàm 4 ad 7. Quis enim mortalium, exceptis Euthymio & Hermotimo, dubitat, vel unquam dubitavit, aut venientibus ſeculis dubitaturus eſt, quin, uti verum eſt, ſeptem partes quartas majores eſſe quinque partibus quartis, ſic immotæ veritatis ſit, quatuor partes quintas majores eſſe quàm quatuor partes ſeptimas?". Tandis que les autres ombres approuvent hautement les paroles d'Euclide, ſeul Archimède parle comme ſuit: „Fateor & me hac ſententiâ olim ſuiſſe imbutum; ſed ex iis, quæ principiorum loco ante retulit Hermotimus, jam aliter video hæc eſſe concipienda".

Pag. 143 in fine. Quid enim [ſuivant Meibomius] clarius docetur quid concinnius, quam quod rationum omnium quaſi centrum ſit ratio nihili. Pag. 144. rationem ſeſquialteram exceſſivam ſuperare rationem ſeſquialteram defectivam, ratione bis ſeſquialtera. Pag. 148. Propoſitio Meibomij quam pro 8^a 5^{ti} ſubſtituit ridicula.

La nouvelle propoſition eſt formulée par Meibomius comme ſuit: „Duarum inæqualium magnitudinum illa, ad eandem, utrâque aut majorem aut minorem, aut alteruti æqualem, majorem rationem habet, quæ longius ab hac diſtat: & viciſſim".

Gloriatio. Jactatio pag. 204.

[1]) P. 154, note 2 et p. 155, note 5.

[2]) Le cap. 30 du livre cité dans la note ſuivante est intitulé Τίνι διαφέρει διάστημα καὶ λόγος (Quomodo differant interuallum & ratio). Il y est dit que les intervalles $\frac{6}{3}$ et $\frac{3}{6}$ sont identiques, mais que les λόγοι $\frac{6}{3}$ et $\frac{3}{6}$ sont l'inverse l'un de l'autre.

La p. 204 eſt la dernière page du livre où, à l'exemple d'Archimède, tous les mathématiciens ſe déclarent convaincus.

Diſputatio tota eſt contra definitionem 7 lib. 5. Quid autem ſtultius?

Cette définition eſt la ſuivante: Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

Pour éviter tout malentendu, il convient d'ajouter qu'en rejetant la 7ième définition pour les raisons ſusdites, Meibomius ne déſapprouve aucunement le ſentiment d'Euclide — ſentiment qui donna lieu à cette définition juſtement célèbre; le lecteur hollandais pourra conſulter l'ouvrage d'un de nous de 1930 „De Elementen van Euclides" *; voyez le titre complet à la p. 584 qui ſuit — ſavoir qu'un rapport eſt tout autre choſe qu'un nombre. Après la „réponſe d'Euclide" citée dans le texte Meibomius, par la bouche d'Hermotimus, s'étend longuement ſur ce ſujet.

Aux p. 78 et ſuiv. Meibomius avait déjà diſcuté la définition 5 du livre 6 d'Euclide qui lui ſait évidemment de la peine [3]): Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες [ἐφ' ἑαυτάς, ſuivant Eutokios] πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα. Cette définition qui ne ſe trouve pas dans tous les manuſcrits, correſpond apparemment mal avec les ſentiments du véritable Euclide; on peut la conſidérer comme apocryphe („De Elementen van Euclides" II, p. 102, note 91).

Les conſidérations de N. Mercator ſur les intervalles muſicaux dans sa „Logarithmo-technia" de 1667 (voyez la p. 214 qui ſuit) ſont conformes à celles de Meibomius. Mercator écrit (p. 175 de l'édition de Maſeres; voyez la p. 261 qui suit): „certe eadem eſt utrobique quantitas intervalli Muſici (atque idem numerus ratiuncularum intercedentium), licèt ab unisono (vel ab æqualitatis ratione, tanquam nihilo) in diverſas planè partes abeat. Unde ſi moles ſola, aut quantitas rationis æſtimetur, diſſimulando utram in partem (majoriſne, an minoris inæqualitatis) vergat ab æqualitate; nihilo major eſt ratio ternarii ad binarium, quam binarii ad ternarium". Il ajoute que ce qui eſt vrai „in Muſicis" l'eſt auſſi „in hac noſtra logarithmo-technia". Avec Euclide (voyez la citation grecque à la p. 5 qui précède) il appelle (p. 169) la „ratio" non pas un nombre mais une „habitudo mutua". Sa définition du logarithme (ibid.) eſt: „Eſt enim logarithmus nihil aliud, quàm numerus ratiuncularum contentarum in ratione quam abſolutus quiſque [numerus] ad unitatem obtinet". Les „ratiunculæ" de Mercator, de même que celles de Briggs—Neper conſidérait des puiſſances de rapports un peu *inférieures* à $\frac{1}{1}$ —, ne diffèrent évidemment pas *infiniment* peu de la valeur $\frac{1}{1}$: le rapport $\frac{10}{1}$ (p. 189) en contient dix millions.

* P. Noordhoff, Groningen.

---

[3]) A propos du mot πηλικότης il cite (à la p. 83) le passage suivant de Theo Smyrnaeus qui fait voir en outre que celui-ci donne également une place éminente au rapport de deux grandeurs égales: Τοῦ μὲν ποσοῦ στοιχεῖον ἡ μονάς· τοῦ δὲ πηλίκου, στιγμή· λόγου δὲ καὶ ἀναλογίας ἰσότης. οὔτε γὰρ μονάδα ἔτι διελεῖν ἐστιν εἰς τὸ ποσόν· οὔτε στιγμὴν εἰς τὸ πηλίκον· οὔτε ἰσότητα, εἰς πλείους λόγους. On trouve ce passage à la p. 130 de l'édition de 1644 de Boulliau, mentionnée dans la note 19 de la p. 180 qui suit, de l'ouvrage de Théon Τῶν κατὰ μαθηματικὴν χρησίμων εἰς τὴν τοῦ ΠΛΑΤΩΝΟΣ διάγνωσιν.

II.

MUSIQUE ET LOGARITHMES CHEZ HUYGENS.

T. III, p. 307 et 308, lettre de Chr. Huygens à R. Moray du 1 aoust 1661:

Je me ſuis occupè pendant quelques jours a eſtudier la muſique, et la diviſion du monochorde [1]) à la quelle j'ay appliquè heureuſement l'algebre. J'ay auſſi trouuè que les logarithmes y ſont de grand uſage, et de la je me ſuis mis a conſiderer ces merveilleux nombres et admirer l'induſtrie et la patience de ceux qui nous les ont donnez. Que ſi la peine n'en eſtoit deſia priſe, j'ay une regle pour les trouuer avec beaucoup de facilitè, et non pas la vingtieme partie du trauail qu'ils ont couſtè.

Voyez ſur cette règle la note 5 de la p. 308 du T. III, ainſi que les p. 431—434 et 451—456 du T. XIV et les p. 204—206, 225—227 et 295—297 qui ſuivent.

---

[1]) Comparez sur la Sectio Canonis ou Κατατομὴ κανόνος la note 5 de la p. 9 qui précède. La question de l'authenticité du traité d'Euclide soulevée e.a. par P. Tannery — „Mémoires Scientifiques" Vol. III de 1915, p. 213 — est ici sans importance. Comparez la note 2 de la p. 177 qui suit.

III.

LA COMPOSITION OU ADDITION DES RAPPORTS.

1662. Aug. Cenfura miffa ad bibliopolam Hobbij, uti ipfe petierat... Nous avons déjà reproduit dans le T. IV [1]) cette page [2]) qui traite en majeure partie de la duplication du cube et de la quadrature du cercle. Ici le dernier alinéa feul nous intéreffe.

Quod Wallifius fcripferit [3]) rationem 5 ad 12 fuperare rationem 1 ad 3 ratione 1 ad 12, non eft credibile per errorem hoc eum feciffe, fed quod pro additione rationum eam quoque habuerit quæ fit addendo fractiones, quæ quantitatem rationum fecundum ipfius et aliorum multorum fententiam exprimunt. Non ignorat enim aliam et magis ufitatam geometris rationum additionem feu compofitionem, fecundum quam ratio 1 ad 3 una cum ratione 5 ad 4 conftituunt rationem 5 ad 12. Et præftaret quidem mea fententia non aliam agnofcere additionem rationum. Ne res duæ diverfiffimæ eodem nomine vocentur.

On voit que Huygens en 1662 maintient l'addition „muficale" des rapports [4]); et que de plus il ne parle pas avec fympathie de ceux qui, contrairement au fentiment d'Euclide et d'autres géomètres, veulent qu'on confidère les „quantitates rationum" comme des *nombres* entiers ou fractionnaires. Comparez la fin de la Pièce I qui précède.

---

[1]) P. 203. Plus loin (p. 380) nous donnons les titres des traités de Hobbes.

[2]) Manuscrit B, p. 107.

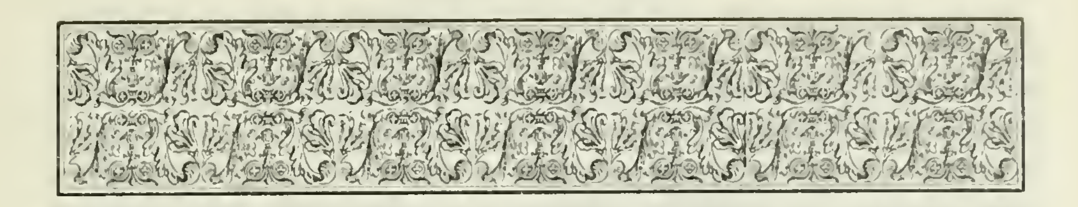
[3]) Dans ses „Dialogi sex" Hobbes discute e.a. le traité de J. Wallis, intitulé „Adversus Meibomii de proportionibus dialogum, tractatus Elencticus" (1657). Déjà dans le premier dialogue entre les personnages A et B on lit ce qui suit: „A. Eandemne rem esse censet [Wallisius] Rationem et Fractionem?

B. Ita plane, & id pluribus tum hujus, tum aliorum suorum Librorum locis, disertis verbis asserit.

A. Asserenti tantum, non etiam demonstranti, non est necesse ut assentiamur". Etc.

[4]) Comme N. Mercator le fait auffi en 1667.

MUSIQUE.



Avertiſſement général.

Non audio qui allegant authoritatem [1]).

Dans ſes conſidérations théoriques ſur la muſique, auſſi bien que dans celles ſur d'autres branches du ſavoir humain, Huygens, tout en liſant beaucoup et en converſant volontiers avec les gens compétents — nous ſongeons à ſa converſation de 1662 avec un des frères Hemony [2]) — n'entend pourtant nullement, l'adage ci-deſſus l'exprime clairement, ſe ſoumettre à l'autorité d'autrui: c'eſt, ſomme toute, à ſon propre jugement qu'il ſe fie. Quoi de plus conforme à la dernière ſentence des „Principia Philoſophiæ" de Deſcartes — également intéreſſé, ſoit dit en paſſant, à la théorie de la muſique [3]) — où le philoſophe, après avoir vanté ſon ſyſtème, dit en terminant: „At nihilominus . . . . nihil . . . . ab ullo credi velim, niſi quod ipſi evidens & invicta ratio perſuadebit".

Nous n'entendons pas entrer ici dans une diſcuſſion ſur la queſtion de ſavoir juſqu'à quel point la „ratio" doit s'appuyer ſur l'„experientia" [4]). N'étant pas partiſan d'un

[1]) Portefeuille „Musica", f. 18 v, citée aussi à la p. 162 qui suit (note 26).

[2]) P. 28 qui suit.

[3]) Voyez ce que nous disons à la p. 33 qui suit sur quelques endroits de sa correspondance avec Mersenne et Constantijn Huygens père, où il traite e.a. brièvement de Simon Stevin, inventeur ou réinventeur (par hasard, peut-on dire; voyez la suite du texte; consultez aussi la p. 27 et la note 9 de la p. 32 qui suit) de ce qu'on appelle aujourd' hui la gamme tempérée.

[4]) Comparez la l. 10 de la p. 31 du T. XVIII.

rationalisme à outrance tel qu'on le rencontre parfois chez Platon [5]), Huygens reconnaît volontiers que les règles de la musique ont été primitivement découvertes par l'expérience [6]). Ailleurs il dit même que l'on ne „trouve des inventions nouvelles... que par hazard" [7]). On peut ajouter que de pareils hasards ne se présentent guère qu'aux chercheurs [8]); et aussi que c'est souvent en grande partie des idées d'autrui que ces hasards proviennent [9]): comparez ce que Huygens dit à la page citée [10]) sur l'utilité des expositions [11]).

Musicien depuis son enfance [12]), Huygens fait preuve dans plusieurs de ses lettres, p.e. dans celles qu'il écrivit à Paris pendant son séjour de 1655 [13]), de son intérêt pour cet art. Depuis 1661, date de la „Divisio Monochordi" (p. 49 qui suit), un mois après qu'il eut jeté les yeux sur un écrit de Hemony, nous le voyons s'occuper activement de la théorie [14]). D'autre part quelques-unes de ses notes théoriques ne peuvent être antérieures à 1691: en cette année parut le livre de Werckmeister qu'il discute [15]). C'est aussi en 1691 que fut imprimée son étude sur le Cycle Harmonique [16]), entreprise beaucoup plus tôt. Nous rappelons qu'elle est généralement connue sous le nom

---

5) Voyez la note 5 de la p. 355 du T. XIX.

6) Voyez le premier alinéa de la p. 116, ainsi que les l. 14—16 de la p. 154, la l. 4 d'en bas de la p. 155 et la l. 12 de la p. 168 qui suit: Trouvè par experience, puis la raison. En ce dernier endroit il s'agit de l'invention d'un certain tempérament que, dit Huygens, Zarlino et Salinas se disputent. Consultez sur cette „dispute" le deuxième alinéa de la p. 115. Voyez aussi sur l'„experience" et „la raison" le dernier alinéa de la p. 170.

7) T. XIX, p. 265, l. 9.

8) Comparez la note 2 de la p. 365 du T. XIX (expérience de Galilée sur les ratissements dont l'invention fut „del caso").

9) „& . . . regardant par hazard ces iours passez en la Statique de Steuin..." (lettre de Descartes à Mersenne du 13 juillet 1638; „Oeuvres", éd. Adam et Tannery, II, p. 247).

10) T. XIX, p. 265, l. 18—20.

11) Il s'agit en cet endroit d'expositions de modèles de machines, non pas de cloches (voyez la note 2 de la page précédente et la note 1 de la p. 26 qui suit), d'archicymbales (p. 113 et 157 qui suivent), de claviers à touches fendues (p. 154 note 2 et 160 note 21) ou d'autres instruments de musique.

12) T. I, p. 541 et 543 (lettres de l'instituteur Bruno). Voyez aussi la note 5 de la p. 356 du T. XIX.

13) T. I, p. 361, 372 etc.

14) Comparez le passage de la lettre à Moray du 1 août 1661, qui constitue notre Pièce II à la p. 12 qui précède.

15) Portef. „Musica", f. 20; § 9 de la p. 133 qui suit.

16) Pièce VI F à la p. 164 qui suit, où nous renvoyons le lecteur au T. X.

„Novus Cyclus Harmonicus" d'après la traduction latine dans l'édition de 's Gravesande de 1724. Après 1691 Huygens ne voulut plus rien publier quoiqu'il y ait songé un moment et qu'il eût eu l'occasion de le faire e.a. dans les „Acta Eruditorum" [17]).

Pour d'autres particularités, en partie chronologiques, nous renvoyons le lecteur aux Avertissements des diverses Pièces empruntées en majeure partie au portefeuille „Musica" et faisant enfin connaître avec quelque précision, près de 250 ans après sa mort, la figure de Huygens musicologue.

[17]) T. X, p. 225, 229, 230, 285, 298. Toutes ces pages datent de 1692.



MUSIQUE.

I. THÉORIE DE LA CONSONANCE.

Avertissement.

A. Origine du chant. Rapport des longueurs des cordes consonantes suivant Pythagore etc.

B. Autres considérations sur la gamme diatonique, produit d'intervalles consonants. Les demitons chromatiques modernes.

II. LA DIVISION DU MONOCHORDE.

Avertissement.

A. Copie d'une partie d'un écrit d'un des deux frères Hemony intitulé „Vanden Beijaert" (c.à.d. du Carillon).

B. Divisio Monochordi I.

C. Divisio Monochordi II.

Appendice à la Pièce C (Divisio Monochordi II).

III. PIÈCES SUR LE CHANT ANTIQUE ET MODERNE.

Avertissement.

A. Le tempo giusto.

B. Les divers modes.

C. Différences de hauteur, par rapport aux tons des instruments, résultant de la justesse du chant.

D. Les anciens connaissaient-ils le chant polyphone?

E. Mérite des „Belgæ", suivant Guicciardini, dans l'établissement ou rétablissement du chant polyphone.

IV. NOTES (précédées d'un Avertissement) SE RAPPORTANT À DES ÉCRITS DE MUSICOLOGUES ANCIENS.

Appendice: „Les tons de ma flute". La sirène?

V. NOTES (précédées d'un Avertissement) SE RAPPORTANT À DES ECRITS DE MUSICOLOGUES MODERNES.

VI. LE (NOUVEAU) CYCLE HARMONIQUE [1]).

Avertissement.
A. Divisio octavæ in 31 intervalla æqualia (per logarithmos).
B. Table intitulée „Division de l'Octave en 31 parties egales".
C. Commentaire sur une table.
D. Projet d'une lettre à Basnage de Beauval.
E. Cycle Harmonique par la division de l'octave en 31 dièses, intervalles égaux.
F. Lettre à Basnage de Beauval touchant le Cycle Harmonique (connue sous le nom Novus Cyclus Harmonicus).
G. Quelques notes se rapportant à la division de l'octave en 31 intervalles égaux.
Appendice I: l'idée de la περικύκλωσις etc. (programme de la Pièce E).
Appendice II: tableau comparatif de 11 ou 30 moyennes proportionnelles d'après différents calculateurs.

[1]) Huygens, dans la Pièce F (ainſi que dans la Pièce E), ne parle que du „Cycle Harmonique", tandis que 's Gravesande dans la même Pièce F, traduite en latin pour l'édition de 1724, ajoute au titre l'epithète „Novus"; comparez sur l'adjectif „nouveau", employé aussi par Huygens lui-même, la p. 143 de l'Avertissement des Pièces sur le Cycle Harmonique.

I.

THÉORIE DE LA CONSONANCE.



Avertiſſement.

Dans les deux Pièces qui ſuivent, de la date deſquelles nous parlerons tout à l'heure, Huygens traite le problème claſſique des intervalles conſonants qui n'avait jamais ceſſé — depuis Pythagore peut-on dire, en admettant comme vrai ce que l'hiſtoire ou plutôt la légende lui attribue — d'intéreſſer les muſicologues.

Acceptant comme exact que les conſonances des intervalles correſpondent aux rapports de petits nombres entiers (pouvant être interprétés tant comme rapports de longueurs de cordes que comme les rapports inverſes des fréquences des vibrations de ces mêmes cordes), il cherche la cauſe du plaiſir que nous donnent les intervalles conſonants dans la coïncidence périodique fort fréquente des phaſes des deux mouvements vibratoires de l'air tranſmetteur du ſon, ce dernier pouvant d'ailleurs également provenir d'autres inſtruments de muſique que de ceux à cordes. Plus préciſément ſa théorie de la conſonance (Pièce I, *A*) revient à ce qui ſuit.

Pour déterminer le degré de la conſonance de deux tons dont les fréquences ſont dans le rapport $p : q$ $(p < q)$, il faut conſidérer la ſérie des rapports de fréquences

$$2p : q \qquad 4p : q \qquad 8p : q \quad \ldots\ldots\ldots$$

c.à.d. les rapports des „répliques", ou octaves ſupérieures, du ton haut de l'intervalle conſidéré avec ſon ton bas; la conſonance, ſuivant Huygens, dépend de la préſence dans cette ſérie de rapports pouvant être exprimés par des fractions à dénominateur 1 ou 2. La tierce majeure doit donc être conſidérée comme plus conſonante que la quarte, puiſque dans la ſérie

$$5 : 4 \qquad 10 : 4 \qquad 20 : 4 \quad \ldots\ldots\ldots$$

4

le deuxième et le troifième rapport peuvent s'écrire 5 : 2 et 5 : 1, de forte qu'il se trouve dans cette férie des dénominateurs plus petits que dans la férie correfpondante de la quarte

4 : 3 8 : 3 16 : 3 . . . .

où toutes les fractions font irréductibles.

Il mérite d'être remarqué que dans cette Pièce Huygens fait preuve de connaître l'exiftence des harmoniques — déjà fignalées par Merfenne [1]) — et qu'il établit même un certain lien entre ce phénomène et celui de la confonance. En effet, puifque les harmoniques qui forment avec le ton fondamental un intervalle d'un ou de plufieurs octaves, conftituent précifément les répliques fatisfaifant au critère de réductibilité fus-énoncé des rapports caractériftiques, elles contribuent à produire la confonance.

Huygens croit pouvoir conftater — ici comme dans plufieurs autres Pièces — que les Anciens („chofe affez eftrange") n'ont *généralement* [2]) reconnu comme intervalles confonants que l'octave, la quinte et la quarte, ainfi que ceux qui en réfultent par l'addition d'une octave; mais non pas les tierces et les fixtes („lefquelles", ajoute-t-il, „quoyque mefconnues n'ont pas laiffè d'eftre emploiees dans leur chant de fons confecutifs, auffi bien que dans celuy d'aujourdhuy"). Merfenne difait environ la même chofe dans le „Liure Premier des Confonances", faifant partie de l'„Harmonie Univerfelle"; il écrit ce qui fuit (Prop. XXIX): „Il femble que les Grecs n'ont nullement mis ces 2 Tierces, ny les Sextes au rang des Confonances, car tous depuis Ariftoxene iufques à Ptolomee, Ariftide, Bryennius*, & plufieurs autres tant Grecs que Latins, ont feule-

* L'oeuvre manuscrite de Manuel Bryennius, musicologue grec du 14ième siècle, ne fut publiée (par J. Wallis) que vers la fin du 17ième siècle.

[1]) Voyez, aux p. 59—60 de notre T. I, sa lettre à Constantijn Huygens père du 12 janvier 1647.
Dans les „Traitez de la Nature des Sons, et des Mouuemens de toutes Sortes de Corps" (faisant partie de l'„Harmonie Universelle") p. 208, Prop. XI: „Determiner pourquoy une chorde touchée à vuide fait plusieurs sons en mesme temps" Mersenne dit avoir fait beaucoup d'expériences sur ce sujet. Dans le Corollaire I il prétend „que le son de chaque chorde est d'autant plus harmonieux & agreable, qu'elle fait entendre un plus grand nombre de sons differens en mesme temps"; dans le Corollaire II il dit e.a.: „i'ay souuent experimenté que le coulement du doigt sur le bord du verre fait deux ou trois sons en mesme temps comme ie diray dans le liure des Cloches, qui font semblablement plusieurs sons". Comparez la note 13 de la p. 36 qui suit.
Nous ignorons si Huygens a réussi, en 1675 ou plus tard, à voir les „tremblements entremeslez des chordes" (T. XIX, p. 366).

[2]) Comparez le dernier alinéa de la p. 114 qui suit (avec la note 20), où il apparaît nettement que Huygens ne fait ici aucune différence entre les musicologues grecs de différentes époques.
En cet endroit il critique Mersenne, mais sans le citer. Voyez encore sur ce sujet notre citation de Mersenne dans la note suivante 21, p. 114.

ment reconnu l'Octaue, la Quinte, la Quarte, & leurs repliques pour Consonances, comme l'on void dans les liures qu'ils nous ont laissé".

Apparemment l'opposition entre les points du vue des anciens grecs d'une part, et ceux de notre seizième et notre dix-septième siècle de l'autre, n'était pas si nette qu'elle le paraît dans les énoncés de Huygens. Il est certain, quoi qu'il dise, que dans l'antiquité l'on n'était pas absolument d'accord sur ce sujet: Ptolémée *reproche* aux pythagoriciens de ne pas ranger la tierce majeure dans la série d'intervalles (octave etc.) dont il a été question au début de l'alinéa précédent.

Il ne suffit pas à notre avis, pour caractériser la pensée grecque, de ne considérer que les concepts consonance et dissonance. Ptolémée certes distingue plus finement [3]: il oppose en premier lieu les intervalles emmèles, c.à.d. ceux dont les deux tons, entendus consécutivement, plaisent à l'ouïe, aux ecmèles qui ne jouissent pas de cette propriété; en second lieu les intervalles symphones, c.à.d. ceux dont les deux tons semblent se fondre, aux diaphones où ils conservent pour l'ouïe leur individualité. De ces quatre espèces les intervalles ecmèles semblent seuls mériter le nom de dissonances; or, chez Ptolémée les tierces, ainsi que le ton majeur et le ton mineur, n'en font pas partie.

Dans une lettre à Mersenne de mars 1662 [4]) J. Titelouze écrivait: „ceux qui estoient musiciens pithagoriciens, n'avoient et n'usoient que les consonances contenues dans le 4, et les disciples de Ptolomée se servoient de toutes celles qui se pouvoient trouver dans le 6 [voyez sur le *senarius* la p. 162 qui suit]".

Dans le § 3 de la Pièce A Huygens prend partie contre Stevin qui dans ses „Hypomnemata mathematica" de 1608 (pour ne mentionner que l'édition latine de cette année) avait osé soutenir que les grecs s'étaient trompés en considérant le rapport 3:2 comme exprimant avec précision la quinte agréable à l'oreille; ce qui s'explique par le fait que Stevin voulait que tous les douze demitons de la gamme fussent caractérisés par un rapport unique. Il est connu que *pratiquement* cette „gamme tempérée" a triomphé à la longue dans la construction des instruments; ce qui ne veut pas dire que Stevin avait *théoriquement* raison. Nous revenons dans la note 9 de la p. 32 — où il est question e.a. d'un manuscrit de Stevin — sur cette question déjà effleurée dans

3) „Harmonika", I, cap. 4—7.
4) „Correspondance du P. Marin Mersenne" II, 1933, éd. M.me P. Tannery et C. de Waard (p.73).

la note 3 de la p. 17 et dont s'occupe e.a. Merſenne dans ſes „Queſtions théologiques, phyſiques, morales et mathématiques" de 1634, ainſi que dans ſon „Harmonie Univerſelle" de 1636 et ailleurs. Voyez auſſi notre Avertiſſement ſur le Cycle Harmonique, où nous diſcutons de nouveau l'influence que l'exemple donné par Stevin peut avoir eue ſur Huygens.

D'ailleurs, l'influence du manuſcrit mentionné ſe révèle, penſons-nous, en un endroit déjà publié de la préſente Pièce I, A (qui forme un tout avec la Pièce II ſur le ſon publiée en 1937 laquelle occupe les p. 361—365 du T. XIX); ceci (ou plutôt ce que Huygens dit erronément, que cette erreur ſoit due à l'influence de Stevin ou non) nous rend poſſible de fixer avec une certaine probabilité la date de la Pièce. Le dernier alinéa de la note 3 de la p. 362 du T. XIX faiſait déjà voir qu'elle eſt fort probablement antérieure à l'année 1672, dans laquelle Huygens parle d'une „règle des fondeurs" contraire à celle qu'il croyait pouvoir énoncer dans la Pièce en parlant de l'hiſtoire des marteaux de Pythagore. Nous avons dit dans la note nommée ne pas comprendre comment dans la Pièce Huygens, malgré Merſenne[5]), ſoutient avec l'auteur de cette hiſtoire, „qu'il eſt vray que de deux pièces de metal ſemblables celle qui eſt double de poids de l'autre luy conſonne de l'octave plus bas". Nous croyons le comprendre maintenant: c'eſt que Stevin dans ſon manuſcrit connu à Huygens raconte l'hiſtoire des marteaux *ſans la critiquer*[6]); il dit, ce qui ſemble montrer qu'il croit en effet à ſa réalité ou du moins à ſa poſſibilité: „Dergelijcke voorder beſoeckende op ſpeeltuygens geſpannen ſnaren bevant daerin het ſelve regel te houden", c. à. d. „Examinant enſuite [c.à.d. après avoir peſé les marteaux] des effets ſemblables ſur les cordes tendues des inſtruments de muſique, il [Pythagore] conſtata qu'on y obſerve la même règle etc." Or, quels ſont les „fondeurs" qui ont détrompé Huygens? Sans doute les frères Hemony, ou plutôt l'un deux, avec qui Huygens eut une longue

[5]) Et malgré Faber Stapulensis (Lefèvre d'Etaples) que Huygens ne mentionne d'ailleurs pas. Il eſt vrai que les ouvrages musicaux de cet auteur, ainsi que ceux d'autres musicologues dont il ne parle pas, se trouvaient dans la bibliothéque de son père, d'aprés le catalogue de la vente des livres de ce dernier qui eut lieu bientôt aprés son décès en 1687.

Notons encore que nous aurions pu citer plusieurs autres endroits où Mersenne dit que l'histoire des marteaux est une fable. Voyez p.e. la p. 146 (Theor. XVIII) du „Traité de l'Harmonie Universelle" de 1627.

[6]) „Byvough der Singconst" I. Hooftstick.

[7]) Voyez la note 2 de la p. 17 qui précéde.

conversation déjà en 1662 [7]). Par conséquent, la Pièce I, A nous paraît être antérieure à cette conversation. Elle est peut-être de 1661 comme la Division du Monochorde: voyez l'Avertissement suivant où il est également question des Hemony. — Nous ne disons rien de la Pièce I, B qui peut dater de plus tard.

En terminant, nous relevons expressément ce à quoi nous avons déjà fait allusion au début du présent Avertissement, savoir la proposition de Huygens [8]) de considérer désormais les rapports correspondant aux différents intervalles non pas comme des rapports de longueurs de cordes (de même nature et également tendues), mais comme des rapports de fréquences de vibrations, attendu qu'il avait été établi au dix-septième siècle que ces rapports sont l'inverse l'un de l'autre [9]). Il est d'ailleurs possible que cette relation ait été entrevue longtemps auparavant: en lisant les œuvres des théoriciens grecs on est souvent porté à se demander si dans leur pensée c'est le plus petit nombre du rapport qui correspond au ton le plus élevé ou bien plutôt (malgré la considération des longueurs des cordes) le plus grand des deux nombres.

8) Note 11 de la p. 35. Mersenne disait de même dans le „Traité des Instruments a chordes" faisant partie de l'„Harmonie Universelle" (Livre III, Prop. 18, Corollaire II): „Si l'on veut determiner le ton de la voix, auquel l'on veut que la note, ou la partie proposée se chante, il n'y a nul moyen plus general & plus asseuré que de donner un nom propre à chaque ton, qui soit pris du nombre des battemens d'air [comparez la l. 8 de la p. 39 du T. XIX] que font toutes sortes de tons, ou de sons . . . il faut remarquer que les nombres des tremblemens peuuent seruir au lieu des notes, ou de la Tablature ordinaire des voix & des instrumens".

9) Voyez aux p. 364—365 du T. XIX, le § 2 (avec la note 1): cette Pièce sur le son du T. XIX forme un tout avec la présente Pièce A, comme nous l'avons dit dans le texte et que nous le répétons encore une fois dans les §§ 3 et 4 de la présente Pièce où nous renvoyons le lecteur au T. XIX. Voyez aussi le deuxième alinéa de la note 10 de la p. 35 qui suit.

A. ORIGINE DU CHANT. RAPPORT DES LONGUEURS DES CORDES CONSONANTES SUIVANT PYTHAGORE, ETC.

§ 1 [1]). L'origine du chant vient des consonances, je dis du chant d'une seule voix ou instrument, aussi bien que de celuy à plusieurs voix dont on use aujourd'huy. Car ce plaisir que l'on prend d'entendre les consonances n'est pas seulement à l'egard de deux sons consonants en mesme temps, mais il y en a tout de mesme a entendre ces tons les uns apres les autres. Et comme l'oreille est offensée par la dissonance de deux sons entendus a la fois, ainsi l'est elle encore par ces mesmes sons proferez de suite, quoyque la rudesse ne soit pas tout a fait si grande.

Ce qui donc a fait que les hommes par toute la terre chantent par les mesmes intervalles ce n'est pas un hazard, ni une chose fort estrange, mais tous ces intervalles ont estè reglez par les consonances, et la musique devant donner du plaisir et non du chagrin elle ne pouvoit se chanter par d'autres intervalles que ceux là.

§ 2. Quand on chante V R M F S L C V^2 [2]) il y a les tons de V M F S L V^2 qui font tous des consonances contre le premier V. Et plusieurs encore entre eux. Et cela fait premierement que l'oreille se plait a entendre ceux la les uns apres les autres qui font consonance avec celuy qui a immediatement precedè comme V M S V^2 F L V^2 S V. Secondement elle aime encore a entendre les uns apres les autres, quand bien elles ne consonent pas avec les precedentes immediatement, mais avec les penultiemes ou mesme d'autres anterieures sur tout quand elles ont fait quelque impression. Ainsi en chantant V S F M F S L S S V le troisieme ton de F fait un bon effect parce qu'il fait consonance avec le premier V. et le 4e M contre S et V precedents; et le F suivant contre le F precedent (car l'unison tient en cecy lieu de consonance) et contre le V. le second S contre les precedents MSV. et le L contre FMV.

Or les premiers sons de musique doivent avoir estè ceux qui faisoient ensemble les

---

[1]) Portefeuille „Musica", f. 56 et suiv. Le premier alinéa du § 1 ainsi que plusieurs autres morceaux de la Pièce I, *A*, ont déjà été publiés dans le T. XIX (p. 361 et suiv.) sous le titre: „Rapports des longueurs des cordes consonantes suivant Pythagore, et rapports des nombres de leurs vibrations suivant Galilée et d'autres savants".

Nous renvoyons le lecteur au T. XIX pour la majeure partie des alinéas déjà imprimés.

[2]) Comparez la note 1 de la p. 362 du T. XIX. Les signes de l'échelle diatonique V, R, M, F, S, L, C, V^2 correspondent donc respectivement à C, D, E, F, G, A, B, c ou DO, RE, MI, FA, SOL, LA, SI, do. Par conséquent $C^{\flat}$ = Bes.

plus remarquables confonances comme l'octave la quinte et la quarte. ainfi VFSV[2] et cela fe voit en effect de ce que les premieres Lyres n'ont eu que ces quatre chordes, et que toute l'antiquitè n'a reconnu que ces premieres confonances[3]). En fuite la quinte du S au R vers en haut ou la quarte de S vers en bas ont montrè les tons du R, et la 5te de R L le L. et la quarte vers en bas LM le M et depuis M la quinte vers en haut le C.

Et voila tous les tons de l'octave par ou la voix monte en chantant. Ces tons ayant cette origine cela a eftè caufe en partie que les anciens n'ont pas confiderè que les tierces majeure et mineure et les 6tes eftoient des confonances. Lefquelles quoyque mefconnues n'ont pas laiffè d'eftre emploiees dans leur chant de fons confecutifs, auffi bien que dans celuy d'aujourdhuy. Il eft vray que c'eft une chofe affez eftrange de ce qu'ils ne trouvoient pas que les chordes diftantes par ces intervalles de tierces et fixtes faifoient un fon agreable auffi bien que les quintes et les 4tes et que la ou l'on ne fait point d'accords ou il n'entre de 3 ou de 6, dans leur fiecle on ne trouvoit pas qu'elles meritaffent le nom de confonances. Mais nous parlerons apres de la caufe de cecy[4]). Quant a l'origine des femitons c'eft a dire des autres tons que nous chantons quelquefois et qui font differens des precedents, il eftoit neceffaire que le $C^{\flat}$ [5]) fuft trouvè le premier a caufe qu'on trouvoit qu'en montant de F jufqu'au C cela faifoit mauvais effect lors que l'impreffion de F reftoit dans l'oreille qui ne confonne point avec C, et feulement contre le S[6]), qui mefme pouvoit n'avoir pas precedè.

Mais de monter par FSL$C^{\flat}$ eftoit beaucoup plus agreable parce que le $C^{\flat}$ eft confonante au S et au F, avec lequel il fait la 4e. qui eftoit un des intervalles les premiers connus, ce qui a fait trouver aifement ce fon de $C^{\flat}$. Les autres fons qu'on appelle chromatiques peuvent avoir eftè trouvè par les cadences aux endroits ou il euft fallu descendre d'un ton entier comme S̀FŚ, LSL, RVR[6bis]), car la voix affecte naturellement a ne s'eloigner pas tant d'un ton ou elle doit revenir incontinent, de forte que l'on diminue ces tons: mais d'en avoir fait juftement des demitons majeurs, il y a deux raifons pour cela, l'une que ces fons de F*, S*, V*[7]) font de ceux qui font confonance

[3]) En marge: comment ils ne prenoient pas VM et VL pour confonnantes. RF. R$C^{\flat}$.
Les intervalles indiqués, que tous les anciens sont ici censés ne pas avoir considérés comme des consonances, sont, comme Huygens le dira aussi dans le premier alinéa de la p. 37 (note 15 qui suit) la tierce majeure, la sixte mineure, la tierce mineure et la sixte majeure.

[4]) Nous ne voyons pas que Huygens ait tenu cette promesse.

[5]) Voyez la note 2 qui précède.

[6]) En d'autres termes, B forme un intervalle consonant avec S, mais non pas avec F.

[6bis]) Voyez sur les accents ` et ´ la note 4 de la p. 77 qui suit.

[7]) C.à.d. Fis, Gis, Cis.

avec plusieurs des sons naturels de l'octave, comme F* contre R, L et C. S* contre M et C. ce qui addoucit et accommode le chant suivi aussi bien que la symphonie comme il a estè dit cydevant. L'autre raison est que l'on estoit desia accoustumè aux intervalles des demitons majeurs en chantant FMF, et VCV.

Dans la suite on a encore adjoutè le M♭ non pas tant pour avoir le semiton majeur au dessus du R que pour avoir la tierce mineure dessus le V et la majeure dessous le S ce qui donne en mesme temps la 6 majeure contre V² et la sixte mineure contre S vers en bas.

L'on adjoute encore d'autres tons quelquesois et avec beaucoup de raison dont nous parlerons cy apres [8]).

§ 3. Puisque les intervalles du chant ont leur origine des consonances, il est necessaire . . . .

. . . .

Consultez les p. 362—364 du T. XIX (Huygens y parle e.a. de l'histoire des marteaux de Pythagore; voyez là-dessus l'Avertissement qui précède) jusqu'à l'alinéa se terminant par: et la proportion dans les autres nombres est de 5 à 2. Dans ces pages il est question des „répliques" auxquelles Huygens fait allusion à la fin du § précédent: voyez l'alinéa suivant.

Ainsi parce que les chordes de 3 a 2 font la 5te, ce sera aussi une consonance que de 6 a 2 ou de 3 a 1, que l'on appelle la 12e, et c'est une replique de la 5te. Et la raison pourquoy cela arrive est la mesme qui fait la douceur des autres consonances dont nous allons parler.

Il est constant par l'experience, et ceux qui ont tant soit peu d'oreille pour la musique ne peuvent nier, que les consonances suivant les proportions susdites ne soient tres parfaites et meilleures que quand on s'ecarte de ces veritables proportions numeriques. Et ceux qui ont osè soustenir le contraire et que la 5 ne consistast pas dans la raison de 3 a 2 ou n'avoient pas l'oreille capable d'en juger ou croioient avoir une raison pour cela, mais ils concluoi[en]t mal. En marge: Stevin [9]). dont nous parlerons cy apres [10]).

---

[8]) Il s'agit des „répliques" dont il est question dans le § 3 qui suit.

[9]) Huygens fait apparemment allusion à la théorie des intervalles que Stevin développe dans son ouvrage „Vande Spiegeling der Singkonst", imprimé pour la première fois par D. Bierens de Haan — voyez sur lui la p. V de notre T. I — dans les „Verslagen en mededeelingen der Koninklijke Akademie Afd. Natuurkunde", Amsterdam 1884 et aussi séparément („Réimpression") en cette même année et cette même ville avec le traité également inédit: „Vande molens". Stevin divise l'octave en 12 intervalles égaux caractérisés par le rapport $\sqrt[12]{2} : 1$, en d'autres termes il conçoit, quoique sans songer à un tempérament, ce qu'on a appelé plus tard la gamme

§ 4. Quand on examine les tremblements des chordes ce que je pense que Galilee a fait le premier . . . .

. . . .

Consultez les p. 364—365 du T. XIX jusqu'à la fin de la Pièce de ce Tome, c.à.d. jusqu'aux mots: lesquelles on tendra toutes perpendiculaires avec un poids au bout.

---

tempérée. Dans le „Bijvough der Singkonst" I. Hooftstick „Dat de everedenheijt der geluijden met haer lichamen, bij de Grieken niet recht getroffen en is" il dit expressément que les grecs se sont servis à tort, pour le rapport de la quinte, de la valeur 3 : 2 proche de la *vraie* valeur $2 : \sqrt[12]{32}$.

Nous remarquons que le manuscrit du traité de Stevin publié par Bierens de Haan fait partie d'une collection de manuscrits — c'est le Vol. 47 mentionné dans la note 1 de la p. 516 du T. XVIII — provenant de Constantijn Huygens père. Dans une lettre à Mersenne du 1er août 1640 (éd. Worp des lettres de Const. Huygens, T. III de 1891, p. 229) ce dernier parle „des pièces de sa main [c.à.d. de Stevin] qui n'ont point encores veu le jour et sont en mon pouvoir". Christiaan Huygens a donc fort bien pu prendre connaissance de cet écrit quoiqu'il n'eût pas trouvé de place dans les „Wisconstige Ghedachtenissen" de Stevin, ni dans la traduction latine de la même année 1608, les „Hypomnemata Mathematica", auxquels il était destiné (étant mentionné dans le sommaire).

Cette hypothèse, quelque plausible qu'elle soit — nous l'avons déjà fait ressortir dans notre Avertissement, en parlant de la question des marteaux de Pythagore —, est d'ailleurs ici plus ou moins superflue, puisque Stevin avait brièvement indiqué son système dans son „Eertclootschrift" faisant partie tant des „Wisconstige Ghedachtenissen" que des „Hypomnemata" (I Liber Geographiæ, p. 19). On trouve ce passage aussi dans les „Oeuvres Mathematiques de Simon Stevin augmentées par Albert Girard" de 1634 (p. 112 „Premier Livre de la Géographie"). Stevin y parle de „inveteratò tonorum musicæ symphoniæ errore, falsaque opinione . . . . . ubi termini διὰ πέντε ab omnibus assumuntur, 3 ad 2" et de „veris semitonis quos natura duce usque æquales canimus". Dès lors cette opinion de Stevin et le système qu'il en déduisait étaient généralement connus. Mersenne les mentionne dans sa „Preface, & Aduertissement au Lecteur" des „Traitez des Consonances, des Dissonances, des Genres, des Modes & de la Composition" faisant partie de l'„Harmonie Universelle" de 1636; il dit: „Chacun est libre de suiure telle opinion qu'il voudra, selon les raisons les plus vraysemblables: par exemple, ceux qui aymeront mieux tenir que tous les tons & les demitons doiuent estre esgaux . . . . . comme fait Stevin au commencement du premier liure de sa Geographie, & les Aristoxeniens d'Italie auec plusieurs autres [ailleurs Mersenne relève plus expressément la pensée d'Aristoxène et des Aristoxéniens: consultez le dernier alinéa de la présente note; voyez en outre sur le système d'Aristoxène la note 5 de la p. 78, ainsi que la note 16 de la p. 113 et la note 69 — où il est question de Vincent Galilée — de la p. 121 qui suit], & non inesgaux comme les met Ptolomée, ne manqueront pas de raison: & il sera difficile de leur demonstrer que la Quinte est iustement en raison sesquialtere, & le ton en raison sesquioctaue, ou s'il en faut une milliesme partie, etc."

En 1634 aussi, donc un peu plus tôt, dans „Les Questions théologiques, physiques, morales et mathematiques" Mersenne parlait dans sa réponse à la „Question XXXIII. A quoy seruent les raisons, & les proportions de la Geometrie, etc." de „ceux qui suiuent l'égalité des tons, & des demitons dans la Musique" lesquels „sont contraints de trouuer 11 lignes moyennes proportionnelles entre les 2. qui font l'octaue".

§ 5. Quelles confonances font eftimees plus agreables que d'autres. Et s'il n'y a pas encore d'autres confonances outre celles qui font maintenant reputees dans ce nombre.

On trouve que des confonances les unes font plus agreables que les autres, et que ce font celles qui plaifent le plus dont les battements fe rencontrent le plus frequemment enfemble, exceptè pourtant l'uniffon dont tous les battements fe rencontrent et qui

---

Descartes, lui aussi, n'ignorait pas ce système. Dans ses lettres à Mersenne de 1634 il parle trois fois de „vos musiciens, qui nient les proportions des consonances", „qui nient qu'il y ait de la difference entre les demitons" („Oeuvres de Descartes", éd. Adam et Tannery, T. I, p. 286, 288, 295) et dans une lettre du 1 novembre 1635 à Constantyn Huygens il parle de „tout de mesme de bons musiciens qui ne veulent pas encore croire que les consonances se doiuent expliquer par des nombres rationaux, ce qui a esté, si ie m'en souuiens, l'erreur de Steuin, qui ne laissoit pas d'estre habile en autre chose".

C'est peut-être Isaac Beeckman qui a attiré l'attention de Descartes sur ce sujet connu à Beeckman au moins depuis 1614. Dans une lettre à Mersenne du 1 octobre 1629 Beeckman écrit: „illam Stevini nostri sententiam de sex tonis continue proportionalibus, olim a me diligentissime excultam, ante multos annos penitus rejeci". Beeckman avait d'ailleurs eu en 1624 l'occasion de consulter le manuscrit de Stevin mentionné plus haut. Nous empruntons ces informations aux p. 274 et 286 du T. II de 1936 de la „Correspondance du P. Marin Mersenne" publ. par M.me Paul Tannery, éditée et annotée par Cornelis de Waard.

Autrement que Huygens qui avait peut-être l'oreille plus fine, Mersenne ne désapprouve pas le système des Aristoxéniens et de Stevin dans la pratique. Il écrit („Harmonie Universelle", p. 132 Livre Second. Des Dissonances, Prop. XI: „Expliquer les intervalles Harmoniques consonans & dissonans qui ne peuuent s'exprimer par nombres"): „cette division de l'octave [savoir celle représentée par une table contenant 13 nombres, qui sont „en continuelle proportion Geometrique"; ce sont les nombres à fort peu près corrects 100000, 105946, 112246, 118921, 125993, 133481, 141422, 149830, 158741, 168179, 178172, 188771, 200000] peut suffire pour toutes sortes de Musiques, tant des Voix que des Instrumens: car si l'on veut la iustesse, on la void en la 2 colomne, qui diuise le diapason en 7 demitons majeurs, en 3 moyens, & en 2 mineurs [nombres 100000, 106666, 112500, 120000, 125000, 133333, 140947, 150000, 160000, 166666, 177777, 187500, 200000]...l'oreille n'en peut quasi remarquer la difference".

Ailleurs dans l'„Harmonie Universelle" („Liure Premier des Instrumens" Prop. XIV) Mersenne nous apprend que les 13 nombres proportionnels cités ont été calculés pour lui par „Monsieur Beaugrand, tres excellent Geometre". Il parle en cet endroit de la possibilité de s'en servir „pour diuiser le manche du Luth, de la Viole, du Cistre etc." Plus loin, à la p. 21 des „Nouuelles Obseruations Physiques & Mathematiques", Mersenne donne (VIII. Observation) les „11 nombres qui representent les 11 moyennes proportionnelles..... que le sieur Gallé a supputez", savoir 100000000000, 94387431198, 89090418365 ... 50000000000. À la p. 384 (Prop. XXXVIII du Liuvre Sixiesme des Orgues" — instruments dont il s'agit aussi, Prop. XLV de la p. 408, de „diuiser le diapason.... en douze demitons esgaux" —) Mersenne écrivait: „M. Boulliau l'un des plus excellens Astronomes de nostre siecle ... m'a donné une table Harmonique qui merite d'estre inserée dans ce traité parce qu'elle contient toute la Theorie de la Musique .... [elle] contient les dites racines si précisément, que les fractions qui suiuent les

pour cela ne fait autre effect qu'un son tout seul; et encore l'octave et ses repliques parce qu'elle ressemble a l'unisson [11]).

Hors mis celles là la 12 ou la 5 par dessus l'octave est trouuee la plus agreable, dont la proportion est de 3 a 1, de sorte qu'a chaque battement de l'air du son grave, l'aigu en fait 3. au lieu que dans la 5e les trois battemens du ton aigu ne se rencontre[nt] que avec les 2 battemens du ton grave, et c'est ce qui fait que la 12 est plus agreable que la 5. Apres la 12e la prochaine en douceur est la 17e ou la tierce majeure par des-

---

nombres entiers vont iusques aux premieres & secondes minutes". De fait, la précision laisse quelque peu à désirer. Il s'agit de 11 moyennes proportionnelles géométriques entre les nombres 2 et 4, écrites dans le système sexagésimal, savoir 2°7′12″, 2°14′52″, 2°22′33″, 2°31′12″, 2°40′5″, 2°49′39″, 2°59′32″, 3°10′5″, 3°21′50″, 3°33′43″, 3°46′20″. Voyez sur les nombres de Beaugrand, de Boulliau, et de Gallé l'Appendice II à la p. 171 qui suit.

Quant aux Aristoxéniens, Mersenne en parle e.a. aux p. 67 et 70 du „Liure Second des Instrumens" (Prop. VII) en ces termes: „... puis qu'Aristoxene & ses disciples ont diuisé le ton en 2 demy-tons esgaux, & que plusieurs usent encore de cette diuision sur le manche du Luth & de la Viole, ie veux icy montrer la pratique de cette diuision... Ceux qui desirent d'autres manieres pour diuiser l'Octaue, & la manche du Luth, & des Violes en 12 demy-tons esgaux, peuuent voir Zarlin au 4. liure de son Supplément, chapitre 30, où il applique cette diuision au manche du Luth, & Salinas son contemporain en son 3. liure chapitre 31, de sorte qu'il y a pres de 60 ans que l'inuention de demy-tons esgaux d'Aristoxene a esté renouuellée par ces deux Musiciens". Voyez sur Zarlino et Salinas la p. 45 qui suit. Consultez aussi la note 1 de la p. 171.

[10]) Huygens revient brièvement sur cette question dans la Pièce de la p. 168. Une lettre à S. Stevin de Abraham Verheijen, organiste à Nymègue, qui était jointe au manuscrit mentionné dans la note précédente et fut publiée en 1884 par Bierens de Haan avec le manuscrit, fait voir que l'auteur donne son adhésion à la théorie de Stevin. On a vu dans la note précédente que Beeckman avait été durant plusieurs années du même avis.

Nous observons que Stevin ne savait pas encore, comme Huygens, que les fréquences des vibrations sont inversement proportionnelles aux longueurs des cordes (de même nature et également tendues). Le moment où Beeckman cessa d'ajouter foi à la doctrine de Stevin doit avoir été celui où il se rendit compte de l'existence de cette proportionnalité inverse (voyez la note 1 de la p. 364 du T. XIX).

[11]) En marge les remarques suivantes:

il faut distinguer entre leur beautè estant entendues seules ou accompagnees d'autres ou suivies ou precedees d'autres. on peut faire entendre la 6 en tel lieu ou apres tel autre accord qu'elle ne paroistra nullement consonante.

pourquoy pas plus de consonances: de 7 a 1. Voyez encore sur ce sujet le dernier alinéa de la Pièce.

renverser les nombres et les considerer par le nombre des battemens.

Dans cette dernière ligne, sur laquelle nous attirons aussi l'attention du lecteur dans notre Avertissement, Huygens propose donc de caractériser les intervalles par les rapports des fréquences des tons au lieu de ceux des longueurs des cordes.

ſus deux octaves dont la raiſon eſt de 5 a 1, et partant les 5 battements du ton aigu ſe ſont contre chaque battement du ton grave. Dans la 10e qui eſt la 3e majeure par deſſus une octave les 5 battemens du ton aigu ne ſe rencontrent qu'avec les 2 du ton grave, et dans la 3e majeure elle meſme, les meſmes 5 battements ſe font contre 4 du ton grave, ce qui la rend moins belle que la 10e, et celle cy moins belle que la 17 ou ſeconde replique de la tierce [12]).

Quand on compare ſelon cette maxime la 4te avec la 3e majeure on diroit que celle cy devroit eſtre moins agreable que la 4te, car a tous les 3 battemens ſe rencontrent les 4 dans la quarte; et dans la tierce a tous les 4 battements ſe rencontrent les 5. Et cependant la 4te ſemble la moins bonne des deux. L'on voit la meſme choſe generalement par tout, que de deux conſonances celle dont la replique premiere ou ſeconde devient en raiſon multiple paroit meilleure que l'autre. Et il ſemble que la raiſon ſoit qu'en entendant quelque ton on ſuppoſe et ſemble entendre en quelque façon ſon octave plus haute ou meſme la double octave. Et on l'entend effectivement en ſonnant quelque chorde, ou grande cloche, et meſme la 12e et la 17e [13]). De ſorte que comme les repliques de ces conſonances ſont en raiſon multiple dont les rencontres de battements ſont plus frequentes que des autres, on eſtime la conſonance meſme par la beautè de ces repliques. Ainſi donc puiſque les repliques de la tierce ſont la 10e et la 17, dont l'une aux 2 battemens du ſon grave et l'autre a chacun en a 5 du ſon aigu, et qui pour cela ſont meilleures que la 4e en qui la rencontre ne ſe fait qu'a tous les 3 coups du ſon grave et de meſme a toutes ſes repliques; on trouve la 3 majeure elle meſme meilleure que la 4te [14]).

On peut examiner la preference des autres conſonances ſuivant ces meſmes regles et il eſt utile de connoiſtre ces degrez de bontè, quoy qu'il ſoit vray que tous les gouts ne s'accordent pas tout a fait en ce jugement. Ce qui paroit bien manifeſtement de ce

[12]) En marge: le ſon vient beaucoup plus de la table et du corps de l'inſtrument que des chordes. Comparez la p. 370 du T. XIX.

[13]) En cet endroit Huygens fait preuve de connaître le phénomène des harmoniques. Comparez la note 1 de la p. 26 qui précède. Ses observations se rapportent, pour un ton fondamental de la fréquence n, aux harmoniques des fréquences $2n$ (octave), $3n$ (12e, quinte de l'octave), $4n$ (octave double) et $5n$ (17e, tierce majeure de l'octave double).

Voyez encore sur Huygens et les cloches les p. 265 et 339 du T. XVII.

[14]) Il est remarquable que Huygens, tout en faisant appel pour motiver la considération des répliques au phénomène des harmoniques dont elles font partie, ne fait entrer en ligne de compte, pour expliquer la consonance, que les harmoniques formant des octaves, simples ou supérieures, avec le ton fondamental. S'il avait pris en considération toutes les harmoniques comprises dans la série $2p : q \quad 3p : q$ etc.
ainsi que celles du ton de la fréquence q, il aurait obtenu une théorie se rapprochant de celle beaucoup plus récente de Helmholtz („Die Lehre von den Tonempfindungen", Zweite Abtheilung, Zehnter Abschnitt. Dritte Auflage, Braunschweig 1870, p. 284 et suiv.).

que les anciens ne trouvoient pas feulement que les 3ces ni les 6tes fuffent des confonances [15]), et qu'ils reconnoiffoient la 4te parmy les premieres.

Il eft bon a ce propos d'examiner s'il n'y a pas d'autres confonances que celles que nous avons definies cy deffus et s'il y a quelque raifon de l'affurer. Car peut eftre nous pourrions faire la mefme faute que les anciens.

Les proportions des nombres qui conftituent les confonances font reputees celles d'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, à quelqu'autre de ce mefme rang, y comprenant auffi les doubles et les moitiez de ces nombres ou mefme leur autres multiples et foumultiples par 2, ce qui ne fait qu'adjouter la confonance a une ou a plufieurs octaves ou bien l'en ofter. Le nombre de 7 ni autre nombre primitif ou compofè de premiers [16]) n'y font point admis. Et il y en a [17]) qui attribuent cela à la perfection du nombre 6, lequel ils appellent harmonique pour cette raifon. Cependant a bien examiner la chofe et fans prejugè l'on trouvera que le nombre de 7, comparè a d'autres, n'eft pas incapable de produire une confonance [18]), mais que celles qu'il produit ne font pas compatibles avec les confonances defia eftablies, ni mefme fi bonnes [19]).

---

[15]) Comparez la note 3 de la p. 31, et les lignes 4—5 de la p. 79, ainsi que le § 2 de la p. 114 qui suit, les lignes 8—7 d'en bas de la p. 153 et les l. 3—5 de la p. 162.

En marge les observations suivantes:

les unes font les fupplements des autres a l'octave et fe prennent en quelque facon pour la mefme.

3ces aupres de la baffe peu agreables aupres de ce qu'elles font ailleurs.

[16]) Il faut entendre: de premiers supérieurs à 6.

[17]) Voyez la note 30 de la p. 162.

[18]) Comparez le dernier alinéa de la p. 161 qui suit.

[19]) En marge: argument de la trompette et trompette marine.

Cette remarque s'applique sans doute aux tons naturels de la trompette souvent mentionnés par Mersenne, p.e. dans les „Traitez des Consonances" etc. Livre I „Des Consonances", p. 3 et p. 87. Il n'est pas clair, si Huygens veut dire qu'on peut tirer un argument *contre* l'admission du nombre 7 dans les consonances du fait que le septième ton de la série n'est pas en harmonie avec le ton fondamental de la trompette, ou bien s'il veut dire au contraire que l'existence de cette harmonique est un argument *en faveur* de sa thèse.

La trompette marine est un instrument à une corde pouvant imiter les tons de la trompette. Mersenne en parle dans son „Traité des Instrumens" faisant également partie de l'„Harmonie Universelle" (Livre IV „Traité des instrumens à chordes." Prop. XIV, p. 217 et suiv.).

B. AUTRES CONSIDÉRATIONS SUR LA GAMME DIATONIQUE, PRODUIT D'INTERVALLES CONSONANTS. LES DEMITONS CHROMATIQUES MODERNES.

Parmy [1]) toutes les nations on chante par les mesmes intervalles de tons et demitons (je parle premierement des tons diatoniques) et entremeslez de la mesme facon. Ce qui n'arrive pas par hazard ni par une raison qui soit difficile a trouver. Voicy comme je l'explique. Le plaisir du chant consiste principalement dans la perception des consonances. Je dis du chant qui se fait a une seule voix ou par les simples sons d'un instrument, aussi bien que de celuy qui est composè de plusieurs voix ou sons qu'on entend à la fois. Car bien qu'au chant d'une voix les sons se suivent et n'arrivent pas a l'oreille en mesme temps, le souvenir supplee a cela, en sorte qu'il est egalement plaisant d'entendre deux tons qui sont la quinte, par ex. chantez l'un apres l'autre que si on les appercevoit tous deux ensemble. Et cette representation du souvenir ne va pas seulement jusqu'au ton penultieme, mais jusqu'aux 2 trois ou 4 precedents et encore plus avant si quelqu'un de ces tons ont estè souvent repetez et par la fortement imprimez dans la memoire. C'est donc par cette raison qu'en montant a la quinte, comme de V à S, on passe par les tons M et F. Car M est consonante à V, estant VM la tierce majeure de 5 a 4. Et de mesme le F est consonant a V, estant VF la quarte de 4 a 3. Mais le M est encore plus agreable que le F dans ce passage, a cause que le M consone au S ou l'on a dessein d'aller, et que pour cela on a desia dans l'imagination. Car la representation au fait des consonances a lieu non seulement pour le passè, mais aussi en quelque façon pour l'avenir.

De la il vient qu'on passe aussi de V en R pour premier intervalle, quand on va a la quinte en S ou seulement a la quarte en F, parce que RF est une consonance sçavoir la 3e mineure de 6 a 5. Car l'on auroit repugnance si au lieu de chanter VRMF, on vouloit substituer un autre ton au lieu de R, qui ne consonast ni a F ni a aucun des autres tons. Je dis a pas un des autres, parce que on pourroit luy substituer $V^{\sharp}$, et chanter $VV^{\sharp}$ MF, parce que $V^{\sharp}$ avec M fait la 3^{e} min. Mais l'on ne va pas a ce ton chromatique tant a cause de la petitesse de l'intervalle $VV^{\sharp}$ que parce que le $V^{\sharp}$ ne consonne pas a beaucoup pres avec tant des tons suivants que le R. car cettuicy fait la 4 contre S, la 5te contre L, et la 6 contre C. Mais $V^{\sharp}$ seulement la 6 contre L.

Il est aisè a demonstrer par de raisons pareilles a celles que je viens de dire pourquoy

[1]) Portefeuille „Musica" f. 62 et 63.

on paſſe au L depuis le S, puiſqu'il fait conſonance contre F contre M contre R et contre V. Apres le L on paſſe a C ou a C♭ dont le premier auſſi bien que l'autre a 3 conſonantes [2]) parmi les tons precedents; car CS eſt la 3ᵉ maj. CM la quinte, CR la 6 maj. Mais C♭S eſt la 3ᵉ min. C♭F la 4ᵉ. C♭R la 6 mineure. Or les 3 premieres conſonances du C ſont meilleures que les 3 dernieres du C♭. C'eſt pourquoy l'on paſſe pluſtoſt par le C. Outre qu'en ce faiſant, il y a deux quartes de ſuite dans l'octave et qui ſont diviſees ſemblablement en 2 tons et un demyton. ſcavoir VRMF et SLCV. Ce ſont icy les tons diatoniques en y comptant auſſi le C♭ comme faiſoient auſſi les anciens, comme nous dirons ailleurs [3]).

Nos demitons adjoutez qu'on peut appeller chromatiques [4]) ſont fondez de meſme par les conſonances. Car VM♭ fait la 3ᵉ min. M♭S la 3ᵉ maj. M♭C♭ la quinte. M V^2 la 6 maj. de meſme RF♯ la 3 maj. F♯L la 3 min. F♯C la 4ᵉ. F♯R la 6 min. Puis MS♯ la 3 maj. S♯C la 3 min. S♯M la 6 min.

---

2) En marge: 3 tons rarement de ſuite, et comment.
il n'y peut avoir d'autre chant.
demitons conſonans.
eſtrange invention que le chant du genre enharmonique et du chromatique ancien. parlerons ailleurs. Deuxième alinéa de la p. 97 qui suit? Voyez aussi le deuxième alinéa de la p. 102.

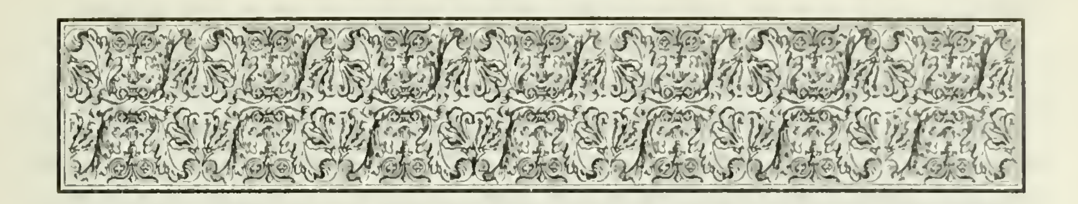
3) En marge: qu'il n'y a que deux modes [comparez la Pièce *B*. „Les divers modes" à la p. 69 qui suit]. ou le 3ᵉ *m*, *l*, *m* pour les plaintes graves. *m*, *c*, *m* ne pouvoit pas eſtre avec *f*, mais bien avec *f*: [?]. mais alors le meſme que *r*, *f*, *l*, *r*. ſinon quelques faux intervalles. plagaux que c'eſt [voyez sur les tons plagaux la Pièce *B*. „Les divers modes" déjà citée].

4) Voyez sur la différence entre les anciens et les modernes sous ce rapport le deuxième alinéa de la p. 102 qui suit.

II.

LA DIVISION DU MONOCHORDE.

6



Avertiſſement.

Nous publions dans les pages qui ſuivent les recherches de Huygens ſur la théorie mathématique du tempérament muſical, en les faiſant précéder (Pièce *A*) par une copie, d'une main inconnue, d'un écrit (manuſcrit?) de l'un des frères Hemony où Huygens a inſcrit, outre la date — 16 juin 1661 —, le nom de la ville d'Antwerpen (Anvers). A la date indiquée Huygens ne ſe trouvait pas dans cette ville. Il s'y était trouvé de paſſage le 16 octobre 1660 [1]) et avait ſaiſi cette occaſion pour viſiter le carillonneur et l'entendre jouer du célèbre carillon — ou plutôt d'un des célèbres carillons — nouvellement inſtallés par les frères Hemony [2]). Ceci peut avoir été une des cauſes qui le déterminèrent, après être rentré à la Haye en 1661 à la fin du mois de mai, à s'occuper lui-même de la théorie de la muſique. En effet, dans la copie ſuſdite, l'auteur de l'écrit donne le conſeil de commencer par partager la ligne muſicale en 10000 parties [3]); or, dans la „Diviſio Monochordi" (notre Pièce *B*. Div. Mon. I)

---

[1]) D'après le Journal de Voyage à Paris et à Londres publié par H. L. Brugmans dans „Le séjour de Christian Huygens à Paris etc." 1935.

[2]) Voyez la note 6 de la p. 49 qui suit, où nous renvoyons le lecteur aussi au futur T. XXII.

[3]) Ce que Merſenne, à l'influence des œuvres duquel on pourrait ſonger auſſi, ne fait point. Dans l'„Harmonie Univerſelle" de 1636 Merſenne traite longuement du monochorde. Il écrit p. e. („Traité des Inſtrumens à Chordes" p. 15): „Il faut donc conclure auec Ptolomée que le Monochorde eſt l'inſtrument le plus propre & le plus exact pour regler les ſons & l'harmonie".

datée du 8 juillet 1661, Huygens divife en effet le monochorde en ce nombre de parties. Il eft vrai que Stevin dans fon manufcrit „Vande Spiegeling der Singkonft" divife également le monochorde en 10000 parties. La Pièce *C*. Divifio Monochordi II empruntée au petit Manufcrit 13 où Huygens avait l'habitude de noter fes principales découvertes (jufqu'à ± 1662) eft fans doute à peu près de la même époque [4]). Son intérêt pour les cloches eft attefté en outre par le fait qu'en août 1662 il alla vifiter Hemony (il parle au fingulier; s'agit-il de Pierre Hemony le cadet?) à Amfterdam et eut avec lui une „longue conference" fur les „tons de la mufique, ou il eft tres fcavant".

D'autre part nous attirons l'attention fur la note 11 de la p. 46. Ne connaiffant ni Mr. de Montalent ni fon manufcrit, nous ne pouvons toutefois former aucune conjecture fur la grandeur de fon influence fur Huygens. Comme la note nommée le fait voir, cette influence fe rapporte probablement, non pas aux Pièces ici confidérées, mais à la divifion de l'octave en 31 parties, c.à.d. au „Cycle Harmonique".

Nous ajoutons encore à ces Pièces un Appendice qui porte la date 1676.

On connaît le grand intérêt pour le tempérament mufical dont avaient fait preuve depuis longtemps les conftructeurs et accordeurs d'inftruments à touches ainfi que les muficologues. Par l'introduction de la tierce majeure harmonique ou naturelle (5 : 4) au lieu de la tierce majeure pythagoricienne (81 : 64) et du principe harmonique de l'accord de tonique, l'impoffibilité de produire exactement tous les intervalles dans les dits inftruments était devenue encore plus manifefte qu'auparavant; il fallait donc tâcher de trouver un compromis capable d'écarter au moins les plus rudes diffonances.

Le nombre des fyftèmes inventés à cet effet, eft confidérable. Une place importante

---

[4]) Il existe en outre une page presque pareille à la Pièce „Divisio Monochordi II": c'est la f. 3 v du portef. „Musica", publiée (en majeure partie) à la p. 200 du „Tijdschrift der Vereeniging voor Noord-Nederlands*) Muziekgeschiedenis", Deel III, Amsterdam, F. Muller, 1891 dans l'article „Het toonstelsel van Christiaan Huygens" de J. P. N. Land. L'auteur, ne connaissant que les deux feuilles du portefeuille qui lui avaient été communiquées par D. Bierens de Haan, déclare ignorer ce que signifient x et a et les formules qui contiennent ces lettres. Voyez sur la f. 3v la p. 58 qui suit.

*) Cette société s'appelle actuellement: „Vereeniging voor Nederlandsche Muziekgeschiedenis".

revient à celui de 1511 de l'organiſte allemand Arnolt Schlick [5]) qu'on déſigne par le nom de tempérament du ton moyen. Conſidérant la ſérie des quintes

c g d a e

dont le dernier ton forme (à des différences d'octave près) un intervalle 81 : 80, dit comma ſyntonique [6]), avec la tierce majeure naturelle de c, Schlick eut l'idée de diminuer chacune de ces quintes d'un quart du dit intervalle. Dans la gamme conſtruite ſuivant ce principe la tierce majeure, et par conſéquent auſſi la ſixte mineure, était naturelle, tandis que, ſimultanément avec la quinte, la tierce mineure était diminuée d'un quart de comma. Il n'y a dans cette gamme qu'un ſeul ton entier, préciſément moyen entre le ton majeur (9 : 8) et le ton mineur (10 : 9) de la gamme naturelle; c'eſt de lui, le „mezzo tuono participato", que provient le nom de tempérament du ton moyen (mean tone temperament).

Ce ſyſtème eſt amplement traité par les théoriciens Franceſco Salinas [7]) et Gioſeffo Zarlino [8]) qui paraiſſent ne pas connaître Schlick: voyez la note 6 de la p. 18 qui précède, où Huygens dit qu'ils s'en diſputent l'invention. D'ailleurs ces deux muſicologues diſcutent d'autres ſyſtèmes auſſi, les comparant avec lui [9]).

---

[5]) Arnolt Schlick, né en Bohème, fut „Pfalzgrauischer Organist" c.à.d. organiste à la cour de Heidelberg, au commencement du 16ième siècle; il mourut après 1517. En 1511 parut son „Spiegel der Orgelmacher und Organisten etc." (publié de nouveau en 1869 par R. Eitner comme „Beilage der 5[te] und 6[te] Monatshefte für Musikgeschichte" I Jahrgang, Berlin). Nous ne voulons pas dire — voyez la suite du texte et la note 9 — que cet ouvrage de Schlick ait été fort connu en son temps ou au dix-septième siècle.

[6]) Comparez la l. 16 de la p. 6 qui précède.

[7]) Voyez sur Salinas la note 3 de la p. 423 du T. IX. Le titre complet de son livre de 1577 est „De Musica libri septem, in quibus eius doctrinæ veritas tam quæ ad Harmoniam, quàm quæ ad Rhythmum pertinet, iuxta sensus ac rationis iudicium ostenditur, et demonstratur", Salmanticæ MDLXXVII.

[8]) Voyez sur Gioseffo Zarlino, lui aussi théoricien du seizième siècle, la note 2 de la p. 169 du T. X.

Il écrivit trois livres sur la théorie de la musique qui furent réunis en 1589 en 3 volumes *) intitulés „Tutte l'opere del R. M. Gioseffo Zarlino da Chioggia". Nous avons pu consulter deux de ses ouvrages, savoir 1. „Istitutioni Harmoniche del Rev. Messere Gioseffo Zarlino da Chioggia, Maestro di Capella della Serenissima Signoria di Venetia: di nuovo in molti luoghi migliorate, & di molti belli secreti nelle cose della Prattica ampliata. Nelle quali; oltra le materie appartenenti alla Musica; si trouano dichiarati molti luoghi di Poeti, Historici, & di Filosofi; si come nel leggerle si potrà chiaramente vedere". In Venetia. Appresso Francesco dei Franceschi Senese. 1573. — C'est la troisième édition: l'ouvrage avait déjà vu le jour en 1558 et 1562. 2. „Dimostrazioni Harmoniche del R. M. Gioseffo Zarlino da Chioggia. Maestro di Ca-

---

*) et un traité sur la patience et quelques autres traités formant un 4ième volume.

Le traité de Huygens intitulé „Diviſio Monochordi" (notre Pièce II *B*) contient une théorie mathématique de ce ſyſtème. La méthode appliquée conſiſte à partir d'une corde de longueur *a* et à calculer ſucceſſivement les longueurs des cordes donnant les tons de la gamme chromatique correſpondante, d'après le principe de la conſtruction pythagoricienne, c.à.d. par formation de quintes et d'octaves, complétées par des tierces déterminées elles auſſi à l'aide de quintes et d'octaves; or, la longueur *x* de la corde donnant la quinte avec le ton fondamental eſt d'abord conſidérée comme inconnue: ſa valeur eſt déterminée, et avec elle celle de la quinte tempérée, par les conditions impoſées à certains intervalles.

Dans cette Pièce *B*, la condition unique eſt la ſuivante: les quintes ſont rendues inférieures à leur valeur naturelle (3 : 2) d'autant que les ſixtes majeures ſont rendues ſupérieures à la leur (5 : 3). Cette condition paraît conduire à des tierces majeures naturelles ainſi qu'aux autres intervalles du tempérament du ton moyen.

---

pella della Illustris. Signoria di Venetia. Nelle quali realmente si trattano le cose della Musica: e si risolvono molti dubij d'importanza. Opera molto necessaria à tutti quelli, che desiderano di far buon profitto in questa nobile Scienza". In Venetia. Per Francesco dei Franceschi Senesc. 1571. Une deuxième édition parut en 1573. Voyez sur le troisième ouvrage sur la musique (de 1588) la note 12 de la p. 65 qui suit.

Nous connaissons d'ailleurs aussi l'édition mentionnée de 1589 (Utrecht, Muziekhistorisch Instituut) que Huygens possédait (voir la p. 116 qui suit); c'est elle que nous citerons dans la suite.

Zarlino parle à plusieurs reprises des différents tempéraments, p.e. Istit. Harm. Parte II caput 42 seq. Dimostraz. Harm. Ragionamento IV, Proposta I et Ragionamento V, Proposta I.

[9]) Le catalogue de la vente des livres de Constantyn Huygens père ne contient le titre d'aucune publication de Schlick, pas plus que celui de la vente des livres de Christiaan.

[10]) „Istitutioni Harmoniche", Parte II, caput 42. „Quel che si dee osservare nel temperare overo accordare gli Instrumenti arteficiali moderni".

Salinas traite du système considéré dans le cap. 18 du Lib. III de „De Musica".

[11]) La feuille 54 v porte les mots (nous avons déjà parlé de ce sujet à la page 44): pour la diviſion du monochorde ſelon le manuſcript que m'a preſtè M.r de Montalent l'organiſte. La double feuille 53—54 contient des calculs sur toutes ses pages. Les p. 54 r et 54 v ne contiennent en outre que les paroles citées respectivement dans le texte et dans la présente note. La p. 53 v porte en outre les énoncés: VS ex 31 proportione major et melior eſt 5tâ ex ſyſtemate temperato $\frac{1}{110}$ commatis ſchærs [c.à.d. à peine]. VM tertia major excedit temperatum $\frac{1}{27}$ commatis ſchærs. tertia minor deficit a temperato $\frac{1}{37}$ commatis. Tonus a tono temperato differt $\frac{1}{54}$ commatis. comma eſt minus quam $\frac{1}{9}$ toni temperati. l'octave contient $55\frac{4}{5}$ comma ſchærs. Comparez la note 5 de la p. 6 qui précède.

Dans la même Pièce un deuxième ſyſtème eſt obtenu en poſtulant que les tierces majeure et mineure, ainſi que les ſixtes majeure et mineure, ſeront également diſtantes les unes et les autres de leurs valeurs naturelles. Il eſt connu ſous le nom de tempérament de Zarlino [10]).

Dans la Pièce indiquée ici par la lettre *C* Huygens déduit de nouveau le tempérament du ton moyen, en poſant cette fois directement la condition de la juſteſſe de la tierce majeure.

À la p. 54r du portefeuille „Muſica" Huygens parle de „mon monochorde de 120 demipouces ou 5 pieds" [11]).

A [1]). COPIE D'UNE PARTIE D'UN ÉCRIT D'UN DES DEUX FRÈRES HEMONY INTITULÉ „VANDEN BEIJAERT" (C.À.D. DU CARILLON).

1661.

Copie van Hemonij Lorrainſis vañ [2]) Beijaert. Antwerpen. 16. Jun. 1661 [3]).

Regel van het Accord, hoe het ſelue door proportie van getal geuonde werde.

Eenheid neemt een getal van ontrent 10000. deelen in een linie verdeelt. ende genomen het beginſel zij in T́. de octaue van wederumb $\overset{2}{T}$. moet nootſakel[yck] hebben 5000. derſelue gedeelten.

Nu de Tertia maj.r vañ voorſz. T́ is É moet hebben 8000. derſelue gedeelten: Zijnde deſe 3. voorſz. ſpecies tegens malkander ſuyuer.

Nu tuſſchen T́ eñ É moet geſocht zijn D́. moet derhaluen het getal van T́. eñ [4]) É. met malkander gemultipliceert werden, eñ radix quadrat daervan is de begeerde D́.

Van de gem.te [5]) D́. neemtmen de octaue, dewelcke oock de halue moet zijn, als boven ſtaet van T́. eñ $\overset{2}{T}$.

Voort neempt oock ǵ. tuſſchen T́ eñ $\overset{2}{D}$. oock medio proportionaliter, eñ vaert daermede met alle quinten, tertien eñ octauen, voort volgens geſeide proportie [6]).

---

[1]) Portef. „Musica", f. 50.
[2]) C.à.d. vanden.
[3]) Cette première ligne seule est écrite de la main de Huygens.
[4]) C.à.d. ende.
[5]) C.à.d. gemelte.
[6]) Traduction: Règle de l'accord, comment celui-ci est trouvé par la proportion numérique.

Prenez pour unité un nombre d'environ 10000 parties distribuées sur une ligne. Et soit par hypothèse l'origine prise en T́. L'octave correspondante $\overset{2}{T}$ doit nécessairement avoir 5000 des mêmes parties.

Ensuite la tierce majeure de la prédite T́ est É qui doit avoir 8000 des mêmes parties. Ces trois tons étant purs l'un par rapport à l'autre.

Ensuite D́ doit être cherchée entre T́ et É. A cet effet il faut multiplier l'un par l'autre les

B[1]). DIVISIO MONOCHORDI I.

1661.

V	a	L	$\frac{2x^3}{aa}$
V♯	$\frac{16x^7}{a^6}$	♭	$\frac{a^3}{4xx}$
R	$\frac{2xx}{a}$	C	$\frac{4x^5}{a^4}$
M♭	$\frac{a^4}{4x^3}$	V²	$\frac{1}{2}a$
M	$\frac{4x^4}{a^3}$	V²♯	$\frac{8x^7}{a^6}$
F	$\frac{aa}{2x}$	R²	$\frac{xx}{a}$
F♯	$\frac{8x^6}{a^5}$	R²♯	$\frac{a^4}{8x^3}$
S	x	M²	$\frac{2x^4}{a^3}$
S♯	$\frac{16x^8}{a^7}$	F²	$\frac{aa}{4x}$
$\frac{a^5}{8x^4}$ [3])			

8 Jul. 1661.

§ 1. Sit tota chorda VP partium a [2]). SP putetur fonare diapente ad VP, et effe SP partium x. huic alia fimilis diapente putetur SR². Ergo ut a ad x ita x ad $\frac{xx}{a}$ ∞ R² hoc eſt R²P. Ergo R diapafon R² erit $\frac{2xx}{a}$. huic rurfus fiat fimilis diapente RL, ergo ut a ad x ita $\frac{2xx}{a}$ ad $\frac{2x^3}{aa}$ ∞ L. huic rurfus fimilis diapente fit LM². Ergo ut a ad x, ita $\frac{2x^3}{aa}$ ad $\frac{2x^4}{a^3}$ ∞ M². Unde M diapafon M² erit $\frac{4x^4}{a^3}$. huic rurfus diapente fit MC. Ergo ut a ad x ita $\frac{4x^4}{a^3}$ ad $\frac{4x^5}{a^4}$ ∞ C. Iam quia SV² eſt diateſſaron fumatur ei fimilis diateſſaron VF. Nempe ut x ad $\frac{1}{2}a$ ita fit a ad $\frac{aa}{2x}$ ∞ F. ab F ad ♭ fumatur fimilis item diateſſaron, fit ♭ ∞ $\frac{a^3}{4xx}$. Porro tertiæ majori VM fumatur fimilis tertia

---

nombres de Ť et de É, la Ď demandée en est la racine carrée.

De cette Ď on prend l'octave qui doit de nouveau être la moitié, comme il est écrit ci-dessus à propos de Ť et $\overset{2}{\text{Ť}}$.

Prenez ensuite ǵ entre Ť et $\overset{2}{\text{Ď}}$, également moyenne proportionnelle, et continuez l'opération pour toutes les quintes, tierces, et octaves d'après la proportion susdite.

Le lecteur hollandais peut consulter sur les cloches des frères Hemony le livre de 1909 de A. Vas Nunes „Experimenteel onderzoek van klokken van F. Hemony" (Kramer, Amsterdam).

Dans le Journal de Voyage, cité dans la note 1 de la p. 43 qui précède, Huygens écrit à la date du 16 octobre 1660: Hoorde op de klocken ſpelen.... Den Bayer Sr. Cramers beſocht, etc. Nous parlerons plus amplement, savoir en publiant le Journal dans le T. XXII, des carillons d'Anvers et de cette visite de Huygens au carillonneur. M. Gyselynck, secrétaire de la ville d'Anvers, nous écrit que le véritable nom n'est pas Cramers, mais Crama.

R $F^{\sharp}$. fit $F^{\sharp} \infty \frac{8x^6}{a^5}$. item similis istis M$S^{\sharp}$ fit $S^{\sharp} \frac{16x^8}{a^7}$. Item L$V^{2\sharp}$. fit $V^{2\sharp} \infty \frac{8x^7}{a^6}$. unde diapason ejus nempe $V^{\sharp} \infty \frac{16x^7}{a^6}$. Rursus ab R^2 sumatur tertia major deorsum $R^{2\flat}$, fit $\flat \infty \frac{a^3}{4xx}$. Similiter tertia major S$M^{\flat}$; fit $M^{\flat} \infty \frac{a^4}{4x^3}$. atque ita omnes toni ac semitoni reperti sunt [4]).

---

[1]) Portefeuille „Musica", f. 7—8. Huygens intitule cette Pièce „Divisio Monochordi".

[2]) Partant d'une corde de longueur a Huygens calcule les longueurs des cordes dont les tons forment avec le ton fondamental les intervalles du système pythagoricien. Il pose x pour la longueur de la corde correspondant à la quinte du ton fondamental, de sorte que le rapport $\frac{x}{a}$ de l'intervalle fondamental de la construction pythagoricienne reste momentanément indéterminé.

Soit en notations modernes V (c) le ton de la corde fondamentale. Comme nous l'avons dit, Huygens prend pour le ton S (g) une corde de longueur x. Pour R^2 ($\bar{d}$) il en déduit $\frac{x^2}{a}$ en montant d'une quinte (diapente), et pour R (d) $2\frac{x^2}{a}$ en descendant ensuite d'une octave (diapason). De la même manière L (a) et M^2 (e) se dérivent de ce dernier ton en montant chaque fois d'une quinte, ensuite M (e) en descendant d'une octave. La quinte de M donne C (b). Puisque l'intervalle SV^2 (g—$\bar{c}$) est une quarte, le rapport des longueurs des cordes correspondantes est apparemment $\frac{a}{2x}$. Ensuite F (f) se tire de V (c); en montant de nouveau d'une quarte on trouve $\flat$ (bes). L'intervalle VM (c—e) est une tierce majeure pythagoricienne, à laquelle correspond le rapport des longueurs $4\left(\frac{x}{a}\right)^4$. Le même intervalle sépare R (d) de $F^{\sharp}$ (fis), M (e) de $S^{\sharp}$ (gis), L (a) de $V^{2\sharp}$ (cis), d'où suit $V^{\sharp}$ (cis). $\flat$ (bes) est calculé une deuxième fois en descendant d'une tierce majeure à partir de R^2 ($\bar{d}$). M (es) provient de S (g) de la même manière.

Tous les tons du système ont donc été déduits du ton fondamental par des sauts de quintes et de tierces avec réductions d'octaves; la relation de chacun d'eux avec la tonique est donnée dans le tableau suivant, où T indique un saut de tierce, Q un saut de quinte et O un saut d'octave, chaque symbole placé dans le numérateur désignant une ascension, dans le dénominateur, une descente.

V	$V^{\sharp}$	R	$R^{\sharp}$($M^{\flat}$)	M	F	$F^{\sharp}$	S	$S^{\sharp}$	L
	$\frac{3QT}{2O}$	$\frac{2Q}{O}$	$\frac{Q}{T}$	$\frac{4Q}{2O} = T$	$\frac{O}{Q}$	$\frac{2QT}{O}$	Q	2T	$\frac{3Q}{O}$

$C^{\flat}$	C	V^2	$V^{2\sharp}$	R^2	$R^{2\sharp}$($M^{2\flat}$)	M^2	F^2
$\frac{2O}{2Q} = \frac{2Q}{T}$	TQ	O	$\frac{3QT}{O}$	2Q	$\frac{QO}{T}$	$\frac{4Q}{O}$	$\frac{2O}{Q}$

Erunt autem ex conſtructione diapente ſimiles VS, SR^2, RL, LM^2, MC. ſed et ſimilis illis $\overset{\sharp}{V}\overset{\sharp}{S}$. item $\overset{\flat}{M}\overset{\flat}{C}$ [5]), $C\overset{\sharp}{F}{}^2$, item $\flat F^2$. Item FV^2, $\overset{\sharp}{F}\overset{\sharp}{V}{}^2$. omnes enim uti a ad x. ſunt ergo 11; quare diſſimilis 1, $\overset{\sharp}{S}\overset{\flat}{M}$ [6]).

Diateſſaron ſimiles ſunt ex conſtructione SV^2, VF, $\overset{\flat}{F}$; ſiunt autem ſimiles et iſtæ $\overset{\sharp}{V}\overset{\sharp}{F}$, RS, ML, $\overset{\sharp}{F}C$, $\overset{\sharp}{S}\overset{\sharp}{V}{}^2$, LR^2, $\overset{\flat}{C}\overset{\flat}{M}{}^2$, CM. omnes enim ut x ad $\frac{1}{2}a$, ſive $2x$ ad a. Sunt ergo 11; et diſſimilis 1 [7]). Tertiæ majores ſimiles ex conſtructione VM, $R\overset{\sharp}{F}$, $M\overset{\sharp}{S}$, $L\overset{\sharp}{V}{}^2$, $\flat R^2$, $\overset{\sharp}{R}S$ [8]). ſiunt autem et iſtæ FL, SC. omnes enim ut a^4 ad $4x^4$. Sunt ergo 8, et diſſimiles 4. [9]).

Tertiæ minores ſimiles ſiunt $V\overset{\sharp}{R}$, $\overset{\sharp}{V}M$, RF, MS, $\overset{\sharp}{F}L$, $\overset{\flat}{S}$, $\overset{\sharp}{S}C$, LV^2, CR^2. Sunt ergo 9 et diſſimiles 3 [10]).

Sextæ majores ſimiles ſunt VL, RC, $\overset{\sharp}{R}V^2$ [11]), $M\overset{\sharp}{V}{}^2$, FR^2, SM^2, $L\overset{\sharp}{F}{}^2$, $\flat S^2$, $C\overset{\sharp}{S}{}^2$. Nempe ſunt complementa tertiarum minorum. Ergo 9 ſimiles, et 3 diſſimiles [12]).

Sextæ minores ſimiles ſunt $\overset{\sharp}{V}L$, $R\flat$, MV^2, $\overset{\sharp}{F}R^2$, $S\overset{\sharp}{R}{}^2$, $\overset{\sharp}{S}M^2$, LF^2, CS^2, nempe 8, complementa tertiarum majorum. Reliquæ diſſimiles 4 [13]).

§ 2. Horum omnium intervallorum indeterminata eſt hactenus magnitudo, nam

---

3) Ici as est déterminé comme le ton formant une tierce avec le ton plus haut $\bar{c}$.

4) Nous remarquons que Huygens, pour obtenir une gamme chromatique pythagoricienne juste de 12 intervalles, emprunte les tons destinés à compléter la gamme diatonique en partie (savoir cis, fis et gis) à la partie ascendante, en partie (savoir es et bes) à la partie descendante de la série des quintes. En poursuivant la marche ascensionnelle, il aurait trouvé $\frac{32x^9}{a^8}$ pour dis et $\frac{32x^{10}}{a^9}$ pour ais. Dans l'octave qui commence par V^2, $\overset{\flat}{M}{}^2$ a été remplacé par $\overset{\sharp}{R}$ (lisez $\overset{\sharp}{R}{}^2$).

5) Appelé plus haut $\flat$ [bes].

6) Il faut entendre $\overset{\sharp}{S}\overset{\flat}{M}{}^2$; permutation enharmonique de $\overline{es}$ et de $\overline{\overline{dis}}$.

7) Savoir $\overset{\flat}{M}\overset{\sharp}{S}$, de nouveau en vertu d'une substitution enharmonique.

8) Ou plutôt $\overset{\flat}{M}S$.

9) Savoir $\overset{\sharp}{V}F$, $\overset{\sharp}{F}\flat$, $\overset{\sharp}{S}V^2$, $C\overset{\flat}{M}{}^2$ (chez Huygens $C\overset{\sharp}{R}{}^2$).

10) Savoir $\overset{\flat}{M}\overset{\sharp}{F}$, $F\overset{\sharp}{S}$, $\flat\overset{\sharp}{V}{}^2$.

11) Lisez $\overset{\flat}{M}V^2$.

12) Savoir $\overset{\sharp}{V}\flat$, $\overset{\sharp}{F}\overset{\flat}{M}{}^2$, $\overset{\sharp}{S}F^2$.

13) Savoir $V\overset{\sharp}{S}$, $\overset{\flat}{M}C$, $F\overset{\sharp}{V}{}^2$ et $\flat\overset{\sharp}{F}{}^2$.

qualiscunque adſumatur x, ſimilitudo dicta ubique locum habebit. (En marge: omnes toni æquales VR; RM; FS; SL; LC. item $MF^{\sharp}$; $F^{\sharp}S^{\sharp}$; $CV^{\sharp}$). Videamus ergo quanta convenientiſſime poſſit ſtatui x. Sane ſi ponatur $x \infty \frac{2}{3}a$, conſtat quintas omnes ac proinde et quartas perfectas fore. Verum tunc ſit VL $\infty \frac{2x^3}{aa} \infty \frac{16}{27}a$. Sed ut ſit perfecta ſexta major VL, deberet eſſe L $\infty \frac{3}{5}a$, quod majus eſt quam $\frac{16}{27}a$. Ergo ratio LP ad VP minor eſt vera ad efficiendam ſextam majorem, quamobrem ſexta hæc major erit juſto. atque ita omnes reliquæ ſextæ majores ſupra enumeratæ, quia omnes inter ſe ſunt ſimiles. Hinc vero et tertiæ minores omnes ſupradictæ, quæ ſunt complementa ſextarum majorum erunt minores juſto [14]). Differentia autem erit $\frac{1}{80}$ [15]) id quod comma vocant, nam $\frac{16}{27}$ eſt ad $\frac{3}{5}$ ut 80 ad 81. quæ valde eſt notabilis, ita ut facile imperfectio ejuſmodi tertiarum ac ſextarum aure percipiatur. Eſt enim comma $\frac{1}{9}$ toni proxime [16]).

Sed et tertia major VM ex illa poſitione, nempe ſi x ſit $\infty \frac{2}{3}a$, major vera contingit, eſt enim M $\infty \frac{4x^4}{a^3} \infty \frac{64}{81}a$, cum debeat eſſe $\frac{4}{5}a$ ad faciendam conſonantiam tertiæ majoris. Eſtque $\frac{64}{81}$ ad $\frac{4}{5}$ ut 80 ad 81. quæ rurſus notabilis eſt commatis differentia, qua etiam ſextæ minores à veris deficient, quippe tertiarum majorum complementa. Præſtat igitur quintam VS paulo minorem vero ſumere, hoc eſt x paulo majorem quam $\frac{2}{3}a$. hinc enim video ſextam majorem VL et omnes ſimiles minorem factum iri quam prius, creſcente nempe L quæ erat $\frac{2x^3}{aa}$. videoque ſimul tertiam majorem VM decreſcere ſicut requiritur, nam etiam $\frac{4x^4}{a^3}$ major efficitur dum major ponitur x. quanto igitur majorem ſumimus x quam $\frac{2}{3}a$? Optimum videtur ut ita comparetur ſi fieri poſſit, ut quintæ tanto minores evadant perfectis quanto ſextæ majores veras excedent.

---

[14]) Il appert donc ici qu'on ne peut faire accorder la construction de la gamme par sauts de quintes et réductions d'octaves avec les rapports des intervalles consonants suivant le tempérament harmonique naturel.

[15]) C'est à dire pour obtenir la vraie sixte majeure, la corde LP devrait être allongée de $\frac{1}{80}$ (ou bien la corde VP raccourcie de $\frac{1}{81}$).

[16]) Le ton entier VR (c—d) acquiert la valeur 8:9. Pour monter d'un ton entier, il faut donc diminuer la longueur de la corde de $\frac{1}{9}$, c.à.d. 9 fois d'avantage que pour passer de la vraie sixte majeure à celle figurant dans la construction pythagoricienne. C'est ce qu'on peut exprimer en disant qu'un comma (savoir un comma syntonique) est environ $\frac{1}{9}$ d'un ton. Il s'agit en somme de l'approximation $\left(\frac{80}{81}\right)^9 = \left(1 - \frac{1}{81}\right)^9 \approx 1 - \frac{1}{9}$.

	SP	quinta perf.	fexta ma. perf.	L
§ 3. Sit igitur	x	ad $\frac{2}{3}a$	ita $\frac{3}{5}a$	ad $\frac{2x^3}{aa}$

$$\frac{2x^4}{aa} \infty \tfrac{6}{15}aa$$

erit hinc MP quæ erat $\frac{4x^4}{a^3} \infty \frac{4}{5}a$ hoc eft tertia major perfecta.

$$x^4 \infty \tfrac{1}{5}a^4$$

$$x \infty \sqrt{\sqrt{\tfrac{1}{5}a^4}}$$

Unde fi ponatur $a \infty$ 100000, invenietur $x \infty 66874\frac{1}{35}$
at fi foret $x \infty \frac{2}{3}a$, hoc eft quinta VS perfecta effet $x \infty 66666\frac{2}{3}$
diff. 208

differentia ergo eft $\frac{1}{480}$ proximè totius chordæ [17]) qua x five SP debet major fumi quam $\frac{2}{3}a$. quæ differentia eft valde exigua.

Omnes igitur tertiæ majores et fextæ minores fimiles, funt perfectæ in hoc fyftemate. Quintæ vero et tertiæ minores pauxillo minores funt veris, æquali defectu [18]). nam chordæ partes quæ fonant quintas vel tertias minores contra tonum aliquem graviorem excedunt veras proximè $\frac{1}{320}$ fui parte [19]); accurate autem quartâ parte commatis. Quartæ autem, et fextæ majores tantundem veras fuperant [20]).

En marge: dico id quo S noftrum temperatum diftat ab S vero five $\frac{2}{3}a$ effe accurate $\frac{1}{4}$ commatis, nam ratio $\sqrt{\sqrt{\frac{1}{5}a^4}}$ five x ad $\frac{2}{3}a$ quadruplicata facit rationem $\frac{1}{5}a^4$ ad $\frac{16}{81}a^4$ hoc eft ut 81 ad 80, quæ eft commatis.

Notandum etiam tonos omnes iftos æquales effe VR, RM, $M^{\flat}F$, $MF^{\sharp}$, FS, $F^{\sharp}S^{\sharp}$, SL, LC, $C^{\flat}V^{2}$, $CV^{2\sharp}$. Diffimiles tantum $V^{\sharp}R^{\sharp}$, $S^{\sharp}C^{\flat}$ [21]). Semitonia majora fimilia $V^{\sharp}R$, $RM^{\flat}$, MF, $F^{\sharp}S$, $S^{\sharp}L$, $LC^{\flat}$, CV^{2}. Reliqua quinque minora etiam inter fe fimilia $VV^{\sharp}$, $M^{\flat}M$, $FF^{\sharp}$, $SS^{\sharp}$, $C^{\flat}C$.

[17]) En effet, $\frac{208}{100000} \approx \frac{1}{480}$.

[18]) La longueur de la corde devient pour la tierce mineure $\frac{5^{3/4}}{4}a = \frac{3}{2.5^{1/4}} \cdot \frac{5}{6}a$. Son intervalle avec la véritable tierce mineure est donc égal à celui de la quinte tempérée avec la quinte véritable: en effet, $\sqrt[4]{\frac{1}{5}a^4} = \frac{3}{2.5^{1/4}} \cdot \frac{2}{3}a$.

[19]) En effet, $\frac{1}{480}a = \frac{1}{320} \cdot \frac{2}{3}a$.

§ 4. Si velimus ut tertiæ minores majoresque, et sextæ majores minoresque æque multum a veris distent

tert. maj. perf. sexta major perf.

Sit $\frac{4x^4}{a^3}$ ad $\frac{4}{5}a$ sicut $\frac{3}{5}a$ ad $\frac{2x^3}{aa}$

$$\frac{8x^7}{a^5} \infty \frac{12aa}{25}$$

$$x^7 \infty \frac{3}{50} a^7$$

$$x \infty \sqrt[7]{\frac{3}{50} a^7}$$

Hinc invenitur $x \infty$ 66904, qualium a est 100000 vel accuratius $66903\frac{5}{7}$.
quinta perfecta $x \infty$ 66666

diff.ª. 238 hoc est $\frac{1}{420}$ totius chordæ, quæ facit $\frac{1}{280}$ chordæ SP. At ex priori systemate erat $\frac{1}{320}$. Ergo hic perexigua differentia est, sed tamen quintæ paulo adhuc minores. et quartæ majores.

Porro fit LP sive $\frac{2x^3}{aa} \infty$ 59893 $\frac{7}{10}$ quæ subducta a vera sextæ majoris longitudine quæ est 60000, relinquit tantum 105 [22]), hoc est $\frac{1}{1000}$ fere tantum totius chordæ, quæ facit $\frac{1}{563}$ chordæ LP. at ex priori systemate erat $\frac{1}{320}$, quantum nempe quintæ longitudo veram superabat. Ergo hic jam sextæ majores, simulque tertiæ minores meliores fiunt quam in systemate præcedenti [23]). Tertiæ autem majores et sextæ minores jam a veris recedunt tantundem præcise quantum tertiæ majores et sextæ minores [24]). fit enim MP ∞ 80142 quæ debebat esse 80000, differentia est 142, quæ etiam est $\frac{1}{563}$ chordæ MP [25]).

---

[20]) D'après l'hypothese initiale pour la sixte; pour la quarte on trouve $\frac{a^2}{2x} = a.\frac{5^{1/4}}{2} = \frac{2.5^{1/4}}{3}.\frac{3}{4}a$.

[21]) Comme plus haut, ceci résulte d'une substitution enharmonique. On trouve les mêmes intervalles que dans les cas énumérés, lorsqu'on prend $\frac{32x^9}{a^8}$ pour R♯ et qu'on remplace C (bes) par ais $\left(\frac{32x^{10}}{a^9}\right)$.

[22]) Lisez 106.

[23]) Le système trouvé dans ce § est connu sous le nom de tempérament de Zarlino; voyez l'Avertissement (p. 46).

[24]) Lisez: quantum sextæ majores et tertiæ minores.

[25]) Ceci résulte de la condition imposée aux tierces et sixtes majeures. La validité de la thèse pour

Hic igitur tertiæ majores et tertiæ minores æqualiter à veris deficiunt, nempe accurate $\frac{1}{7}$ commatis [26]), quæ differentia auribus nefcio an percipi poffit. Sextæ vero majores et minores tantundem veras fuperant. Quintæ deficiunt a veris duplo tanto nempe $\frac{2}{7}$ commatis [27]), accuratè, ac tantundem quartæ veras fuperant.

§ 5. Oftendit autem experientia melius gratiufque auribus effe prius fyftema, nec mirum cum in illo nulla confonantia tantum a vera recedat quam hìc. nam hìc jam fenfibilius fit, etfi exiguo quintarum et quartarum vitium. deinde et tertiæ majores, licet tantum $\frac{1}{7}$ commatis deficiant, minus gratum fonum edunt quam cum perfectæ funt, ut in priori illo fyftemate, frequentiffime autem occurrunt. Sed et facilius harum adjumento chordæ omnes clavicymbali vel fiftulæ organi ad fuum quæque tonum componuntur. Omnino igitur priori fyftemate uti præftat.

Modus autem quo fecundùm illud chordæ in ordinem rediguntur five accordandi ut vocant clavecymbali vel organi eft ifte [28]). Primo fiat

VM tertia major perfecta. et deinde MM², diapafon perfecta ut omnes.

Quo autem certius accipi poffit 3ª major perfecta, fiat primum diapafon VV². deinde inter has S quod fonet 5 tam perfectam ad V: et 4tam ad V². tunc inter V et S ponatur M utrique perfectè confonans, alteri per 3^am^ majorem, alteri per minorem. Poftea relicto M perfecto, parum remittatur S, ut fit

VS quinta exiguo minor vera.

SR² quinta fimilis. et R²R diapafon.

RL quinta fimilis. Si jam LM² inveniatur effe quinta prioribus fimilis recte fe habent

---

les tierces et sixtes mineures résulte de ce que la condition

$$\frac{a^4}{4x^3} : \frac{5}{6}\,a = \frac{5}{8}a : \frac{a^5}{8x^4}$$

(voyez la note 3 de la p. 51) conduit elle aussi précisément à la valeur de x dont il vient d'être question dans le texte.

[26]) On trouve pour la tierce majeure la longueur de corde $4\left(\frac{3}{50}\right)^{\frac{4}{7}} a$, c.à.d. $5\left(\frac{3}{50}\right)^{\frac{4}{7}} \cdot \frac{4}{5}a$. Lorsque l'intervalle avec la tierce majeure naturelle est septuplé, on obtient $5^7\left(\frac{3}{50}\right)^4 = \frac{81}{80}$, c. à. d. le comma syntonique.

[27]) En effet, la longueur de corde de la quinte devient

$$a\sqrt[7]{\frac{3}{50}} = \left(\frac{3}{50}\right)^{\frac{1}{7}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\,a, \text{ ou } \left[\left(\frac{3}{50}\right)^{\frac{1}{7}} \cdot \frac{3}{2}\right]^{\frac{7}{2}} = \frac{81}{80}.$$

[28]) Le Manuscrit 13 contient (f. 52) une note sur le même sujet sous le titre: Chordas Clavicymbali in ordinem redigemus hoc modo. Cette Pièce se distingue de notre texte par le remplacement de M♭ par R♯ et par quelques changements et compléments que nous indiquons dans les notes qui suivent.

hactenus omnia, ſin minus tres tantum illæ S, R², L corrigendæ ſunt, uſquedum LM² inveniatur, ut dictum eſt, quinta deficiens ſimilis. Hinc reliquæ per tertias majores perfectas deducuntur LF, SC, LV$^{2\sharp}$, MS$^{\sharp}$, RF$^{\sharp}$, R²L$^{\sharp}$; SM$^{\flat}$. Ita omnes habentur, unde reliquæ per diapaſon ſurſum ac deorſum [29]).

Si ad ſemitonos S$^{\sharp}$, V$^{\sharp}$, M$^{\flat}$ alij ſemitoni ſuperaddantur, poterit quiſque tonus diatonicus infra ac ſupra habere conſonantes ſecundum omnes conſonantias. Ponendo V²S* tertiam majorem perfectam, ut et CR²*, FV*. ſit ergo S* $\infty \frac{a^5}{8x^4}$. R²* $\infty \frac{16x^9}{a^8}$, V* $\infty \frac{a^6}{8x^5}$ [30]).

Falſæ quartæ ſive tritoni ſimiles [31]) ſunt VF$^{\sharp}$, RS$^{\sharp}$, M$^{\flat}$L, FC, SV$^{2\sharp}$C$^{\flat}$M². ſuntque paulo minores quam 7 ad 5, nempe $\frac{1}{571}$ [32]), hoc eſt minus quam $\frac{1}{7}$ commatis. ac fortaſſe et hæc conſonantia cenſenda eſt. quintæ falſæ ſive quintæ minores ſimiles ſunt V$^{\sharp}$S, M$^{\flat}$. F$^{\sharp}$V², S$^{\sharp}$R, LR$^{2\sharp}$, CF²; tantundem ſuperant rationem 10 ad 7. vocentur hæ tritoni majores [33]).

C. DIVISIO MONOCHORDI II [1]).

[1661]

Longitudo chordæ totius VP, quæ ſonat *Ut*, vocatur a. Pars SP vero, quæ ſonat *Sol*, dicitur x.

La corde eſt repréſentée par Huygens par une droite verticale. Pour trouver dans notre tableau la poſition du point P il faut doubler la longueur VV², toutes les diſtances, de V à V$^{\sharp}$, de V$^{\sharp}$ à R etc. étant ſuppoſées égales.

[29]) Manuscrit 13: nec niſi per octavos ſurſum ac deorſum procedere eſt opus.

[30]) Cet alinéa fait défaut dans le Manuscrit 13.

[31]) Dans le Manuscrit 13 seulement: Tritoni minores ſimiles.

[32]) Pour $x = a\sqrt[4]{\frac{1}{5}}$ on obtient F$^{\sharp}$ $= 8\frac{x^6}{a^5} = 8\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}}.a$. Pour $a = 100000$ ceci devient 71554, ce qui surpasse $\frac{5}{7}$. 100000 ou 71429 de 125, c.à.d. de $\frac{1}{571}$. 71429.

[33]) Dans le Manuscrit 13 la phrase „Quintæ falsæ. . . tritoni majores" à été remplacée par Horum complementa ſive tritoni majores ſimiles ſunt F$^{\sharp}$, V² : S$^{\sharp}$, R² : L, R$^{2\sharp}$: C, F² : V$^{\sharp}$, S : M, L$^{\sharp}$: quæ tantundem ſuperant rationem 10 ad 7. ideoque omnino majores ſunt tritonis minoribus cum jam ratio 10 ad 7 ſit major quam 7 ad 5. Fortaſſe autem et horum uterque conſonantijs accenſendus eſt.

V	a	a	100000
$V^{\sharp}$	$\frac{16x^7}{a^6}$	$\frac{16aa}{25x}$	95702
R	$\frac{2xx}{a}$	$\frac{2xx}{a}$	89443
$R^{\sharp}$	$\frac{a^4}{4x^3}$	$\frac{5}{4}x$	83592
M	$\frac{4x^4}{a^3}$	$\frac{4}{5}a$	80000
F	$\frac{aa}{2x}$	$\frac{aa}{2x}$	74767
$F^{\sharp}$	$\frac{8x^6}{a^5}$	$\frac{8xx}{5a}$	71554
S	x	x	66874
$S^{\sharp}$	$\frac{16x^3}{a^2}$	$\frac{16}{25}a$	64000
L	$\frac{2x^3}{aa}$	$\frac{2}{5}\frac{aa}{x}$	59814
$C^{\flat}$	$\frac{a^3}{4xx}$	$\frac{5}{4}\frac{xx}{a}$	55902
C	$\frac{4x^5}{a^4}$	$\frac{4}{5}x$	53499
V^2	$\frac{1}{2}a$	$\frac{1}{2}a$	50000
$V^{2\sharp}$	$\frac{8x^7}{a^6}$	$\frac{8}{25}\frac{aa}{x}$	47851
R^2	$\frac{xx}{a}$	$\frac{xx}{a}$	44721
$R^{2\sharp}$	$\frac{a^4}{8x^3}$	$\frac{5}{8}x$	41796
M^2	$\frac{2x^4}{a^3}$	$\frac{2}{5}a$	40000
F^2	$\frac{aa}{4x}$	$\frac{aa}{4x}$	37384

Systema indeterminatum

Demonstratur per terminos Algebraicos systematis indeterminati, Quintas similes esse V,S:S, R^2:R, L:L, M^2:M, C:$V^{\sharp}$, $S^{\sharp}$:$R^{\sharp}$, $C^{\flat}$:C, $F^{2\sharp}$:$L^{\sharp}$, F^2 : F, V^2:$F^{\sharp}$, $V^{2\sharp}$. omnes enim ut a ad x [2]). dissimilis ergo tantum una $S^{\sharp}$, $R^{2\sharp}$ [3]). Hinc et omnes quartas similes esse constat præter unam $R^{\sharp}$, $S^{\sharp}$. omnes autem similes ut $2x$ ad a. Tertiæ majores similes ac perfectæ sunt V,M:R, $F^{\sharp}$:M, $S^{\sharp}$:L, $V^{2\sharp}$:$C^{\flat}$, R^2 : $R^{\sharp}$, S: F, L: S, C: omnes enim ut a^4 ad $4x^4$. Harum complementa sunt totidem sextæ minores similes ac perfectæ. Tertiæ minores similes sunt V, $R^{\sharp}$:$V^{\sharp}$, M:R, F:M, S:$F^{\sharp}$, L:S, $C^{\flat}$:$S^{\sharp}$, C : L, V^2 : C, R^2. Quarum complementa sunt totidem sextæ majores similes.

← Proportiones longitudinum chordæ ejusdem quæ tonis singulis conveniunt [5]).

Systema idem determinatum per $\frac{4x}{a^3} \infty \frac{4}{5}a$ [4]). hoc est in quo tertiæ

[1]) La Pièce est empruntée à la p. 51 du Manuscrit 13. Elle contient une nouvelle déduction du

majores perfectæ ſunt, quintæ vero a perfectis tantundem deficiunt atque ſextæ majores excedunt, nempe $\frac{1}{4}$ commatis. Dico S noſtrum ab S perfecto ſive $\frac{2}{3}a$ diſtare $\frac{1}{4}$ commatis. Ratio enim x ſive $\sqrt{\sqrt{\frac{1}{5}a^4}}$ ad $\frac{2}{3}a$, quadruplicata facit rationem $\frac{1}{5}a^4$ ad $\frac{16}{81}a^4$, hoc eſt, rationem 81 ad 80, quæ eſt commatis. ſimiliter ratio L ſive $\frac{2}{5}\frac{aa}{x}$ hoc eſt

$$\frac{2}{5}\frac{aa}{\sqrt{\sqrt{\frac{1}{5}a^4}}}$$ ad $\frac{3}{5}a$ quadruplicata facit rationem 80 ad 81.

L'article de Land de 1891 que nous avons mentionné dans la note 4 de la p. 44 qui précède contient, nous l'avons dit, la reproduction d'une partie de la f. 3v du portefeuille „Muſica" dont le contenu diffère peu de celle de la page ici publiée du Manuscrit 13. Seulement cette f. 3v contient en plus que la page du Manuſcrit 13 les notes

V* . . .	$\frac{a^6}{8x^5}$ . . .	$\frac{5aa}{8x}$ . . .	93459	V* . . .	$\frac{a^6}{16x^5}$ . . .	$\frac{5}{16}\frac{aa}{x}$ . . .	46730
R* . . .	$\frac{32x^9}{a^8}$ . . .	$\frac{32}{25}x$ . . .	85599	R* . . .	$\frac{16x^9}{a^8}$ . . .	$\frac{16}{25}x$ . . .	42799
F* . . .	$\frac{a^7}{16x^6}$ . . .	$\frac{15xx}{16a}$ . . .	69879				
S* . . .	$\frac{a^5}{8x^4}$ . . .	$\frac{5}{8}a$ . . .	62500				

les nombres faiſant voir où ces notes doivent être intercalées dans la table publiée dans le texte. En outre la table de la f. 3v va juſqu'à V^3 . . . $\frac{1}{4}a$ . . . $\frac{1}{4}a$ . . . 25000. Comparez ce que nous diſons à la p. 56 ſur la longueur VP (c.à.d. la diſtance de V à V^3).

ſystème du ton moyen. La colonne 1 contient les longueurs des cordes suivant le tempérament pythagoricien, où la longueur de la corde de la quinte du ton fondamental est de nouveau laissée provisoirement indéterminée (systema indeterminatum). Dans la colonne 2 x est une grandeur déterminée, dont la valeur est fixée par la condition de la justesse de la tierce majeure, c.à.d. par l'équation $\frac{4x^4}{a^3} = \frac{4}{5}a$.

[2]) Cette remarque, ainsi que celles qui suivent, ne s'applique qu'à la première colonne.

[3]) Voyez l'Appendice qui suit.

[4]) La déduction suit donc une marche inverse par rapport à la Pièce I de juillet 1661 (p. 49). Là il fut postulé que les quintes seraient inférieures d'autant que les sixtes majeures seraient supérieures à leurs vraies valeurs, d'où suivait la justesse des tierces. Ici Huygens demande que l'intervalle VN (c—e) soit une tierce majeure naturelle (5 : 4): ce postulat conduit à l'équation $\frac{4x^4}{a^3} = \frac{4}{5}a$, d'où encore une fois $x = a\sqrt[4]{\frac{1}{5}}$.

Pour cette valeur de x toutes les valeurs de la colonne 1 se changent dans les valeurs correspondantes de la colonne 2.

[5]) Les nombres de la quatrième colonne se tirent des colonnes 1 ou 2 en y substituant $\frac{x}{a} = \sqrt[4]{\frac{1}{5}}$.

APPENDICE

À LA PIÈCE C (DIVISIO MONOCHORDI II)[1]).

1676.

Tonus meus U,R, minor eſt tono majore veteri qui eſt 9 ad 8, dimidio commate. Nam U eſt a, R eſt $\frac{2xx}{a}$. ſed $x \infty \sqrt{\sqrt{\tfrac{1}{5}a^4}}$.

Ergo $\frac{2xx}{a} \infty \sqrt{\tfrac{4}{5}aa} \infty$ R. Sed ratio $\frac{8}{9}a$ ad $\sqrt{\tfrac{4}{5}aa}$ duplicata, facit rationem 80 ad 81. quæ eſt commatis. Ergo ratio $\frac{8}{9}a$ ad $\sqrt{\tfrac{4}{5}aa}$ eſt $\frac{1}{2}$ comma.

Quod R ſit $\sqrt{\tfrac{4}{5}aa}$ facilius etiam hinc conſtare poterat, quod inter U ∞ a et M ∞ $\frac{4}{5}a$, medium proportionale eſt R. nam in ſyſtemate indeterminato $\frac{2xx}{a}$ eſt medium proportionale inter a et $\frac{4x^4}{a^3}$.

Semitonium majus meum M,F, ſemitonio majore veteri nempe 16 ad 15 majus eſt $\frac{1}{4}$ commatis. Eſt enim M ∞ $\frac{4}{5}a$; F ∞ $\frac{aa}{2x}$, quorum ratio eadem quæ $8x$ ad $5a$. ſed ſi eſſet ut 16 ad 15, eſſet ut $8x$ ad $\frac{15}{2}x$. Ergo oſtendendum quod $\frac{15}{2}x$ major eſt quam $5a$ quarta parte commatis, hoc eſt, rationem $\frac{15}{2}x$ ad $5a$, hoc eſt $3x$ ad $2a$, quadruplicatam efficere rationem 81 ad 80. x eſt $\infty \sqrt{\sqrt{\tfrac{1}{5}a^4}}$ ſed ratio $3\sqrt{\sqrt{\tfrac{1}{5}a^4}}$ ad $2a$ quadruplicata facit rationem $\frac{81}{5}a^4$ ad $16a^4$ ſive 81 ad 80, quod erat oſtendendum.

Diapente $S^{\sharp}R^{2\sharp}$ ſola major eſt cæteris, quas ſuperat parte toni quam conſtituit ratio 128 ad 125. Nam $S^{\sharp}$ eſt $\frac{16}{25}a$ à quo ad $R^{2\sharp}$, $\frac{5}{8}x$ non eſt diapente, ſed ad $R^{2*} \infty \frac{16}{25}x$. Eſt autem $\frac{16}{25}x$ ad $\frac{5}{8}x$ ut 128 ad 125. quod proxime facit duo commata. Ergo $S^{\sharp}R^{2\sharp}$ duobus commatis ſuperat circiter diapente quæ eſt ex temperamento. Veram vero diapente ſuperabit $\frac{7}{4}$ commatis.

Quarta diminuta quales $S^{\sharp}U$,$F^{\sharp\flat}$, eſt exacte ut 32 ad 25, hoc eſt fere ut 9 ad 7 à qua proportione deficit paulo plus quam $\frac{1}{3}$ commatis.

---

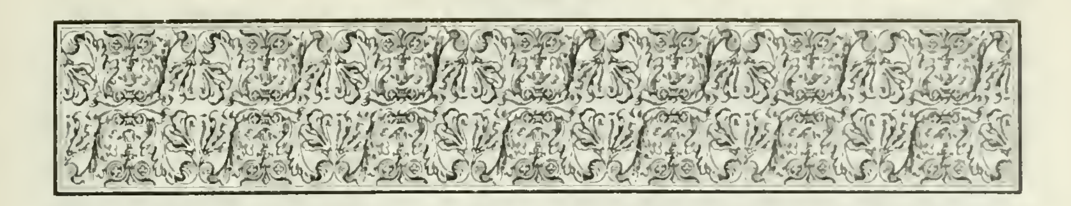
[1]) Portefeuille „Musica", f. 48. Dans cette Pièce Huygens calcule la grandeur de différents intervalles dans le système du ton moyen. En marge la date 1676.

Ergo quinta exuperans $US^{\sharp}$, et reliquæ, exacte ut 25 ad 16. et fere ut 14 ad 9, quam proportionem ſuperant paulo plus quam $\frac{1}{3}$ commatis.

Sexta exuperans $C^{\flat}\ S^{\sharp}$, eſt proxime ut 7 ad 4 (pauxillo minor) in ſyſtemate temperato, et videtur conſonantia. nam et gratum auribus ſonum edit, et non tremulum, ut ſexta diminuta $S^{\sharp}M^{\flat}$. differentia logarithmorum $C^{\flat}$ et $S^{\sharp}$ eſt 24228. Et differentia logarithmorum 7 et 4 eſt 24304. Ita autem ratio $C^{\flat}$ ad $S^{\sharp}$ ad rationem 7 ad 4 ut hæ differentiæ inter ſe.

III.

PIÈCES SUR LE CHANT ANTIQUE ET MODERNE.



Avertiſſement.

Le portefeuille „Muſica" renferme e.a. une ſérie de feuilles d'un même format différent de celui des autres, numérotées 1—45 par Huygens; elle contiennent des notes ou pièces apparemment écrites plus ou moins d'un trait. C'eſt à ce groupe de feuilles que nous empruntons e.a. les cinq Pièces *A*—*E* qui ſuivent; ſeule la deuxième partie de la Pièce *B* (le morceau *B* II), ainſi que le morceau *D* II, proviennent d'autres feuilles. Comme le groupe mentionné 1—45 [1]) contient e.a. des remarques ſur un livre de Th. Salmon paru en 1672 [2]) il ne peut être antérieur à cette date. Quant au morceau *D* II, il ne peut être antérieur à 1682, puiſqu'il traite de l'édition des „Harmonika" de Ptolémée par Wallis de cette année.

Dans la Pièce *A*, à laquelle nous avons donné le titre „Le tempo giuſto" [3]), Huygens obſerve que, puiſqu'anciennement on ne ſe ſervait que de deux notes (longa et brevis), il eſt croyable que celles-ci correſpondaient à des temps plus courts que chez

---

[1]) Que nous déſignons par f. 26—44.

[2]) P. 136 qui suit.

[3]) Le mot „giusto" étant pris dans le sens littéral (juste). Nous faisons cette remarque parce que le sens n'est pas toujours le même. Percy A. Scholes „The Oxford Companion to Music", Oxford Univ. Press 1938. écrit s.v. giusto: „Tempo giusto puzzlingly means either „strict time" or „suitable time".

les modernes. Sa propofition de fixer les durées des notes [4]) à l'aide du pendule — voyez fur une propofition analogue de Merfenne la note 5 de la p. 68 qui fuit — rappelle celle de fe fervir du pendule pour établir l'unité de longueur [5]).

La Pièce *B* traite affez amplement des modes du chant d'églife; Huygens défend fa manière de voir d'après laquelle il n'y a au fond que deux modes, le majeur et le mineur, lefquels on peut répéter à différentes hauteurs, tous les tons authentiques étant par conféquent des tranfpofitions de ces modes.

Dans la Pièce *C* Huygens combat ceux „qui croient que le chant de la voix eft plus parfait que celuy de tout autre inftrument et que la voix chante tous les intervalles des tons et tous les accords juftes" [6]). Il eft au contraire d'avis qu' „il y a des voix qui penchent naturellement a baiffer et d'autres a hauffer". Il calcule en outre les différences commatiques qui réfulteraient d'un chant *parfaitement jufte*, revenant au ton de départ.

Huygens — on l'a déjà vu plus haut [7]) — ne partage nullement l'opinion de Stevin d'après laquelle le chant parfaitement jufte eft celui d'où ne réfulte, dans le cas confidéré, aucune différence commatique. Stevin paraît en outre être d'avis que ce chant parfaitement jufte [8]) eft fort poffible fans aucun accompagnement. Eft-ce e.a. à lui que Huygens fait allufion dans fa première phrafe citée ci-deffus? Stevin parlait (pour citer cette fois la traduction françaife) des „vrais femitons, que nous entonnons de nature tous egaux" [9]). Voyez auffi la l. 5 d'en bas de la p. 82 qui fuit où Guicciardini affirme que

[4]) Dans son traité de 1660 „Ghebruik, en Onghebruik van 't Orghel in de Kerken der Vereenighde Nederlanden" (Amsterdam, A. G. vanden Heuvel) Constantyn Huygens père dit que sans orgue on chante souvent trop vite ou trop lentement. Il parle (p. 116) de „ . . . een' onverhaeste ende onvertraeghde maet, waerin mede veeltijds groffelick werd gefeilt".

Sur ce traité on peut consulter p.e. les p. 27—28 de „Het muziekleven in Nederland in de 17de en 18de eeuw" par Dirk J. Balfoort (Amsterdam, P. N. van Kampen, 1938).

[5]) Voyez les p. 354 et suiv. du T. XVI.

[6]) Ce qui n'est, certes, pas l'opinion de son père qui se plaint dans le traité nommé (note 4) du chant sans orgue fort peu satisfaisant, du moins dans les Pays-Bas septentrionaux. En Angleterre, dit-il, ce chant est meilleur.

[7]) P. 32.

[8]) L. 24—26 de la p. 33 qui précède.

[9]) Premier Livre de la Géographie, dans „les Oeuvres mathematiques de S. Stevin augm. par A. Girard" (C. et B. Elsevier, Leyde 1634) p. 112.

les Belgæ „cantan' naturalmente a misura". Quoi qu'il en soit, il semble assez probable que ce soit aussi et surtout à Zarlino que Huygens pense [10]). Mersenne [11]) parle du différent que Vincent Galilée eut en 1588 sur ce sujet avec Zarlino; „Galilée", dit-il, „conclud que les voix apprennent les vrayes interualles de la Musique des Instrumens, & non au contraire . . . on ne peut demonstrer si les voix chantent iustement qu'en faisant voir qu'elles sont conformes au parfait Instrument: ce que Zarlin eust auoué s'il l'eust consideré attentiuement" [12]). Quelques pages du traité „Vande Spiegeling der Singkonst" font voir que Stevin connaissait les ouvrages de Zarlino.

La quatrième Pièce (*D*) traite la célèbre question si les Anciens ont, oui ou non, connu la polyphonie à laquelle Huygens répond par la négative [13]), admettant tout au plus qu'ils aient fait usage d'un „faux bourdon". Il s'agit apparemment de ce qu'il appelle ailleurs, en discutant la même question, „un faux bourdon d'octave, quinte et quarte" [14]).

---

[10]) Comparez la note 73 de la p. 101 qui suit.

[11]) „Harmonie Universelle" de 1636, „Traité des Instrumens à chordes" p. 7, Prop. III: „Determiner si l'on a fait des Instrumens de Musique à l'imitation des voix, ou si l'on a reglè les interualles des voix par ceux des Instrumens, etc."

[12]) Mersenne cite le Cap. IV du Libro Primo („Della Differentia che si troua tra la Natura & l'Arte, & tra il Naturale & lo Arteficiale, & che l'Artefice è solamente imitatore della Natura") des „Sopplementi musicali del rev. M. Gioseffo Zarlino da Chioggia, Maestro di Cappella della Sereniss. Signoria di Venetia, Ne i quali si dichiarano molte cose contenute ne i Due primi Volumi, delle Istitutioni & Dimostrationi; per essere state mal' intese da molti; & si risponde insieme alle loro Calonnie", Terzo Volume, Venetia, Francesco de' Franceschi, 1588. En 1589 (la préface est datée août 1588) parut le „Discorso di Vincentio Galilei nobile Fiorentino, intorno all' opere di messer Gioseffo Zarlino di Chioggia et altri importanti particolari attenenti alla musica" (Fiorenza, G. Marescotti). La Bibl. Naz. de Firenze possède en outre des remarques manuscrites de V. Galilei sur le même sujet (Vol. V. „Critica . . . ai Sopplimenti musicali").

[13]) Comparez les deux premières lignes de la p. 30 qui précède.

[14]) P. 117 qui suit. On peut consulter sur le faux-bourdon le chapitre „Der Diskantus und Fauxbourdon", p. 309—359 du deuxième livre („Die Entwicklung des geregelten mehrstimmigen Gesanges") de la „Geschichte der Musik" par A. W. Ambros (Band II, Breslau, F. E. C. Leuckart, 1864).

La cinquième Partie enfin proclame, bien brièvement, la gloire des Pays-Bas dans le domaine de la musique. Ambros, qui lui aussi cite Guicciardini [15]), nous apprend, ce dont il n'est pas question dans les éloges du florentin, que la plus grande floraison de la musique dans les Pays-Bas ne datait pas du temps où écrivait Guicciardini, mais d'un peu plus tôt: „Das Jahrhundert von 1450 bis 1550 verdient in der Musikgeschichte recht eigentlich den Namen des Jahrhunderts der Niederländer. Dem niederländischen Musiker war, wie später dem italienischen, schon reine Heimat eine Empfehlung, denn die Niederlande galten für die Hochschule der Musik; selbst dann noch als Italiens musikalischer Ruhm schon in vollem Glanze strahlte ..... So noch bis in den Anfang des 17. Jahrhunderts hinein" [16]).

Nous ajoutons que dans ses compositions Constantijn Huygens père (1596—1687) s'inspire de la musique italienne, ce qui s'accorde bien avec les paroles d'Ambros [17]).

Quant à Christiaan, nous ne connaissons aucune composition de sa main. Nous ne voyons pas non plus qu'il ait discouru, ce qu'il se proposait un instant de faire, sur la „Methode pour faire des beaux chants" [18]), et nous croyons qu'il a fort bien fait de s'en abstenir: qui parmi nos lecteurs voudrait soutenir que pour faire „des beaux chants" il suffit d'être en possession d'une technique fort parfaite? Non omnia possumus omnes.

Il faut noter que Christiaan Huygens est sans doute ici sous l'influence de Mersenne qui, déjà dans „La Vérité des Sciences" de 1625, traite longuement [19]) la question de savoir „s'il est possible de faire un chant sur un sujet donné qui soit le plus beau de tous ceux qui puissent estre faits sur le mesme sujet". Mersenne croit à cette possibilité tant „absolument" que „eu égard à l'auditeur". Il s'exprime comme suit [20]): „Il est necessaire d'entendre parfaictement la musique speculatiue, & la rhytmique, & de sçauoir quel temperament est le plus parfait de tous les temperamens possibles pour treuuer, ou cognoistre le chant le plus excellent de tous absolument parlant: & pour

---

[15]) Ambros „Geschichte der Musik", Band III 1868, premier livre („Die Zeit der Niederländer"), p. 362. Le livre de Guicciardini parut en 1567 (note 3 de la p. 82 qui suit).

[16]) L.c. p. 3.

[17]) Il est vrai que fort peu des nombreuses compositions de Constantijn Huygens ont été conservées. Voyez sur ce sujet les Additions et Corrections à la fin du présent Tome.

[18]) L. 5 de la p. 170 qui suit.

[19]) P. 544—580.

[20]) P. 564.

ſçauoir le chant le plus parfait eu égard au ſubiét, il faut ſçauoir parfaictement la nature du ſubiect, & la plus excellente maniere par la quelle il peut eſtre exprimé: en fin pour cognoiſtre le plus beau chant de tous eu égard à l'auditeur, & a ſon temperament, il faut ſçauoir [ce qu'il juge théoriquement poſſible et par conſéquent pratiquement réaliſable dans les âges futurs] le degré du temperament, ou l'idioſyncraſie de l'auditeur, outre tout ce que nous auons dit iuſques à preſent".

Il importe toutefois de remarquer que Huygens ne parle que d'une méthode pour faire „des beaux chants" et non pas, avec l'auteur de „La Verité des Sciences, contre les Septiques [21]) ou Pyrrhoniens" de faire les *plus* beaux chants [22]). Deſcartes lui auſſi, quoique nullement ſuſpect de pyrrhoniſme, était d'avis que Merſenne exagérait; dans ſa lettre à Merſenne du 18 mars 1630 [23]) il écrit: „generalement ny le beau, ny l'agreable, ne ſignifie rien qu'un rapport de noſtre jugement à l'objet; et pource que les jugemens des hommes ſont ſi differens, on ne peut dire que le beau, ny l'agreable, ayent aucune meſure determinée . . . ce qui plaira à plus de gens, pourra eſtre nommé ſimplement le plus beau, ce qui ne ſçauroit eſtre determiné". Voyez encore ſur ce ſujet le dernier alinéa de la note 2 de la p. 82 qui ſuit.

---

[21]) Lisez plutôt: Sceptiques.

[22]) Voyez aussi la p. 126 qui suit où Chr. Huygens écrit à propos des compositeurs: nec præceptis ita confidere debent ac si geometriæ axiomata eſſent, ſed multas exceptiones dari exiſtiment.

[23]) „Oeuvres", éd. Adam et Tannery, I, p. 82; et „Correspondance du P. Marin Mersenne" éd. M.me P. Tannery et C. de Waard, II, p. 417.

A. LE TEMPO GIUSTO.

Il eſt croiable [1]) que ancienement on chantoit incomparablement plus viſte les notes qu'ils appellent longa brevis qu'on ne fait a preſent. Car ils n'avoient apparemment que celles la, et le chant ne pouvoit pas eſtre ſi lent, juſqu'a continuer le ſon de la longa pendant 16 battements de pouls, comme l'on la fait durer aujourdhuy. et la brevis pendant 8 battements. Le chant d'Egliſe n'eſt nullement ſi lent et ſi on l'eſcrivoit ſelon qu'il eſt uſitè, ce ſeroit par notes blanches a queue et par noires. qui a l'anciene maniere s'appellent minima et ſemiminima, quoyque pour cette derniere ils n'en euſſent point.

	max.	long.	brev.	ſemib.	min.	ſemimin. [2])
En marge:						

Je vois que certains compoſiteurs en ordonnant de jouer meſure lente, eſcrivent par des notes noires crochues, ce qu'autrement on eſcrivoit par des ſimples noires [3]). Et par là il pourra arriver a la fin que les croches tiendront le lieu des noires, et que pour avoir les 8es de ces croches auſſi bien qu'on a maintenant les 8es des noires, on adjoutera encore une eſpece de quadruples crochues [4]). Et c'eſt de la meſme facon que peu a peu l'on a ralenti les temps des notes ancienes, en y adjoutant d'autres pour des mouuements plus viſtes.

Il eſt neceſſaire pour ſe faire entendre a la poſteritè et pour arreſter une fois les temps des notes de les determiner par des meſures fixes, comme ſont les pendules &c [5]).

---

[1]) Portefeuille Musica, f. 26.

[2]) C.à.d. maxima, longa, brevis, semibrevis, minima, semiminima.

La „blanche à queue" ou „minima" (notre „blanche") s'écrivait aussi ; et la „noire" ou „semiminima" (notre „noire") ou .

[3]) Donc, au lieu de la semiminima , la „crocheta" ou „fusa" .

[4]) La huitième partie d'une „fusa" s'écrivait . Huygens observe que le remplacement de la „noire" par la „fusa" rendra nécessaire l'introduction d'un signe à quatre crochets.

[5]) Mersenne parle comme suit dans le Corollaire III à la Prop. 18 du Liure III des Instrumens: „Il faut encore expliquer comment l'on peut garder la mesme mesure suiuant l'intention du mesme compositeur, quoy qu'il soit mort ou absent. Ce qui est tres-aysé par le moyen d'une chorde suspenduë, dont i'ay donné les usages ailleurs, car il suffit que le Compositeur ou le

Quirinus van Blankenburg[6]), organiſte de l'égliſe wallonne à la Haye[7]), qui connaiſſait Huygens fort bien[8]), nous apprend dans une publication de 1732[9]) avoir vu chez lui qu'il réglait effectivement le chant avec un pendule et avoir adopté lui-même ce réglage[10]). Van Blankenburg connaît auſſi le chronomètre, précurſeur du métronome, de Loulié écrivant peu après la mort de Huygens[11]). Ce chronomètre n'est lui aussi qu'un simple pendule; il se meut devant une règle verticale divisée qui mesure la longueur, variable, de son fil.

Nous rappelons que, suivant Viviani, Galilée avait inversement constaté l'isochronisme des oscillations du pendule en ayant égard au „tempo della musica" (T. XVII, p. 3, note 3).

B. LES DIVERS MODES.

B. I[1]). Qu'il y en a qui ſont d'opinion qu'il n'y a que deux modes l'un par b mol l'autre par b quadre[2]). mais il [Merſenne] proteſte pourtant de ne vouloir oſter les 12 modes. Je crois que c'eſt a cauſe du chant d'egliſe[3]).

Maistre de Musique marque la longueur de la chorde à la marge de sa composition, dont chaque retour monstre le temps de la mesure, etc."

[6]) 1654—1739.

[7]) Depuis 1731 de la Nieuwe Kerk dans la même ville.

[8]) T. IX, p. 567, lettre de Huygens de 1690.

[9]) „Clavecimbel- en Orgelboek der Gereformeerde Psalmen en Kerkzangen. Met de zelfde Noten die de Gemeinte zingt tot vloeijende maatzangen gemaakt. In Stijl en Hoogte bepaald. Met Cieraden verzien. En met Kunst verrijkt", L. Berkoske, la Haye, 1732. Voyez la préface („Bericht"), p. 3 (non numérotée). À la p. 5 l'auteur mentionne Huygens de nouveau; voyez la p. 129 qui suit.

[10]) „zo stel ik daar op alhier een *reglement*, 't welk is, datmen zal de tijd meten door een Slinger (zo als ik bij den geleerden Huygens heb gezien) gemaakt van een fijne draad van 32 duimen, waar aan men zal hangen een pistool kogeltje wegende een Loot, 't welk eens aangestooten zijnde zo lang zal heen en weer gaan dat men drie of vier Psalmveerzen daar op uit zingen kan". Ce „reglement" est déjà mentionné à la première page du livre, dans le „Privilegie" des États de Hollande et de Westfrise.

[11]) E. Loulié „Éléments ou principes de musique", Amsterdam, E. Roger, 1698 (prem. éd. Paris, 1696). v. Blankenburg mentionne ce chronomètre aux p. 133 et 199 de ses „Elementa Musica etc." de 1739. Comparez „Quirinus Gideon van Blankenburg" par Dirk J. Balfoort („Die Haghe", Jaarboek 1938 onder redactie van Dr. W. Moll, 's Gravenhage, Mouton, 1938).

[1]) Portefeuille „Musica", f. 28—30.

[2]) b mol correspond à notre signe ♭, b quadre à notre signe ♮. b mol désigne la division de la quinte en une tierce mineure et une tierce majeure (mode mineur); b quadre celle en une tierce majeure et une tierce mineure (mode majeur).

[3]) Il est vrai que Mersenne exprime, lui aussi, l'opinion qu'il suffit de distinguer deux modes; voyez ses considérations dans les „Traitez" cités dans la note 63 de la p. 120 qui suit: Livre III, Des Genres de la Musique etc., Prop. 18 p. 187: „Par où l'on peut conclure qu'il n'y a que deux Modes qui soient differens en leurs cadences, ou chordes principales, et que ceux qui reduisent tous les tons, et les Modes à deux sortes de modulations, ou de deductions, à scavoir au ♮ quarre,

Ces gens avoient raifon, et je fuis du mefme avis, à fcavoir qu'il n'y a que deux modes qui varient l'air et la nature du chant; l'un qui a la quinte baffe divifee en forte que la 3 majeure foit en bas, et l'autre dans le quel la quinte a la 3 mineure en bas. le premier eft exprimè par le ton de VMSV, et l'autre par le ton de RFLR [4]).

Tous les autres tons authentiques [5]) qu'ils appellent ne sont que des tranfpofitions de l'un de ces deux, et pour ce qui eft des plagaux ils ne different point de modulation d'avec leur authentiques, ayants les mefmes finales dominantes et mediantes.

et au ♭ mol, ne parlent pas sans raison". Prop. 19, p. 190: „Determiner si l'on peut reduire tous les Tons et les Modes de la Musique au ♮ et au ♭ mol, et monstrer comme l'on peut chanter sans autre nuance, ou mutation, que celle de l'une de ces deux Clefs". La remarque de Huygens: „il proteste . . . . ." se rapporte ou Corollarium II de la Prop. 19 (p. 194): „Il ne faut pas que l'on s'imagine que ie vüeille oster les 12 Modes". Comparez sur les 12 modes la note 3 de la p. 111 qui suit.

[4]) Ailleurs (Portef. „Musica" f. 16v) Huygens dit moins clairement: Qu'il n'y a que 2 tons a les confiderer feuls, mais plufieurs par raport de l'un a l'autre. Les 2 font celuy ou la 5[te] d'en bas a la tierce majeure en bas, et l'autre qui dans cette quinte a la tierce mineure en bas. U, M, S, U; R, F, L, R. Mais les tons qui font differents par raport font comme U, M, S, U. R, F♯, L, R. qui confiderez a part font tout a fait les mefmes. Nous imprimons ce passage avec le contexte à la p. 170 qui suit.

[5]) La répartition des modes sacrés en modes authentiques et modes plagaux (dont nous ne ferons pas l'histoire) avait été systématisée par Glareanus dans son „Dodekachordon" (Bâle, 1547). Il distingue douze modes en tout, les identifiant, généralement à tort, avec les modes classiques grecs.

Son premier mode authentique est le soi-disant mode dorique (d, e, f, g, a, b, c, d). Les modes authentiques suivants, portant les nos 3, 5, 7 etc. sont le mode phrygien (e, f, g, a, b, $\bar{c}$ $\bar{d}$, $\bar{e}$), le mode lydien (f, g, a, b, $\bar{c}$, $\bar{d}$, $\bar{e}$, $\bar{f}$) etc. A chaque mode authentique correspond un mode plagal qui commence plus bas d'une quarte, tout en ayant le même ton final (finalis). Les modes plagaux ont les nos 2, 4, 6 etc. Le mode 2 p.e. est donc suivant lui le mode hypodorique (A, B, c, d, e, f, g, a) avec le finalis d; de même le mode 4 est hypophrygique, etc.

[6]) Huygens adopte apparemment un ordre différent de celui de Glareanus. Avec Zarlino il choisit comme premier mode authentique le mode sacré ionien (c, d, e, f, g, a, b, c) auquel succèdent les autres modes authentiques numérotés 3, 5, 7 etc. (Zarlino leur donne les nos 1, 2, etc.). La table qui suit donne la correspondance avec l'ordre traditionnel.

Nom	Numéro chez Glareanus	Finalis	Numéro chez Huygens
dorique	I	d	III
phrygique	III	e	V
lydique	V	f	VII
myxolydique	VII	g	IX
ionien	IX	c	I
éolique	XI	a	XI

Je dis que des authentiques le mode premier VMSV [6]), le 7e FLVF, 9e SCRS, ne different en rien ſi non en hauteur, ce qui ne change rien en la nature de la modulation. Et de meſme que le 3e RFLR, le 5e MSCM, le 11e LVML ne different rien entre eux qu'en hauteur pareillement.

Mais il faut examiner premierement comment ils eſtabliſſent la diverſitè des modes. C'eſt par les differentes eſpeces d'octaves qu'ils differentient les 6 modes authentiques, voiants que les demitons ſont ſituez diverſement dans l'eſtendue de ces octaves. car en prenant pour premiere octave celle qui commence par V, le troiſieme intervalle et le 7e ſont les demitons. En l'octave de R le 2 et le 6 intervalle ont les demitons. En l'octave de M, le premier et le 5e. En celle de F le 4e et le 7. En celle de S le 3 et le 6e, en celle de L le 2e et le 5.

Voila 6 variations d'octaves en effect. Mais il faut voir ſi on ſe ſert ou ſe peut ſervir convenablement de tous ces tons, en s'aſujettiſſant aux degrez dans leſquels l'octave eſt diſtribuée. Ce qui ne ſe trouuera point. Par exemple dans le ton de FLVF on ne doit pas chanter mais mettre le b mol ou ci, par ce que autrement on n'a pas de quarte au deſſus de la principale ou finale note du Ton. Il eſt vray que certains autheurs de Muſique ont donnè des Exemples de tous ces tons et de celuy de FVF entre autres, mais ou ils evitent ces paſſages, ou quand ils le mettent ils font un fort mauvais effect.

Une preuve de ce que ce ton n'eſt pas uſitè c'eſt qu'eſtant comptè le 5e ton par ceux qui en mettoient 12 [7]) en commencant par celuy de DLD, on y a mis le C♭ [8]) au lieu du ♮ et alors comme il ne differoit pas de celuy de VSV qui eſtoit le 11 ſi non du haut au bas [9]), il eſt arrivè que ce meſme 11e a eſtè reputè en ſuite pour le 5e ton d'egliſe [10]).

J'ay connu un excellent organiſte qui diſoit que le ton de RF♭LR avoit quelque choſe de divin, et qu'il eſtoit bien different de celuy de VMSV. Et cependant ſi on tranſpoſe un air de ce ton icy en celuy de RF♭LR, il n'y ſcauroit avoir aucune difference, par ce que tous les intervalles et accords ſont de meſme ſi ce n'eſt ſeulement au S♭ du ton VSV qui deviendra le C♭ dans la tranſpoſition et ainſi la tierce MS♭ ſera

---

7) Voyez la numération de Glareanus.
8) Ceci est donc notre note Bes ou Si Bé mol.
9) ?
10) ?

$F^{\sharp}C^{\flat}$, mais ce n'eſt que le defaut du clavier qui manque du ſemiton mineur au deſſus du L [11]). Ce meſme defaut fait auſſi que le ton de $RF^{\sharp}LR$ a un avantage ſur celuy de VSV en ce que cettuicy n'a point de ſemiton majeur au deſſus de ſa note dominante S, ou l'autre l'a fort bien car il chante $LC^{\flat}L$, ce que dans le ton de VSV on ne ſcauroit faire, ſi non quand ce ſemiton eſt adjoutè [12]). Mais ces additions de chordes ne rendent pas les tons autres [13]) et ne regardent que les inſtruments qui ont les tons fixes, et non pas les voix ni pluſieurs autres inſtruments qui ſuppleent auſſi bien que la voix toutes ces chordes adjoutees.

Comme nous avons montrè des inconvenients au pretendu ton de FVF ainſi il y en a encore a d'autres comme en celuy de MCM, ou l'on feroit obligè de paſſer par le F qui ne vaut rien, faiſant le triton contre la note dominante [14]). C'eſt pourquoy ce ton de MCM ne peut eſtre bien pratiquè qu'en paſſant par $F^{\sharp}$ au lieu de F. Et alors il eſt de meſme nature que celuy de RFLR. Ou il faut ſcavoir pourtant que ſur les orgues et clavecins il y a de certains ſemitons qui ne ſont pas juſtes dans le ton de MSCM. Car il n'y a point de chorde qui repreſente le $S^{\sharp}$ du ton RFLR. Ni auſſi qui en repreſente le $V^{\times}$; les intervalles de $CC^{\flat}$ et $MM^{\flat}$ eſtant de ſemitons mineurs qui devroient eſtre majeurs [15]). Cela fait que ſur ces inſtruments ce ton de MSCM et

[11]) Dans le système du ton moyen suivant lequel, ici comme dans tout ce qui suit, les instruments sont censés être accordés, il y a deux semitons différents. En effet, f étant le rapport caractéristique des longueurs des cordes donnant la quinte, donc $f = \sqrt[4]{\frac{1}{5}}$, on obtient dans la gamme chromatique telle qu'elle a été déduite dans la „Divisio Monochordi" (p. 52 qui précède, note 4), les intervalles suivants, donnés ici comme rapports des fréquences des vibrations:

Tons	C	Cis	D	Es	E	F	Fis	G	Gis	A	Bes	B	c
Intervalles des tons avec C	1	$\frac{25}{16}f$	$\frac{5}{2}f^2$	$4f^3$	$\frac{5}{4}$	$2f$	$\frac{25}{8}f^2$	$5f^3$	$\frac{25}{16}$	$\frac{5}{2}f$	$4f^2$	$\frac{25}{4}f^3$	2
Intervalles des tons entre eux		$\frac{25}{16}f$	$\frac{8}{5}f$	$\frac{8}{5}f$	$\frac{25}{16}f$	$\frac{8}{5}f$	$\frac{25}{16}f$	$\frac{8}{5}f$	$\frac{25}{16}f$	$\frac{8}{5}f$	$\frac{8}{5}f$	$\frac{25}{16}f$	$\frac{8}{5}f$

Ici l'intervalle $\frac{25}{16}f$ est un semiton mineur, et $\frac{8}{5}f$ un semiton majeur.

On voit que E-Gis est une tierce majeure juste, composée de deux semitons majeurs et de deux semitons mineurs, tandis que Fis-Bes consiste en trois semitons majeurs et un semiton mineur.

[12]) En effet, dans l'échelle de D la note Bes surpasse la dominante A d'un semiton majeur, tandis que dans l'échelle de C la note Gis surpasse la dominante G d'un semiton mineur.

[13]) La portée de cette remarque nous échappe.

RFLR paroiſſent aucunement differents et que le premier a quelque choſe de plus plaintif et de plus tendre, a cauſe des cadences que ſe ſont par ces demitons mineurs, et auſſi quelque choſe de triste a cauſe de quelques conſonances qui en devienent un peu ſauſſes [16]), et de ce qu'on y emploie le triton au lieu de la fauſſe quinte [17]).

Mais la voix ajuſte tout cela, au moins quand on chante ſans eſtre accompagnè de quelqu'un de ces inſtruments a tons fixes. et dans ceux cy il ne tient qu'a nous d'y adjouter les chordes neceſſaires en coupant les feintes.

Quoyque pour ce qui eſt des cadences, celles par les ſemitons mineurs ſoient plus agreables que par les majeurs, à mon oreille. Et de meſme j'aime à emploier le triton de M♭L au lieu de la fauſſe quinte R♯L [18]), en le ſauvant comme la fauſſe quinte, ſcavoir de la tierce MS.

B. II [19]) Les tons tranſpoſez ont souvent quelque choſe de plus grave que les naturels comme celuy de C♭ mol plus que celuy de D; ou de plus tendre comme celuy de E plus que celuy de D, ce qui n' arrive pas parce que l'un eſt plus bas d'un ton et l'autre plus haut que celuy de D mais pluſtoſt par de certains ſemitons mineurs au lieu de majeurs

---

[14]) F—B est un triton $\left(\text{rapport } \frac{25}{8} f^2\right)$ ou quarte augmentée, composée de trois semitons majeurs et de trois semitons mineurs.

[15]) En effet, Gis est située ici à la distance d'un semiton majeur au-dessous de la dominante, tandis que Cis est située à la même distance au-dessous de la tonique. Mais dans l'échelle de E, Bes et Es sont situées, respectivement au-dessous de la dominante et de la tonique, à la distance d'un semiton mineur.

[16]) Lorsque F est remplacée par Fis, la tierce majeure E—Gis de l'échelle de D est transposée en Fis—Bes, ce qui n'est pas une tierce majeure juste, et la quinte E—B en Fis-Dis, ce qui n'est pas une quinte juste.

[17]) On entend par fausse quinte la quinte diminuée qui constitue le complément du triton par rapport à l'octave; c'est donc un intervalle $\frac{16}{5} f^2$, composé de quatre semitons majeurs et de deux semitons mineurs.

La remarque de Huygens ne doit apparemment pas être entendue comme désignant une vérité générale. Dans l'échelle de D on a les intervalles-tritons D-Gis, F—B, G—Cis lesquels, transposés en E, deviennent les intervalles E—Bes, G—Cis et A—Dis, dont le premier et le dernier sont des fausses quintes, tandis que l'intervalle E—Bes, une fausse quinte, est transformé en Fis—C, également fausse quinte. Huygens n'entend sans doute parler que de quelques intervalles fort usités tels que la fausse quinte Cis—G qui est transformée par la transposition dans le triton Es—A.

[18]) Es est inférieur à E d'un semiton mineur, tandis que Dis est supérieur à D d'un semiton mineur et par conséquent inférieur à E d'un semiton majeur. Il en résulte que Es—A est un triton et Dis—A une fausse quinte.

[19]) Portef. „Musica", f. 63r.

dans les cadences et dans de certains intervalles et accords. Quoy que dans les accords cela faſſe le plus ſouvent un mauvais effect; et pour y remedier on adjoute d'autres feintes au clavier comme dans le ton qu'on appelle de C♭ mol, la feinte de L♭ ſur celle de S♯. Mais il eſt certain que ſi l'on ſe veut alors ſervir toufjours de cette feinte ou elle devroit eſtre ſelon le ton naturel, le ton tranſpoſé ne differera en rien du naturel en D ſi non qu'il ſera plus bas d'un ton. et que le V♯ ſera trop bas d'une cinquieme de ton pour faire la 3e majeure avec le F, comme il devroit, ainſi que M♭ avec S, dans le ton de D, font cette 3e majeure.

En jouant en E^{M} il eſt bon de faire les cadences de MM♭M, qui ont quelque choſe de plus tendre et plus plaintif, que de MR♯M quand la feinte R♯ eſt adjoutee au clavier. Mais dans des accords, ſur tout à la derniere note d'une cadence ou la baſſe eſt C, le R♯ vaut mieux.

Les tons tranſpoſez ſervent encore aux compoſiteurs pour faire plus de varieté, parce qu'en ſe promenant en ſuite dans des modes empruntez, ils en trouvent tels qui font aiſez et naturels, qui autrement ſeroient rudes ou impratiquables du moins ſur le clavier ordinaire, ſi la compoſition euſt eſtè dans le ton naturel.

B. III [1]). 1586. Artuſi. Præcepta quædam in compoſitione ſymphoniæ cetera ex... [2])

In definiendis modis Zarlinum ſequitur, cum apud vetuſtiores primus tonus diceretur RLR [3]).

Si de genere diatonico ſolo agatur poſſet locum habere modorum numerus quem dicunt, etſi coacta omnino melopœa ſit futura, ne quidem adhibito B fa [4]) (ſic enim diateſſaron ſpecies conſtituunt) ut non poſſint in tono VSV [2] [5]) deſcendere ſepe per C, L propter propinquitatem antecedentis F, ſine aurium injuria. adjuncto autem B fa jam non erunt 6 authentici, idem erit enim VSV quod FVF. Et RLR quod SRS &c. nam plagios non puto in hanc diviſionem recipiendos etſi aliquid differentiæ adferant.

---

[1]) Portef. „Musica", f. 32—33. Les remarques de Huygens se rattachent à celles de la Pièce *B*, I qui précède.

[2]) La Pièce se rapporte à l'ouvrage d'Artusi: „L'arte del contrapunto, ridotta in tavola" (2 vol. 1586—1589, réimpr. en 1598). Giovanni Maria Artusi (né vers 1545, chanoine de l'église S. Salvatore à Bologna, mort le 18 août 1613) publia encore e.a. en 2 vol. (1600—1603) „L'Artusi, ovvero delle imperfettioni della moderna musica".

[3]) Voyez la note 6 de la p. 70 qui précède.

[4]) Par B fa il faut entendre la note Bes dans l'échelle de F: B signifie mol, fa le quart de la tonique (ici F), donc notre note B.

[5]) Les demitons chromatiques ont déjà été mentionnés à la p. 39 qui précède.

At nunc cantus noſter non eſt diatonicus ſimplex ſed chromaticis ſemitonijs alijſque inſuper auctus [5]). Horumque ope quilibet modus a qualibet chorda diatonica fere incipere poteſt, id eſt infimum ſonum inde ordiri.

Sed melius ex diviſione gemina diapentes modorum differentia ſumitur, quarum in altera tertia major imum locum obtinet, altera tertia minor, quam ex diviſione diapaſon ut fieri ſolet [6]). Suntque etiam illæ diapentes diviſiones altera harmonicæ proportionis altera arithmeticæ [7]). Adeo ut revera duo tantum ſint modi ex iſta diviſione originem habentes.

Ad demonſtrationem ſumo ſonis omnibus acutioribus factis, dummodo eadem quæ prius maneant intervalla modum non mutari, quod nemo negaverit, cum naturam cantus nihil immutet; nam alioqui puer ac vir eandem oden canentes diverſos modos tenere dicendi eſſent, quod alter altius altero omnes tonos efferret. Hoc etiam Ptolemæus et alij viderunt. Licet aliqui modos antiquorum hac ſola in re inter ſe diſcrepaſſe exiſtiment quod non eſt credibile.

Iidem ergo ſunt modi VMSV, FLVF, SCRS, RF♯LR, MS♯CM, LV♯ML. Item ijdem RFLR, MSCM, SC♭RS, LVML, VM♭SV, quibus et FL♭VF annumerabitur ſi modo chordæ quædam quas enarhomias [liſez: enharmonias] vocant inſtrumentis adjunctæ ſint.

Numquid enim ob defectum chordarum diverſos modos dicent, quod alij tali ſemitonio careant, alij alio. Velut ſi tonum VMSV diverſum ponant ab iſto RF♯LR quod hic poſt dominantem L habeat ſemitonium majus ſurſum, alter non habeat hoc ſed ſemitonium minus. Atqui vox hominis et inſtrumenta quædam fidibus inſtructa, le violon, omnia ſemitonia majora minoraque pro lubitu exprimunt. Male igitur ex paupertate Organorum ſuorum et Cythararum (Clavecins) modis multiplicitatem inducunt.

En marge: Nec ulla ode cantilenia fere nunc extat quæ ſaltem non B fa utatur et ſemitonijs in clauſulis. niſi Bar. Le ſens de cette remarque ne nous eſt pas parfaitement clair. Apparemment Huygens veut dire que par ſuite de l'extenſion donnée au ſyſtème diatonique par l'introduction des tons chromatiques il n'exiſte pour ainſi dire plus aucun chant ne faiſant pas uſage de l'abaiſſement B—Bes et de demitons dans les clauſules; mais nous ne pouvons pas dire avec certitude ce qu'il déſigne par „Bar". Nous devons à M. Jos. Smits van Waesberghe l'hypothèſe qu'il entend parler de „barytonantes toni", c.à.d. de tons de la baſſe, parce que ceux-ci ſont rarement ſujets à des élévations ou abaiſſements accidentels.

6) En marge: Male conſtituunt ſpecies diapaſôn, abſque B fa, cum ſemper apud antiquos pertinuerit ad genus diatonicum quando tetrachordo ſynem. utebantur.
On trouve en effet le ton mentionné comme trite de la tétrachorde des conjointes.

7) Comparez les notes *7* et 8 de la p. *79*.

Quod ſi inſtrumentis hiſce fides quæ deſunt ſuperaddantur, ut in quibuſdam factum videmus. jam nulla cantilena non multimodis tranſponi poterit, cum omnes chordæ diatonicæ ſurſum ac deorſum habeant conſonantias omnes. adeo ut manifeſto apparitürum ſit, omnem modorum differentiam ad geminam diviſionem diapente reduci. quod vocant B quadratum ac B molle [8]). Et hoc ita ſe habere non nulli Practici ſentiunt etſi nemo adhuc quod ſciam ſcripto prodiderit.

Eſt autem differentia ingens quæque aures omnium maxime afficit, iſtorum quos diximus duorum modorum. quorum prior alacrior incitatior multò, alter gravior modeſtior [9]).

Differentia authenticorum et plagiorum ut vocant [10]), exigua eſt, cum quilibet horum eaſdem finales, dominantes, mediantes habeat, quas authent. ut nihil aliud ſit plagius quam authent. in grave productus vel quandoque in acumen quo quidem non mirum eſt non multum variari melodiam.

C. DIFFÉRENCES DE HAUTEUR, PAR RAPPORT AUX TONS DES INSTRUMENTS, RESULTANT DE LA JUSTESSE DU CHANT.

Il y en a [1]) qui croient que le chant de la voix eſt plus parfait que celuy de tout autre inſtrument et que la voix chante tous les intervalles des tons et tous les accords juſtes en quoy je ne ſuis pas de leur avis [2]). Il eſt vray qu'elle eſt de nature a ſe pou-

---

[8]) Voyez la note 2 de la p. 69 qui précède.

[9]) Ici suit dans le manuscrit l'alinéa biffé suivant:

Sed ſi duos tantum hos admittamus modos quomodo illud ſignificabimus quod dicunt tranſgreſſionem in modum alium ſeu mutationem, quæ in eadem ode eleganter ſepe uſurpatur. Hujus gratia, Tonos sane 11 vel 12 ſi velint retineamus ut reſpectu cujuſlibet qui cantilenæ propriam diapaſon terminat alium deſignare poſſimus, hoſque diſtinctionis gratia Tonos non vero modos appellemus. Ita nonnunquam mutatum Tonum dicemus non autem modum ut cum ex RFLR in MSCM tranſimus vel contra, aliquando vero Modum, ut cum ex VMS abimus ad VM♭SV. aliquando vero et Tonum et modum, ut cum ex VMSV mutamus in RFLR.

On lit en outre en marge:

Quis in tono SRS incedit per F. Ergo non facit alium modum iſta poſitio ſemitonij.

Quis in tono RFL incedit per M♭. Ergo nec recte per F in MCM.

[10]) Voyez la note 5 de la p. 70.

[1]) La Pièce est empruntée au portef. „Musica", f. 30 v.

voir accommoder un peu au befoin, mais quand cela arriveroit quelque fois il eft bien rare d'en trouver qui le plus fouvent ne s'eloignent bien d'avantage de l'intonation veritable que les orgues et clavecins ne manquent des veritables confonances, qui n'eft qu'un quart de comma [3]).

D'ailleurs quand bien la voix chanteroit les intervalles de quintes et quartes tres juftes, elle s'ecartera neceffairement en ce faifant du veritable ton. Car par exemple en chantant VŚR̀ĹM̀V̀ [4]), ce M eft un comma entier plus haut qu'il ne devoit eftre pour faire la tierce MV̀ jufte fuppofè qu'on ait chantè jufte la quinte VS, la quarte SR̀, la 5e RL et la 4te LM. de forte qu'il arrivera que pour rendre la tierce jufte l'on chantera le dernier V un comma plus haut que le premier, ou bien il faut que la voix ne chante pas les intervalles des confonances dans la jufteffe [5]). Et fi on chante encore en fuite par les mefmes intervalles, on hauffera encore d'un comma, et ainfi toufjours, de forte que les voix fans eftre reglees par quelque inftrument s'egareront neceffairement et feront quelques intervalles et accords faux et cela fe voit auffi par l'experience. Puifque l'on trouve bien fouvent que les voix ont hauffè ou baiffè d'un demiton ou d'avantage, au bout d'une piece qu'on a chantée fans accompagnement d'inftruments. La caufe du baiffement eft quand on monte fouvent par quartes et qu'on defcend par quintes ou par tierces mineures. Ainfi quand on chante par des notes lentes

VF́R̀ŚM̀ĹR̀Ś S̀V́

et qu'on le repete quelquefois de fuite la voix devra avoir notablement baiffee en l'efprouvant contre quelque inftrument [6]). mais fi on chante vifte, je trouve que le fouvenir de ce premier V retient la voix dans le ton, et par confequent luy fait dire un peu fauffement les intervalles des confonances. Et il y a des voix qui penchent naturellement a baiffer et d'autres a hauffer.

---

[2]) Nous avons parlé de ce début dans notre Avertissement.

[3]) Voyez sur cet écart la „Divisio Monochordi" qui précède.

[4]) L'accent ´ désigne une montée, l'accent ` une descente.

[5]) Les notes chantées sont C G D A E C,

les intervalles justes $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$, fractions dont le produit (somme des intervalles) est $\frac{81}{80}$.

En revenant à C on est donc monté d'un comma.

[6]) Voir la note 6 de la page suivante.

D. LES ANCIENS CONNAISSAIENT-ILS LE CHANT POLYPHONE?

D. I [1]) Veteres concentu per conſonantias uſos non prorſus rejicit [Salinas] [2]). Bedæ teſtimonium adfert qui ante 700 annos et amplius vixerit [3]). Argumentum etiam affert hoc quod de conſonantijs tam multa ſcripſerint. Sed ego ad ſummam uſitatum illis exiſtimo quod faux bourdon [4]) appellant. Argumenta ſunt hæc: quod nullam ejus mentionem auctores veteres muſici faciunt, cum debuerint plurimum in hac re poſuiſſe operæ. quod non centenis locis apud alios auctores antiquos de ſymphoniæ uſu appareat. quod diapaſon in 12 intervalla diviſerint [5]) ut ad concentum plane inepta eſſent.

---

[6]) Les notes chantées sont G F D G E A D G G̲ C

et les intervalles justes $\frac{4}{3}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{4}{3}$, dont la somme est $\left(\frac{80}{81}\right)^2$.

Il y a donc eu une descente de 2 commas.

Huygens revient sur ce sujet dans ses notes sur les „Harmonika" de Ptolémée dans l'édition de Wallis; voyez la p. 101 qui suit; ce n'est pas cependant d'une remarque de Wallis qu'il s'agit en ce dernier endroit, mais d'une observation de Zarlino.

[1]) Portef. „Musica", f. 27—28. La Pièce *D* I fait partie des notes de Huygens sur le „De Musica" de Salinas (voyez la note 7 de la p. 45 qui précède).

[2]) C'est dans le Cap. XXV du Lib. V (p. 284) que Salinas traite la célèbre question „fueritne apud veteres . . . . cantus plurium vocum". Il n'ignore pas qu'on doute généralement de l'existence du chant polyphone chez les anciens, puisqu'aucun auteur classique n'en fait mention: lorsque plusieurs personnes chantaient ensemble le chant aurait été ou homophone ou alternatif. Pour sa part il regarde comme un argument remarquable pour l'existence du chant polyphone la grande application des auteurs classiques à la théorie des consonances; en outre il fait appel à un endroit d'Aristote (Politica, VIII, 5): τὴν δὲ μουσικὴν πάντες εἶναί φαμεν τῶν ἡδίστων, καὶ ψιλὴν οὖσαν καὶ μετὰ μελῳδίας.

[3]) Salinas cite Bède disant que dans son temps la musique sacrée polyphone était en usage. Nous ne voyons pas qu'il le cite comme partisan de l'existence du chant polyphone dans l'antiquité, comme Huygens semble vouloir le dire, ni que Bède ait été de cet avis.

Beda Venerabilis, moine bénédictin, né en 673 en ou auprès de Yarrow dans le diocèse de Durham, mort à Yarrow le 26 mai 735, est l'auteur d'ouvrages sur l'histoire, l'arithmétique, la chronologie etc. Le plus connu de ses œuvres est la „Historia ecclesiastica gentis Anglorum", dans lequel il parle en plusieurs endroits du chant d'église.

[4]) Nous avons parlé du faux-bourdon dans l'Avertissement qui précède (p. 65). Nous y renvoyons à la p. 117.

[5]) L'école d'Aristoxène — comparez la note 9 de la p. 32 qui précède — connaît une division de l'octave en six tons entiers égaux, lesquels consistent chacun en deux semitons également égaux entr'eux. Ptolémée combat cette division dans les Cap. 10 et 11 du Lib. I des „Harmonika". Voyez aussi R. Westphal „Aristoxenus von Tarent, Melik und Rhytmik des classischen Hellenentums", Leipzig 1883, p. 251 et suiv. Suivant la théorie d'Aristoxène un ton entier est le double d'un demiton, une quarte vaut $2\frac{1}{2}$ tons et une quinte $3\frac{1}{2}$ tons. Comparez encore sur Aristoxène et ses sectateurs la note 16 de la p. 113 qui suit.

Sed dicet aliquis ſyntonum Ptolemæi [6]) convenire cum noſtra diatonica diviſione. Reſp. atqui cum cæteræ omnes ipſius diviſiones [7]) non poſſent ad concentum aptari, dixiſſet utique diſparem eſſe rationem harum atque illius diviſionis, multoque præſtare imo ſolam ſequendam illam ſyntoni [8]). Jam illud quod ditonum utrumque et hexachordon non eſſent conſonantiarum loco, cum eorum uſus adeo ſit neceſſarius, ut nullo momento a concentibus ditonus abſit. Etſi enim in Ptolemæi ſyntono habeatur ditonum et ſemiditonum cum hexachordo utroque [9]), ac videri poſſit dubitaſſe an non et hæc conſonantia eſſent intervalla nuſquam tamen id pronunciaſſe reperitur, nec alias quam Pythagorici recenſuit diapaſon diapente diateſſaron cum illorum repetitionibus [10]).

---

[6]) Dans le τετράχορδον διατονικὸν σύντονον (tétrachorde diatonique synton ou tendu) l'intervalle de la quarte est divisé en un ton mineur, un ton majeur et un semiton majeur d'après la formule $\frac{4}{3} = \frac{10}{9}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{16}{15}$ (Ptolémée, Harmonika I, Cap. 15, éd. Wallis, Oxford 1682, p. 76; éd. Düring, Göteborg 1930, p. 37). Ceci conduit à une division de l'octave

	C		D		E		F		G		A		B		c
avec les intervalles		$\frac{10}{9}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{16}{15}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{16}{15}$	

quarte | ton disjonctif | quarte

qui ne se distingue de l'octave du système harmonique naturel que par l'interversion des deux premiers intervalles.

[7]) Les autres tétrachordes envisagés par Ptolémée sont

enharmonium	$\frac{4}{3} = \frac{5}{4}\cdot\frac{24}{23}\cdot\frac{46}{45}$
chroma molle	$\frac{4}{3} = \frac{28}{27}\cdot\frac{15}{14}\cdot\frac{6}{5}$
chroma intensum	$\frac{4}{3} = \frac{22}{21}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{7}{6}$
molle diatonum	$\frac{4}{3} = \frac{8}{7}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{21}{20}$
medium molle diatonum	$\frac{4}{3} = \frac{9}{8}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{28}{27}$

[8]) En marge: Enarhomij [sic] chordæ quædam etiam ineptæ ad ſymphonias.

[9]) On a en effet $\frac{10}{9}\cdot\frac{9}{8} = \frac{5}{4}$ (tierce majeure); $\frac{9}{8}\cdot\frac{16}{15} = \frac{6}{5}$ (tierce mineure); $\frac{10}{9}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{9} = \frac{5}{3}$ (sixte majeure); $\frac{16}{15}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{16}{15} = \frac{8}{5}$ (sixte mineure).

[10]) Dans l'Avertissement aux Pièces I (Théorie de la consonance) nous avons exposé (p. 26—27)

Quod de consonantijs scripsere adeo multa id vel ob usum istius faux bourdon [11]) fecisse dici possunt, vel eo quod consonantium intervallorum ratio vel maxime sit habenda, etiam absque concentus usu; quia neque monodicus cantus nisi per intervalla consona fieri potest. nam si inter duos sonos consonos dissonus unus interjicitur is ad consonum gradus esse debet.

Etiam hoc quod divisione temporum carebant symphoniæ usum impediebat, non enim nisi simul omnes easdem syllabas proferre poterant, vel instrumentis canentes sonos ejusdem temporis, quod si nunc fiat quantum gratiæ peribit symphonijs.

In monumentis quæ extant monodici cantus inveniuntur, polyphoni vero diversarum partium nulli. nam illa *της κρουσεως σεμνα* jam satis constat non significasse diversos sonos citharæ ac vocis [12]).

D. II [13]) Recte existimat [Wallisius] monodicam fuisse musicam antiquam omnem, sed rationem nullam adfert, cum tamen sint plurimæ. 1° Nempe ipsa systemata tam varia, atque omnia ijs intervallis dispofita, ut consonantias non multas contineant, certè quamplurimis ad polyodiam necessarijs destituantur, quod ex numeris, quos in-

les raisons qui nous portent à admettre que Ptolémée n'a pas seulement douté „an non et hæc consonantia essent intervalla", mais que même „id pronunciasse reperitur", ou du moins, pour être plus exacts, „id non negasse reperitur". Voyez toutefois l'opinion de Mersenne exprimée aux pages citées et plus clairement encore dans le passage que nous citons dans la note 21 de la p. 114 qui suit.

[11]) Voyez la note 4 de la p. 78.

[12]) Archiloque de Paros (7ième siècle av. J. Chr.) passe pour l'inventeur d'une nouvelle façon de κροῦσις (accompagnement du chant). Plutarque p. e. écrit au Cap. 28 de son „De Musica": τῶν ἰαμβείων τὸ τὰ μὲν λέγεσθαι παρὰ τὴν κροῦσιν τὰ δ' ᾄδεσθαι, Ἀρχίλοχόν φασι καταδεῖξαι. D'autre part Plutarque écrit au Cap. 14 du même traité: σεμνὴ οὖν κατὰ πάντα ἡ μουσική, θεῶν εὕρημα οὖσα. Si nous réussissons à déceler l'auteur de l'expression τῆς κρούσεως σεμνά, nous en ferons mention dans les Additions et Corrections.

Alfred et Maurice Croiset dans leur „Histoire de la Littérature grecque" Vol. II, Paris, Fortemoing et Cie, 1914 s'expriment à ce propos comme suit (Chap. IV „Poésie iambique", p. 179): „Il est probable que l'ancienne musique accompagnait le chant note pour note; la réforme dut consister à laisser au jeu des instruments une certaine indépendance d'allure à côté du chant; il y eut désormais deux mélodies simultanées au lieu d'une; ces mélodies tour à tour se séparaient et se rejoignaient.... Il reste à vrai dire beaucoup d'obscurité sur la nature exacte de cette réforme musicale attribuée par l'auteur du *De Musica* à Archiloque". On voit que l'opinion de Huygens n'est pas généralement acceptée. Voyez encore ce qu'il dit sur ce sujet aux p. 99 et 100 qui suivent.

[13]) Portef. „Musica", f. 22. La Pièce *D* II fait partie d'une série de notes de Huygens se rapportant à l'„Appendix, De Veterum Harmonica ad Hodiernam comparata" ajouté par Wallis à son édition des Harmonika de Ptolémée (Claudii Ptolemæi Harmonicorum Libri Tres. Ex Codd. Mss. undecim, nunc primum Græce editus, Oxonii, E Theatro Sheldoniano, An. Dom. 1682) A la p. 316 Wallis discute la question de la musique classique polyphone.

ſigni labore reſtituit [14]), facile evincitur. 2° Quod ditonum et ſemiditonum pro conſonantijs non habuerint, quæ nunc in polyodijs fere ſemper unam partem e tribus ſupplent abſque quo harmonia completa non cenſetur. 3° Quod de ſervanda temporum menſura, ut nunc fit, nihil præſcripſerint, ſed tantum rythmum pedibus metricis eſtimarint. Nam abſque illa temporis viſibili notatione non poterat partium diverſarum concentus regi, præſertim ſi ſtante aliquo tono plures toni reſponderent. 4° Quod nihil prorſus apud tot veteres authores de ejuſmodi compoſito concentu memoriæ proditum reperiatur, nec nomina diverſarum partium, quas nunc Baſſum, Tenorem, Altum, Superius vocant. 5° nullum compoſitionis talis præceptum tradiderint, velut nunc habemus quod duæ diapente conſequentur poni non debent [15]) et alia plurima de vetitis proceſſibus. 6° quod nihil de diſſonantiarum uſu ſcripſerint quæ plurimum elegantiæ concentibus adferunt.

Quod autem nonnulli veterum admiratores, ſed muſicæ fere ignari cum alicubi mentionem factam inveniunt vocum diverſarum concinentium aliquid inde ſe conficere arbitrantur, id ejuſmodi fere eſt, quale illud de pyxide nautica quam, ex Plauti quodam loco ubi de verſoria capienda legitur, jam ab illo tempore cognitum fuiſſe ſuſpicantur [16]). quale etiam de Teleſcopij inventione quam a 300 annis extitiſſe probant, ex pictura ſcilicet in veteri MS. reperta, ubi quidam per tubum in cælum intuetur [17]). Non cogitant ſcilicet nec hi, nec qui concentibus iſtis antiquis favent, mille locis apud ſcriptores veteres earum rerum commemorationem extituram, ſi quidem in uſu fuiſſent illorum ætate.

---

[14]) Ceci se rapporte évidemment aux tables d'intervalles du Lib. II des Harmonika.

[15]) Voyez sur ce sujet la note 119 de la p. 129 qui suit.

[16]) Plaute, Mercator, vs. 875: „Huc secundus uentus nunc est: cape modo uorsoriam". De même dans la comédie Trinummus, vs. 1026: „cape uorsoriam". Nous citons d'après le texte de „Titi Macci Plauti Comœdiæ", ed. G. Goetz, Fr. Schoell, Lipsiæ, Teubner, IV, 1906 et VII, 1907. La „versoria" est apparemment une voile, ou plutôt une corde attachée à la voile, dont le renversement change le sens du parcours du vaisseau. Tandis que le „versorium" (comparez la l. 6 de la p. 349 du T. XVII), mot qui se trouve dans le „Tractatus de Magnete" de 1600 de Gilbert, désigne la boussole telle qu'elle se trouve dans la „pyxis nautica".

[17]) D'après J. B. Cysatus dans son ouvrage „De loco, motu, magnitudine et causis cometæ, qui sub finem anni 1618. et initium anni 1619. in cœlo fulsit", Ingolstadii, ex typogr. Ederiano, 1619. L'auteur dit à la p. 76 (Cap. VII): „... fuisse enim vsum Tubi Optici antiquis etiam Astronomis familiarem testatur liber vetustissimus in Bibliotheca celeberrimi Monasterii Scheurensis scriptus ante 400. annos, quo in libro inter cætera schemata etiam Astronomus per Tubum Opticum in cœlum intentum sidera contemplans visitur".

E. MÉRITE DES „BELGÆ", SUIVANT GUICCIARDINI, DANS L'ÉTABLISSEMENT OU RÉTABLISSEMENT DU CHANT POLYPHONE [1]).

Bannij Zangbericht [2]).

Omnes illos qui primi concentuum doctrinæ operam dedere, atque e tenebris eruerunt, fuiſſe Belgas ſcribit Guicciardinus in deſcriptione Belgij [3]).

Voyez auſſi ſur l'invention du chant polyphone la note 89 de la p. 124 qui ſuit.

---

[1]) La Pièce est empruntée à la f. 27r du portefeuille „Musica".

[2]) Joannes Albertus Bannius, né à Haarlem en ou vers 1598, mort dans la même ville vers la fin de juillet ou au commencement d'aôut 1644, fut prêtre catholique et grand ami de Constantyn Huygens père. Consultez aussi sur lui la note 6 de la p. 547 du T. II, ainsi que les „Correspondance et Oeuvre musicales de Constantin Huygens" publ. par W. J. A. Jonckbloet et J. P. N. Land, Leiden, Brill, 1882, p. XXXVI et suiv., et l'article de J. P. N. Land „Joan Albert Ban en de theorie der Toonkunst" dans le „Tijdschrift der Vereeniging voor Noord-Nederlands Muziekgeschiedenis" I et III de 1891.

Le „Nae-Reden ofte Kort Zangh-bericht" fait partie de l'ouvrage dédié à Const. Hnygens „Zangh-Bloemzel van Ioan Albert Ban, Haerlemmer; dat is, Staeltjes van den zinroerenden zangh; met dry stemmen, en den Gemeene-Grondt-stem. Neffens een kort Zangh-bericht, ten dienste van alle Vaderlandtsche Zangh-lievers", t'Amsterdam, bij Paulus Matthijsz. Voor Louis Elzevier op 't Water, inden Olm-boom. 1642. Cité par Jonckbloet et Land l.c. p. XLIX et suiv. (Zangh-Bloemzel) et CXXXV et suiv. (Zangh-bericht).

Dans le „Zangh-bericht" Bannius parle e.a. (fort brièvement) du „zamenzangh van meerder stemmen".

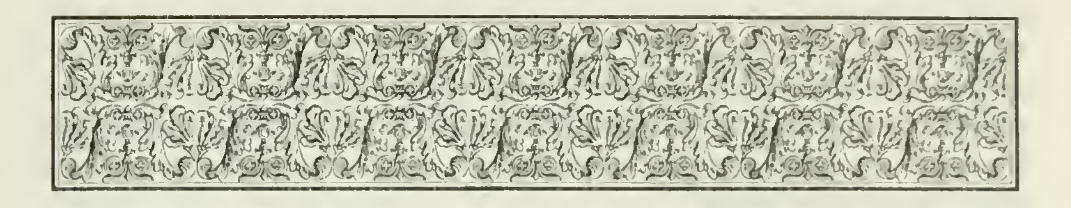
L'article de Land de 1891 fait voir que Constantyn Huygens considérait son ami comme trop doctrinaire, que, tout en appréciant ses connaissances théoriques, il ne l'estimait pas fort comme compositeur.

[3]) „Descrittione di M. Lodovico Guicciardini Gentilhuomo Florentino, Di Tutti i Paesi Bassi, Altrimenti Detti Germania Inferiore. Con tutte le carte di Geographia del paese, & col ritratto al naturale di molte terre principali; Riveduta di nuouo, & ampliata per tutto la terza volta del medesimo autore. Al Gran' Re Cattolico Don Filippo d' Austria. Con amplissimo Indice di tutte le cose piu memorabili". In Anversa, Apresso Christofano Plantino Stampatore Regio, MDLXXXVIII (la première édition est de 1567, la deuxième, amplifiée, de 1581). Plus tard il y eut encore de nombreuses éditions.

A la p. 3 l'auteur dit: „Attribuiscesi gloria particulare alla Belgia, d'essere stata inventrice di piu cose memorabili .... la Belgia essere stata restauratrice della Musica, & inuentrice di diuersi strumenti musicali". A la p. 42 il écrit: „Questi sono i veri maestri della Musica, & quelli che l'hanno restaurata & ridotta a perfettione, perche l'hanno tanto propria & naturale, che huomini, & donne cantan' naturalmente a misura, con grandissima gratia & melodia, onde havendo poi congiunte l'arte alla natura, fanno & di voce, & di tutti gli strumenti quella pruoue & harmonia, che si vede & ode, talche se ne truoua sempre per tutte le Corti di Principi Christiani". Il donne les noms de 28 „musici eccellenti" en ajoutant qu'il y a encore „molti altri tutti maestri di Musica celeberrimi, & sparsi con honore & gradi per il mondo".

IV.

NOTES SE RAPPORTANT À DES ÉCRITS DE MUSICOLOGUES ANCIENS.



Avertissement.

La distinction que nous faisons entre les notes se rapportant à des écrits de musicologues anciens d'une part, modernes de l'autre, est parfois plus ou moins arbitraire, puisque les musicologues modernes traitent souvent des écrits des musicologues anciens et que leurs remarques appartiennent donc aux deux catégories à la fois.

C'est ainsi que l'ode de Pindare, rapportée par Kircher, figure au § 1 de la présente Pièce et qu'il en est de nouveau question dans le § 5 de la Pièce suivante. Voyez donc aussi sur ce sujet l'Avertissement suivant.

La question de savoir si la musique ancienne — il s'agit évidemment surtout de la musique grecque — avait, oui ou non, une grande valeur paraît avoir donné lieu à des réponses fort différentes. Si d'une part le philologue Isaac Vossius l'exalte [1]), de l'autre Claude Perrault, auteur futur du „Parallèle des Anciens et des Modernes" qui est tout à l'avantage de ces derniers, l'assimile à celle des iroquois ou d'une autre nation quelconque encore barbare [1]). Huygens, lui, dit tantôt „que cette ancienne

[1]) § 8 de la Pièce V, à la p. 131 qui suit. Le père d'Isaac Vossius, Gerardus Joannes V., traite brièvement de la musique antique dans le Cap. XVI, intitulé „De choro tragico: item de melodia, et apparatu scenico", du Lib. II de ses „Poeticarum Institutionum libri tres" (Amsterdam, L. Elzevier, 1647), mais il n'exprime pas d'opinion sur la valeur de cette musique.

musique estoit tres peu de chose" [1]), tantôt — dans le § 1 de la présente Pièce — qu'elle n'était pourtant pas à son avis si mauvaise que les quelques échantillons conservés la font paraître; ce qui d'ailleurs est à peine en contradiction avec l'opinion précitée. Nous indiquons dans la note 2 de la p. 89 quels sont, sans doute, les échantillons dont il entend parler.

Mersenne appréciait la musique grecque bien plus que Cl. Perrault [2]). Nous croyons utile de citer aussi l'opinion exprimée en 1875 par F. Gevaert, s'efforçant d'exagérer ni d'un côté ni de l'autre [3]).

Mais si la *musique* antique paraît médiocre à Huygens, les *théories* des musicologues grecs au contraire l'intéressent vivement. Ses notes se rapportent à Aristoxène, Euclide, Nicomaque de Gerasa, Aristide Quintilien, Ptolémée, Alypius, Gaudence ou Gaudentius et Bacchius Senex qu'il lisait tous dans l'édition de Meibomius [4]). Parmi les questions qui attirent spécialement son attention, nous mentionnons celle de la polyphonie dans l'antiquité (à laquelle se rapporte aussi la Pièce III *D* qui précède), la signification des divers modes (comparez la Pièce III *B*), les particularités des divers genres, les systèmes de notes, la division du tétrachorde en différents intervalles et la réunion de tétrachordes en systèmes.

---

[2]) Mersenne, p. 558—559 de „La Verité des Sciences": „I'espere auec l'aide de Dieu que nous arriuerons à cette perfection [comparez la p. 66 qui précède], lors que nous traiterons de la Musique, ou du moins que nous en approcherons de fort pres, particulierement si ie peux rétablir ce que pratiquoient les anciens en leurs chants". Voyez cependant aussi la note 71 de la p. 121.

[3]) „Histoire et Théorie de la Musique de l'Antiquité" par Fr. Aug. Gevaert I, Gand, Annoot-Braeckman, 1875, p. 38 („Caractère de la Musique grecque"): „Le jugement définitif dont la musique grecque doit être l'objet ressort suffisamment des observations qui viennent d'être présentées. En toute chose, elle nous apparaît comme un art simple, incomplet par sa simplicité même. Elle manque de cette variété, de cette profondeur, de cette surabondance de vie, qui sont les conditions essentielles d'un art dont le but est précisément de réaliser ce qu'il est de plus mobile, de plus intime et de plus vital en nous. Sans tomber dans les exagérations de quelques critiques modernes, il est donc permis de lui assigner une place inférieure à celle qu'occupe notre musique dans l'échelle des manifestations du sentiment humain. N'oublions pas toutefois que l'art ancien, s'il n'a pas connu les grandeurs, les sublimes harmonies de la musique moderne, n'en a pas connu davantage les aberrations, les faiblesses. En donnant une part très restreinte à la sensation nerveuse, à la recherche de l'imprévu, il n'a pas développé en lui-même le germe de sa propre décadence".

Voyez encore sur ce sujet, outre la note 2 de la p. 89, la fin de la note 2 de la p. 78 qui précède (citation d'Aristote) et la note 4 de la p. 177—178 qui suit.

Il convient en outre de relever le deuxième alinéa du § 4 propofant de définir un ton normal à l'aide d'une fiftule de dimenfions données. Il femble au moins fort poffible, vu la tendance de Huygens à établir des étalons, qu'il s'agiffe ici d'une propofition partant de lui-même et non pas d'un auteur antique. Nous nous demandons pourtant pourquoi, dans cette hypothèfe, il intercale un pareil alinéa en cet endroit-ci. A-t-il fongé à quelque paffage d'Ariftote fur les *σύριγγες* et les *αὐλοί* [5]), ou peut-être à l'endroit de Boèce où celui-ci dit que Pythagore détermina les tons „longitudine calamorum" [6])? Il eft vrai que chez ces auteurs il ne s'agit que de hauteurs relatives. Il a pu fonger auffi, à la propofition de Merfenne d'établir des tons-étalons, non pas par des inftruments à vent, mais à l'aide de cylindres creux ou maffifs frappés par des „marches" [7]).

Nous publions comme Appendice les obfervations de Huygens fur les tons de fa flute [8]) en y joignant une figure indiquant qu'il a peut-être conçu l'idée de la sirène.

---

4) Nous mentionnons cette édition e.a. à la p. 362 du T. XIX.

5) Aristote, Probl. XIX, 23: *ἡ . . . . διὰ τοῦ μέσου τῆς σύριγγος τμήματος φωνὴ τῇ δι' ὅλης τῆς σύριγγος συμφωνεῖ διὰ πασῶν. ἔτι ἐν τοῖς αὐλοῖς τῷ διπλασίῳ διαστήματι λαμβάνεται τὸ διὰ πασῶν* etc. D'après le catalogue de la vente de ses livres en 1695 Huygens possédait les ouvrages d'Aristote.

6) Boèce, dans le Chap. 11, cité aussi à la p. 362 du T. XIX, du Livre I „de Institutione Musica" écrit: „Hinc [après avoir entendu les accords produits par les marteaux du forgeron] igitur domum reversus [Pythagoras] varia examinatione perpendit, an in his proportionibus ratio symphoniarum tota consisteret. Nunc quidem æqua pondera nervis aptans eorumque consonantias aure diiudicans, nunc vero *in longitudine calamorum* [nous soulignons] duplicitatem medietatemque restituens ceterasque proportiones aptans integerrimam fidem diversa experientia capiebat".

7) Dans son Corollaire à la Prop. IX du Liv. III des „Traitez de la Nature des Sons, et des Mouuemens de toutes Sortes de Corps" faisant partie de l'„Harmonie Universelle" Mersenne disait „que l'on ne peut rien establir de certain dans la Musique par la longueur des cylindres [il s'agit ici d'„instrumens à vent"], comme il est aysé de conclure par toutes nos experiences". Dans la „Premiere Preface generale au lecteur" (p. 8 non numérotée) de l'„Harmonie Universelle", où il renvoie d'ailleurs au „3. Liure des Mouuemens", Mersenne parle d'abord de „cylindres creux" disant: „les marches frapperont ces Cylindres, & les feront sonner tant doucement que l'on voudra . . . Or l'instrument fait de ces corps pourroit seruir de regle, de canon & de diapason immobile, & infallible pour regler, & pour accorder toutes les autres sortes d'instrumens, & chaque Cylindre creux, ou plain & massif, estant porté ou envoyé par tout le monde seroit propre pour communiquer le ton de l'orgue, de la voix, et des autres Instrumens & pour faire chanter vne mesme pièce de Musique en mesme ton par tous les Musiciens de la terre . . ."

Voyez aussi ce qui est dit sur les tuyaux d'orgue au § 4*b* (avec la note 75) à la p. 122 qui suit. Le diapason en forme de „tuning-fork" est attribué à John Shore, qui l'aurait inventé en 1711.

8) P. 104. Comparez la p. 377 du T. XIX.

La plupart des notes font empruntées au groupe de feuilles (1—45) dont il a été queftion dans l'Avertiffement des Pièces fur le chant antique et moderne; elles datent donc de 1672 ou, fort probablement, de plus tard. Seuls les §§ 1, 11 et 12 font empruntés à d'autres feuilles du portef. „Mufica"; aucune de celles-ci ne peut être antérieure à 1672: dans celle du § 1 Huygens cite un endroit du groupe 1—45, et les § 11—12 fe rapportent à l'édition de 1682 des „Harmonika" de Ptolémée par Wallis. Notons encore que la f. 20 porte à fon revers la note fur Werckmeifter déjà mentionnée à la p. 18 qui précède, de forte que les remarques de cette feuille-là fur l'édition de Wallis datent probablement elles auffi de 1691 au plus tôt.

Nous ajoutons un mot fur la date des citations de Théocrite (comparez la note 1 de la p. 1) par lefquelles le préfent Tome débute. Elles font fans doute de 1684 puifque la f. 1 fur laquelle elles fe trouvent porte une férie de noms qui font apparemment ceux des perfonnes à qui Huygens envoya fon „Aftrofcopia compendiaria" de cette année; ceci reffort e.a. du fait que les noms Leeuwenhoeck et van Durven y paraiffent à part: comparez la p. 502 du T. VIII où il eft dit que Leeuwenhoeck et les van Durven fe rendirent chez Huygens en juin 1684 pour voir le nouveau télefcope fans tuyau.

NOTES SE RAPPORTANT À DES ÉCRITS DE MUSICOLOGUES ANCIENS.

§ 1 [1]). Il paroit assez que les autheurs que nous avons de la musique anciene ont estè ou de philosophes peu entendus dans la pratique de cet art; ou de praticiens qui manquoit [sic] des sciences necessaires et d'intelligence pour la rediger par escrit. Outre cela leur escrits sont si fort corrumpus par l'ignorance des copistes et traducteurs, qu'une grande partie ne sçauroit estre entendue.

Il y en a qui ont voulu restituer quelques uns de leur airs, dont les notes, à leur maniere, se sont trouvees dans des vieux manuscrits [2]); mais il est assez evident par la mechante suite du chant en plusieurs endroits que les characteres ont estè depravez et changez par les copistes ignorants. Leur musique ne sçauroit avoir estè si mauvaise que ces echantillons la font paroistre, quoyque je ne croye pas qu'elle fust fort bonne ni reguliere [3]). L'ode de Pindare que Kircher raporte [4]) est le fragment le mieux conservè de cette musique anciene.

§ 2 [5]). πυκνὸν [6]) spissum interpretantur, forte melius confertum.

---

[1]) Portef. „Musica", f. 63v. Comparez sur ce premier § le deuxième alinéa de la p. 93 qui suit.

[2]) Evidemment Huygens entend parler — outre de l'ode de Pindare; voyez la suite du texte — des trois hymnes à la muse Calliopé, à Phébus et à Némesis découverts par „un Gentilhuomo Fiorentino, nella libreria del Cardinale Sant' Angiolo, in alcune carte che erano dopo a uno libro antichissimo in penna della Musica d' Aristide Quintiliano & di Briennio" et publiés par Vincentio Galilei, père de Galileo G., dans son „Dialogo della Musica Antica et della Moderna" (Firenze, 1581 et 1602), dont nous venons de citer la p. 96. Il existe de nombreuses éditions de ces hymnes, e.a. une de John Fell de 1672 — dans son édition d'Aratos et de fragments d'Ératosthène — avec des commentaires de Edm. Chilmead. Fell croit pouvoir dire (p. 48) „nostra veteribus longe esse potiora; si artificium & cultus, numeri & opes, vis denique & Majestas spectentur".

Il a été établi plus tard que ces hymnes sont de Mésomède de Crète, du deuxième siècle de notre ère, ce dont on peut se convaincre en consultant l'édition de 1895 de Carolus Janus ou von Jan des „Musici scriptores græci Aristoteles, Euclides, Nicomachus, Bacchius, Gaudentius, Alypius, et melodiarium veterum quidquid exstat", ainsi que le „Supplementum. Melodiarum reliquiæ" de 1899 (l'un et l'autre Lipsiæ, Teubner). L'ode de Pindare ne s'y trouve point: v. Jan doute de son authenticité. v. Jan donne les dates etc. des éditions antérieures des hymnes de Mésomède.

[3]) Comparez la note 135 de la p. 131 qui suit.

[4]) Comparez la p. 126 qui suit.

[5]) Les notes qui suivent (§ 2—10) sont empruntées aux f. 38v, 39r, 39v, 40r, 40v, 43r, 43v, 46r,

Eſt autem compoſitum ex duobus tetrachordi intervallis reliquo tertio minoribus. unde in diatonico genere locum non habet [7]).

Barypycni ſoni ſunt qui primas ſeu infimas pycni regiones tenent. Meſopycni qui medias. oxypycni qui ultimas [8]).

Ariſtid. l. 1. pag. 12 [9]).

§ 3. Eratoſthenis ſectio Canonis Pythagorici [10]).

Enarm. [11])	Chrom. [12])	Diat. [13])
60 MI	60 MI	60 MI
76 VT rem.	72 VT♯ rem.	67 RE
78	76 VT	75 VT
80 CI	80 CI	80 CI
90 LA	90 LA	90 LA
114 FA rem.	108 FA♯ rem.	101 SOL
117	114 FA rem.	113 FA
120 MI	120 MI	120 MI

Nicomachus Manualis l. 1. p. 24 ait Eratoſthenem male intellexiſſe ſectionem canonis Pythagorici [14]).

—

46v, 47r et 47 v du portef. „Musica". Voyez pour les §§ 11 et 12 les notes 69 de la p. 100 et 76 de la p. 102 qui suivent.

[6]) Dans les genres chromatique et enharmonique l'intervalle le plus haut du tétrachorde est plus grand que la somme des deux autres. Ces deux derniers forment ensemble un groupe de trois tons appelé πυκνόν. Huygens propose de remplacer par „confertum" la traduction usuelle „spissum", peut-être parce que „confertum" évoque, plus que „spissum", l'idée d'une grandeur discontinue.

[7]) Dans tous les genres diatoniques aucun intervalle d'un tétrachorde n'est supérieur à la somme des deux autres, de sorte que dans ces genres il n'y a jamais de „spissum".

[8]) Chaque „spissum" est composé de trois tons nommés par ordre de hauteur „barypycnum", „mesopycnum" et „oxypycnum".

[9]) Aristides Quintilianus est un musicologue du 1er ou 2ième siècle de notre ère. Huygens lisait son ouvrage „De Musica Libri III" dans l'édition de Marcus Meibomius „Antiquæ Musicæ Auctores Septem. Græce et Latine", Tome II. Amstelodami apud Ludovicum Elzevirium, 1652; nous citerons plus loin ce volume comme Meibom. II.

[10]) La „sectio canonis" d'Eratosthène nous est communiquée par Ptolémée, Harmonicorum Libri III, p. 170 et suiv. de l'édition de Wallis (Oxonii, 1682), p. 70 et suiv. de celle de Düring (Göteborg, 1930).

[11]) Suivant Eratosthène le tétrachorde enharmonique est divisé dans les intervalles: 19 : 15, 39 : 38, 40 : 39. Lorsque le ton Mi correspond à une corde de longueur 120, le ton de la corde de longueur 114 est inférieur à Fa puisque $\frac{120}{114} = \frac{20}{19} < \frac{16}{15}$. Ceci explique l'annotation „rem.", c.à.d. remissum, abaissé. La même remarque s'applique aux autres tons désignés par „rem."

§ 4. Tonum definiverunt [15]) differentiam inter diateſſaron et diapente, contentum ſcilicet ratione 9 ad 8. Recentiores hunc majorem vocant tonum, alterumque definierunt quem appellant minorem qui eſt 10 ad 9 ut nempe hi juncti faciant tertiam majorem. at ſecundum diviſionem Temperamenti intervallum tertiæ majoris quod eſt 10 ad 8 ſeu 5 ad 4, dividitur in duos tonos æquales qui ſunt rationis 5 ad $\sqrt{20}$ [16]). quæ ratio quanquam non ſit numero explicabilis hoc nihil refert, quia de intervallo conſono non agitur.

Definitio toni certa ac conſtans ex longitudine fiſtulæ ſeu cylindri cavi, cujus ſonus ſemper idem qualicunque ſit craſſitudine, ſaltem ſi non major ea fuerit quam pars decima vel circiter longitudinis [17]).

Cum veteribus non niſi diateſſaron diapente et diapaſon conſonantiæ cenſerentur [18]), vel hinc apparet concentu vocum caruiſſe quem nunc parties [19]) appellamus.

De modis nemo veterum quos habemus explicuit, qua in re diſcreparent niſi acumine et gravitate. de finali dominante et mediante tono nihil præceperunt, cum tamen ab his modorum conſtitutio pendeat [20]). Itaque apparet tantum ad chordas cytharæ et reliquorum inſtrumentorum reſpexiſſe.

---

[12]) Les nombres des rapports du tétrachorde chromatique sont d'après Eratosthène (l.c.) 6 : 5, 19 : 18 et 20 : 19.

[13]) Les nombres des rapports du tétrachorde diatonique — il s'agit du genre diatonique ditonié — sont 9 : 8, 9 : 8, 256 : 243. Les nombres donnés par Huygens sont arrondis. Ptolémée donne des valeurs plus exactes; en notation sexagésimale elles sont 60; 67|30; 75|56; 80; 90; 101|15; 113|54; 120. Le nombre 67|30 signifie $67\frac{30}{60}$. Voyez Ptolémée, Harmonica; éd. Wallis p. 172; éd. Düring p. 73 (en fractions ordinaires).

[14]) Nicomachi Geraseni Pythagorici „Harmonices Manuale" dans le Tome I de l'ouvrage cité dans la note [9]); tome qui sera cité plus loin comme Meibom. I.

[15]) Voyez p.e. Aristoxène „Harmonicorum Elementorum Liber I", Meibom. I, p. 21, où l'intervalle d'un ton (τὸ τονιαῖον διάστημα) est défini comme la différence des premières consonances (ἡ τῶν πρώτων συμφώνων κατὰ μέγεθος διαφορά).

[16]) Puisque $\left(\frac{5}{\sqrt{20}}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

[17]) Nous avons parlé de cet alinéa dans notre Avertissement.

[18]) Comme Huygens le dit aussi dans le dernier alinéa de la p. 36. Voyez cependant la note 10 de la p. 79.

[19]) Le mot français „parties" est employé pour indiquer le chant polyphone.

De claufulis quas nunc cadentias vocamus nihil etiam dixerunt [21]). has in diatonico non potuere habere cum hemitonijs, nifi fa mi fa, et ut ci ut. cum tonos ut♯ f♯ s♯ non haberent. Sed ex reliquijs cantionum quæ fuperfunt videntur claufulæ plerunque fuiffe fine reverfione, velut fol, fa, mi, f, m, r &c.

Si fymphonia ufi fuiffent, obfervaffent tres fonos femper confonare non annumerata diapafon. velut u, m, s, vel u, m, l, vel u, f, l. Sed nec divifiones canonis fymphoniam ferunt, præter diatonicam unam Ptolemæi vel Eratofthenis [22]).

Præcepta tradidiffent de ufu confonantiarum et diffonantiarum. quæ præcepta nunc potiffimam artis partem faciunt.

Ergo nullam apud illos muficam fuiffe nifi cantus fimplicis aut homophoni fi organa accederent [23]).

At paulatim repertæ fymphonicæ; primum in claufulis ubi baffus quartæ intervallo afcendit vel quintæ intervallo defcendit [24]). Hinc autem neceffarie tantum diatonicum genus vel cum chromate ut nunc habemus mixtum ufui effe potuit, ac diatonicum altera folum species quæ fyntonon [?], chroma vero unius fpeciei è tribus, nempe toniæum [25]).

§ 5. Diagrammata notarum quæ ex Alypio [26]) reftituit Meibomius ita funt ordinata ut proflambanomeni fingulorum 13 [27]) tonorum femitonio in acumen fefe excedant, utque eafdem habeant notas quas fonus ipfis conveniens in Hypodorio et alijs præcedentibus modis [28]). Ex. gr. dorij proflamb. notam habet eandem ac hypaton diatonos [29]) hypodorij.

---

[20]) Un mode ecclésiastique n'est pas encore déterminé par sa note finale puisque celle-ci est la même pour un mode authentique et pour le mode plagal correspondant. L'indication de la note dominante permet ensuite de distinguer ces deux derniers l'un de l'autre.

[21]) Huygens fait allusion au „subsemitonium modi" (note sensible), inférieur d'un demi-ton à la tonique.

[22]) Savoir le genre diatonique tendu (διατονικὸν σύντονον) de Ptolémée et le genre diatonique d'Eratosthène identique avec le genre diatonique ditonié de Ptolémée. Voyez Ptolémée, Harmonica, éd. Wallis, p. 172, éd. Düring, p. 73.

En effet, dans ces genres non seulement les sons fixes des tétrachordes successifs forment des intervalles consonants, mais il en eſt de même de tous les tons mobiles ou de quelques-uns d'entre eux.

[23]) Consultez sur d'autres considérations sur la question de savoir si l'antiquité a connu la musique polyphone (question qui intéresse Huygens tout spécialement) les Pièces III, *D* I et *D* II, aux p. 78 et 80 qui précèdent.

[24]) Ceci se rapporte à la soi-disante Clausula Bassizans, cadence stéréotype de la basse, consistant en un saut ascendant d'une quarte ou bien descendant d'une quinte.

[25]) En effet, ce n'est que dans ces genres que chacun des tons les plus bas de l'oćtave a une quinte supérieure.

Unde videtur hic auctor itemque Ariſtides Quint.[30]) diverſitatem modorum tantum in acumine et gravitate poſitam cenſuiſſe; imo vero antiqui omnes, quandoquidem iſtæ fuerunt ipſorum notæ ſingulis modis generibuſque convenientes quas Alypius deſcribit. Ptolemæus[31]) vero aliter eorum explicat differentiam, ſecundum quem dorius tonus fuiſſe videtur qui nobis hodie USU. Phrygius RLR. Lydius MLM; nempe plagius hic, et non MCM, qui non niſi acumine differret a RFL. Idem exceſſus modorum per hemitonia improbat[32]).

Puto autem ſcriptores illos muſicos excepto Ptolemeo, parum intellexiſſe quænam vera eſſet modorum differentia, quod inde quoque confirmatur quod nemo illorum differentiam cantionum quæ modi Dorij, Phrygij, Lydij, etc. eſſent explicuit, quæ nempe in uſu finalis mediantis ac dominantis ſoni ſita eſſe debuit[33]). At muſici practici proculdubio eam noverant. ſed hi explicare non poterant[34]).

Gaudentius pag. 21[35]). nonnunquam ſonum meſe pro proſlambanomeno ſumtum

---

[26]) Alypius est un musicologue grec florissant vers 300 après J. Chr., dont l'„Introductio musica" se trouve dans Meibom. I. Il donne une table des notes grecques.

[27]) Alypius (p. 96 qui suit) en donne quinze, conformément à la tradition post-aristoxénique.

[28]) Ceci doit s'entendre comme suit: le proslambanomenos de chaque ton du groupe moyen est désigné par le même signe que le ton de même hauteur (savoir le hypaton diatonos) du ton correspondant du groupe grave, caractérisé par la particule *hypo*.

[29]) *Hypaton diatonos* est un autre nom pour *lichanos hypaton*. Voyez p.e. Gaudentius „Harmonica Introductio", Meibom. I, p. 7.

[30]) Aristides Quintilianus „De Musica" I, Meibom. I, p. 23—24.

[31]) Ptolémée parle des différents modes dans le Cap. 9 du Lib. II des „Harmonica", éd. Wallis p. 128, éd. Düring p. 60. Nous ne voyons pas comment Huygens a pu conclure de ces considérations ou du traitement ultérieur du sujet que le mode dorien serait le même que VSV et le mode lydique le même que MLM. A cette identification s'oppose déjà la description des différents modes dans le Cap. 11 du Lib. II (éd. Wallis p. 136, éd. Düring, p. 64) dont on trouve un résumé dans I. Düring, „Ptolemaios und Porphyrios über die Musik", Göteborg, 1934, p. 79; le mode dorique y est caractérisé par la suite de tons et de demitons $\frac{1}{2}$, 1, 1, 1, $\frac{1}{2}$, 1, 1, tandis que pour VSV cette suite est 1, 1, $\frac{1}{2}$, 1, 1, 1, $\frac{1}{2}$.

[32]) Ptolémée „Harmonica", Lib. I, cap. 11, éd. Wallis p. 136, éd. Düring p. 64.

[33]) Voyez la note 20 de la p. 92.

[34]) Comparez le § 1 qui précède.

[35]) Gaudentius, „Harmonica Introductio", Meibom. I, p. 21.

[36]) Alypius, „Introductio Musica", Meibom. I, p. 2.

On trouve en marge la liste suivante contenant les noms bien connus des tons du grand système parfait:

L nete hyp.	V trit. diez. par. syn.	M hyp. mes.
S paran. hyp.	C paran. ♭ trite syn.	R lich. hyp.
F trit. hyp.	L mese	V paryp. hyp.
M nete diez.	S licha. mes.	C hyp. hyp.
R paranet. diez. nete syn.	F paryp. mes.	L proslamb.

ait, interdum alium fonum ex ijs qui inter proflamb. et mefen funt, nempe fecundum hunc aut illum modum, reliquos vero fonos ad proflambanomenon fuam eadem proportione ubique referri. Hinc vero concludit fingulis modis diverfas notas habuere debuiffe; quod non video.

Hoc autem confiderandum, an non chordas quafdam intendere aut remittere neceffe habuerint cum modum mutare vellent, quod fane videtur ita fuiffe, nam fi proslambanomenos hypophrygij L ex. gr. idem fonabat quod hypate hypaton hypodorij C, (ut apparet ex diagrammate Generis diatoni quod fecundum Alypium Meibom. reftituit[36]) jam hypophrygij hypate hypaton C non poterit referri fono parypates V hypaton hypodorij. quoniam ab hujus hypate ad parypaten eft $\frac{1}{2}$tonium CI, VT; at a proflamb. L ad hypaten C hypaton hypophrygij. et alius cujuflibet modi, debet effe tonus LA CI. Ergo neceffe fuit remittere chordam hypates C hyp. hypodorij, quando lyram hypophrygio modo accommodare volebant. eademque ratione parypate mefon hypodorij intendenda fuit hemitonio minore. Sed hæc mutatio tenfionum in chordis quibufdam hoc quidem efficiebat ut eandem cantilenam tono altius fonare poffent, fed ea non erat mutatio fecundum ἦθος, cujufmodi noftri temporis habet mufica. qualifque proculdubio etiam apud veteres fuit.

Ad hanc autem nihil opus erat mutare ullius chordæ tenfionem, uti nec apud nos. Ergo vel nos fcriptores illos non intelligimus, vel illi rem ipfam quid effet toni mutatio non intellexerunt.

§ 6. In modorum feu tonorum definitione differebant muficorum pofitiones quod et Ariftoxenus indicat inftit. harm. pag. 37, fimilem hic difcrepantiam effe dicens atque in horarum numeratione apud diverfos populos[37]). Ipfe nihil definit. Sed Euclides[38]) pag. 19 ipfius fententiam de 13 tonis refert, quorum ordo et exceffus ijdem ac apud Bacchium[39]) et Ptolemæum[40]). Euclides p. 16 fpeciem diapafôn quæ eft ab hypat. hyp. ad paramefen (a ci ad ci) mixolydiam vocari ait. cum tamen hic modus dicatur omnibus acutiffimus è feptem[41]). Euclidem fequitur Gaudentius[42]).

On ne doit apparemment pas regarder les notes ajoutées ici par Huygens comme désignant les hauteurs des tons en valeurs absolues; il ne s'agit que de hauteurs relatives: les tons mentionnés diffèrent autant entre eux que les tons grecs indiqués. P.e. proslambanomenos hypophrygii et hypate hypaton hypodorii diffèrent autant que La et Ci, donc un ton entier; de même hypate hypaton hypophrygii et parhypate hypaton hypodorii diffèrent d'un demi-ton, comme C et V.

[37]) Huygens fait sans doute allusion à un passage des „Harmonicorum Elementa", Lib. I, Meibom. I, p. 27. Toutefois en cet endroit Aristoxène excuse la confusion dans la définition des modes en la comparant non pas avec celle qui règne dans la numération des *heures*, mais avec celle qui se rapporte aux *jours*.

[38]) Euclide, „Introductio Harmonica", Meibom. I, p. 19 = „Euclidis Scripta Musica", éd. Menge,

Bacchius et Ptolemæus non definiunt modos nominibus chordarum, fed graviffimum ponunt hypodorium; inde reliquos hoc ordine, et exceffu qui ex adfcriptis noftrorum fonorum nominibus cognofcitur [43]).

Mixolydius	F	Hypolydius	C
Lydius	M	Hypophrygius	L
Phrygius	R	Hypodorius	S
Dorius	V		

Hæc autem difcrepant multum ab Euclidis et Gaudentij numeratione, in qua dorius acutior effet phrygio et hic lydio. Notandum tamen Euclidem et Gaudentium non loqui de tonis fed de diapafon fpeciebus, fi forte hæc diverfa inter fe fuere [44]).

§ 7. Ariftox. lib. 2 pag. 46. multos deceptos fuiffe ait quod putarent ipfum dicere tonum in 4 æqualia divifum cani [45]).

§ 8. Ariftides Quintilianus l. 1 pag. 23 [46]). Singulis Tonis feu modis fuas attribuit proflambanomenos, dicitque omnium 13 tonorum proflambanomenos contineri intervallo diapafon quia nimirum finguli Toni hemitonio fuper præcedentes afcendunt, ut hypodorius fit omnium graviffimus nec quicquam addit unde colligatur Tonos feu modos Veterum aliter quam gravitate et acumine difcretos fuiffe; quod vix credibile videtur; Certe Ptolemæus aliam modorum differentiam ftatuere videtur, lib. 2 Harmonic. cap. 7. Etfi non diftinctè explicet qua in re fita fit. Sed forfan in caufa eft inter-

---

Lipsiæ 1916, p. 218. Chez Meibomius il faut lire à la p. 20, l. 10 βαρύτατος au lieu de ὀξύτατος.

39) Bacchius Senex est un musicologue grec du quatrième siècle de notre ère.

40) Ptolémée, „Harmonica", Lib. II, cap. 15, éd. Wallis p. 173 sq. éd. Düring, p. 74 sq.

41) Cette contradiction apparente résulte d'une confusion entre le ton (τόνος) et le mode (ἁρμονία). Lorsqu'on écrit pour le grand système parfait La-La-La le mode myxolydien est rendu par l'octave B—B. Mais dans le système des tons le ton myxolydien ou hyperdorien est le plus haut des sept distingués par Ptolémée.

42) Gaudentius. „Harmonica introductio", Meibom. I, p. 19 dans une discussion des sept modes.

43) Ici de nouveau (comparez la note 36 de la p. 93) les notes ajoutées ne servent qu'à indiquer les intervalles successifs.

44) Il existe en effet une différence entre le ton (τόνος) et le mode (ἁρμονία, species, diapason). C'est à cette différence qu'il faut avoir égard pour expliquer la contradiction signalée par Huygens; voyez la note 41 qui précède.

45) Aristoxène observe à l'endroit cité qu'on chante les intervalles d'un demiton (ἡμιτόνιον), d'un tiers de ton (δίεσις χρωματική) et d'un quart de ton (δίεσις ἐναρμόνιος). Il paraît qu'on a donné de cette observation l'interprétation erronée qu'un ton serait chanté en quatre étapes successives d'un quart de ton.

46) Aristides Quintilianus, „De Musica", Meibom. II.

pretis Gogavini[47]) imperitia qui ita hunc auctorem vertit ut non fit intelligibilis. Apparet tamen differere Ptolemæum in eam fententiam ut non fuerit diverfitas modorum ex gravitate aut acumine, fed quod diverfi moris imagines auribus ingererent, ficut Dorium dixere virilem, Phrygium molliorem, Lydium lugubrem[48]).

Cum ex fpeciebus diapafôn Ptolemæus modos conftituat, non alienum eft credere extremos feu infimos fonos cujufque diapafon quo modus defignatur definiviffe l. 2. cap. 1 [?]. Quod fi verum eft, fequitur[49]) dorium modum fuiffe VSV qui primus noftrorum, Phrygium RLR, Lydium MCM vel potius MLM.

Alypius[50]) 15 modos ftatuit pag. 2. horum primum Lydium. Reliquos non enumerat fed credibile eft talem eorum ordinem agnofcere qualem in notarum defcriptione fequutus eft.

§ 9. *Epigonium* citharæ genus ab Epigono inventum, 40 chordas habebat. aliud *fimicum* vocatum, 35. Notis in Ariftox. p. 79[51]). Epigonus ifte digitis fine plectro fides pulfavit primus.

πυκνόν, fpiffum, eft quod ex duobus conftat intervallis quæ fimul addita minus intervallum continent eo, quod in diateffaron relinquitur. Ariftox. pag. 24[52]).

Pars toni dimidia canitur quæ dicitur hemitonium. Item toni pars tertia, quæ vocatur diefis chromatica minima. Item toni pars quarta quæ vocatur diefis enarmonia minima. qua nullum canitur minus intervallum. Ariftox. pag. 46. l. 2.

Genus diatonum duplex erat, molle, et fyntonum, quod vertit contentum[53]).

---

[47]) En écrivant ce paragraphe, Huygens se servait donc encore de l'édition de Gogavinus, Venise, 1562. Ces remarques ne sont donc, pensons-nous, pas postérieures à 1682, date de l'édition de Wallis. C'est cette dernière que nous verrons Huygens citer dans des notes ultérieures, dont l'une au moins semble, il est vrai, être de beaucoup postérieure à 1682 (voyez l'Avertissement).

[48]) Les caractères éthiques des différents modes ne sont pas mentionnés par Ptolémée. On en trouve un bon aperçu chez Reinach „La Musique grecque", Paris 1926, p. 46.

[49]) Voyez la note 31 de la p. 93 qui précède.

[50]) Comparez la note 27 de la p. 93.

[51]) Aristoxène „Harmonicorum Elementa Lib. I", Meibom. I, p. 3 parle de „Epigoniorum quidam" ce qui, suivant Meibomius „Notæ in Aristoxenum" p. 78, se rapporte aux disciples d'un célèbre musicien du nom d'Epigonus, natif d'Ambracia, et créé plus tard citoyen de Sicyon. Un instrument à quarante cordes de son invention, nommé „epigonium", est mentionné par Iulius Pollux Lib. IV, Cap. 59 („Pollucis Onomasticum" éd. E. Bethe, Vol. I, Leipzig 1900) qui parle aussi d'un autre instrument à 35 cordes, le „simicum". Lui et Athenæus (Lib. IV) racontent qu'Epigonus fut le premier à toucher les cordes avec les doigts, sans plectrum.

Dans le „Dialogo della Musica antica et della moderna" de 1581 de Vincentio Galilei on trouve aux p. 40 et 41 deux grandes figures représentant l'„epigonio" e le „simico".

[52]) Voyez la note 6 de la p. 90.

[53]) Aristoxène, „Harmonicorum Elementa Lib. II", Meibom. I, p. 51 distingue deux genres diatoniques, le genre diatonique amolli (μαλακόν) et le genre diatonique tendu (σύντονον), ce que

Molle, in quo diatessaron ab hypate ad mesen dividitur in hemitonium et intervallum trium diesium enarmoniarum et aliud quinque ejusmodi diesium. tota nempe diatessaron est 10 diesium enarmoniarum quarum duæ cedunt hemitonio. Contentum sive syntonum diatonicum constat intervallis hemitonij et toni et toni.

Hæ species diatoni etiam χρόαι colores [54]) vocantur. Introd. Harm. Euclidis pag. 10, 11. ubi et Chromatici generis colores 3 recensentur [55]). Secundum horum primum, vocatur Chroma molle, quod canitur per diesin chromaticam, quæ est $\frac{1}{3}$ toni et diesin illi æqualem et per intervallum incompositum quod æquale est tono et $\frac{1}{2}$ tono et $\frac{1}{3}$ ejusdem. Secundum alterum vocatur chroma sesquialterum, quod canitur per diesin et diesin quarumque utraque sesquialtera dieseos enarmoniæ et per intervallum incompositum septem diesibus enarmonijs constans. Tertia species chromatis denique est quod Toniæum dicitur quod eadem qua genus divisione utitur, quippe quod canitur per hemitonium et hemitonium et trihemitonium.

Meibomius traduit par „contentum".

Dans ces deux genres le tétrachorde des moyennes comprend les parties suivantes

	Diatonique amolli	Diatonique tendu
Mèse		
	5 dièses enharmoniques	ton = 4 dièses enharm.
Lichanos		
	3 dièses enharmoniques	ton = 4 dièses enharm.
Parhypate		
	demitons = 2 dièses enharm.	demiton = 2 dièses enharm.
Hypate		

où 1 dièse enharmonique $= \frac{1}{4}$ ton.

54) = nuances. χρόα δέ ἐστι γένους εἰδικὴ διαίρεσις.

55) Euclide „Introductio Harmonica". Meibom. I, p. 10 („Euclidis Scripta Musica", éd. Menge, p. 200). Les trois modes du genre chromatique sont déterminés par les divisions suivantes du tétrachorde des moyennes

	Chromatique amolli	Chromatique sesquialtère	Chromatique tonié
Mèse			
	$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$ ton	7 dièses enharm.	3 demitons
Lichanos			
	dièse chrom.	$\frac{3}{2}$ dièses enharm.	demiton
Parhypate			
	dièse chrom.	$\frac{3}{2}$ dièses enharm.	demiton
Hypate			

où 1 dièse chromatique $= \frac{1}{3}$ ton et 1 dièse enharmonique $= \frac{1}{4}$ ton.

Syſtemata in immutabili ſyſtemate non tantum ſunt diateſſaron, ſed et diapente diapaſon et compoſitorum ex diapaſon et diateſſaron, et ex diapaſon et diapente, et diſdiapaſon [56]).

§ 10. Pag. 15. Introd. Euclid. Per diverſas ſpecies diapaſon quæ ſunt 7, definit totidem, ut videtur, modos. Prima ſpecies inquit eſt cujus primus tonus eſt *in acumine* hoc eſt parte ſupera. eſtque ab hypate hypaton ad parameſen hoc eſt a *ci* ad *ci.* cur autem à *ci* ad *la* tonum vocet quaſi alij non eſſent toni in diaſtantia diapaſon, hinc eſt; quod in diapaſon illo non inveniatur aliud toni intervallum inter ſonos immobiles præter iſtud a meſe L ad parameſen C. immobiles autem adhibere non debebat quia in univerſum diapaſon omnium generum differentias explicare voluit [57]).

Pag. 17 et 18 [58]) explicat ſyſtemata perfecta minus et majus et ex his compoſitum quod immutabile vocatur. Minus eſt trium diateſſaron ſimilium et conjunctarum a *ci* ad *re.* una cum tono inter proſlamb. et hypat. hypaton. Majus ſyſtema eſt bis diapaſon a proſlamb. ad neten hyperbol. *la*, *la*, *la.*

Sed difficultas hæc eſt quod neceſſe ſit tertiam diateſſaron minoris ſyſtematis eſſe *la*, *ça*, *ut*, *re*, ut ſit ſimilis reliquarum duarum inferiorum, adeoque a meſe ad triten ſynnemmenon eſſe hemitonium. at in majori ſyſtemate oportet inferiorem diateſſaron eſſe *ci*, *ut*, *re*, *mi.*

Gaudentius [59]) de his ſyſtematibus ſcribens videtur ſignificare nunc hoc nunc illo

---

[56]) Euclide „Introductio Harmonica”. Meibom. I, p. 12—13 („Euclidis Scripta Musica”, éd. Menge, p. 210).

[57]) Il nous semble que les mots „cujus primus tonus est in acumine” doivent être interprétés autrement que chez Huygens. Le texte grec est le suivant: *τοῦ δὲ διὰ πασῶν εἴδη ἐστὶν ἑπτά. πρῶτον μὲν τὸ ὑπὸ βαρυπύκνων περιεχόμενον, οὗ πρῶτος ὁ τόνος ἐπὶ τὸ ὀξύ.* Le sens du dernier bout de phrase est apparemment: dont le ton fondamental est le premier ton (après le proslambanomenos) vers le haut. Cette interprétation écarte la difficulté signalée par Huygens.

[58]) Euclide „Introductio Harmonica”. Meibom. I, p. 17—18 („Euclidis Scripta Musica”, éd. Menge, p. 214). Les systèmes en question sont 1° le grand système parfait

$$\underline{a}\quad \underline{b}\quad \bar{c}\quad \bar{d}\quad \bar{e}\quad \bar{f}\quad \bar{g}\quad \bar{a}\ |\ \bar{b}\quad \bar{\bar{c}}\quad \bar{\bar{d}}\quad \bar{\bar{e}}\quad \bar{\bar{f}}\quad \bar{\bar{g}}\quad \bar{\bar{a}}$$

comprenant deux octaves et consistant en deux paires de tétrachordes conjoints, séparés par l'intervalle de la mèse à la paramèse (a—b) et précédés par l'ntervalle du proslambanomenos à la hypate hypaton ($\underline{a}$—$\underline{b}$);

2° le petit système parfait consistant en trois tétrachordes conjoints, comprenant ensemble l'intervalle d'un octave et quart

$$a\quad b\quad \bar{c}\quad \bar{d}\quad \bar{e}\quad \bar{f}\quad \bar{g}\quad \bar{a}\quad \overline{bes}\quad \bar{\bar{c}}\quad \bar{\bar{d}}$$

Pour *bes* Huygens écrit ici *ça*.

veteres usos fuisse. ait vero mesen a trite synnemmenon [60]) distare hemitonio, eandem vero mesen a paramese tono. nunquam vero composito ex utrisque systemate utebantur, quod inutiles fuissent synemmenôn tetrachordi duæ superiores; fortasse solam triten synemmenon adjungebant supernumerariam ut haberent C♭. Ptolemæus lib. 2. cap. 7 [61]) superfluum dicit tetrachordum synemmenon, ac ubique in recensione tonorum id omittit.

Hemitonium quod vocabant non ignorabant non esse toni dimidium. Nicomachus Manuale lib. 1. pag. 27 [62]), etsi diatessaron est $2\frac{1}{2}$ tonorum, diapente vero $3\frac{1}{2}$, non ideo diapason quod ex utrisque componitur est tonorum 6, sed 5 tonorum et 2 hemitoniorum quæ dicuntur. quæ si essent revera tonorum dimidia, fieret diapason tonorum 6. Est autem major, quod et Philolaus notavit [63]).

Duplices notas veteres versibus apposuisse scribit Gaudentius Harmon. Introd. p. 23. quarum superiores *τὴν λέξιν*, inferiores *τὴν κροῦσιν* ostenderint [64]).

Quorsum hoc si idem cantabant ac sonabant. Itaque hinc aliqui putant symphoniam cantus ac citharæ non fuisse homophoniam [65]). Sed cum alia multa contrarium suadent, tum hoc quoque quod eædem semper duplices notæ recurrant, adeo ut ad eundem sonum vocis semper idem tonus consonans apponi debuerit, quod absurdum est cum plane ineptus ingratusque auribus concentus hinc nascatur. Quid tamen significant illa, *λέξιν* nempe et *κροῦσιν* duplicibus notis designatas fuisse. Fortasse alijs notis cantores musici, alijs cytharedi, vel qui lyram pulsabant, assueverant; utque cantoribus superiores notas suffecisse scimus (quod veteres cantilenæ simplicibus hujusmodi scriptæ inveniantur) ita organa pulsantibus inferiores suffecerint; qui vero canere et pulsare

---

59) Gaudentius „Harmonica Introductio". Meibom. I, p. 7 et 8.

60) La trite synemmenon est le ton qui suit la mèse du troisième tétrachorde du petit système parfait (tétrachorde des conjointes), la paramèse est le premier ton du troisième tétrachorde du grand système parfait (tétrachorde des disjointes).

61) Ptolémée „Harmonica". Lib. II, Cap. 7, éd. Wallis p. 122, éd. Düring, p. 57.

62) Nicomaque „Harmonices Manuale", Lib. I, Meibom. I, p. 27.

63) Le texte de Philolaos cité par Nicomaque est, d'après Diels „Fragmente der Vorsokratiker", Berlin 1922, I, p. 312: *οὕτως ἁρμονία* (c.à.d. octave) *πέντε ἐπόγδοα καὶ δύο διέσεις, δι' ὀξειᾶν* (c.à.d. quinte) *δὲ τρία ἐπόγδοα καὶ δίεσις, συλλαβὰ* (c.à.d. quarte) *δὲ δύ' ἐπόγδοα καὶ δίεσις.*

Par *δίεσις* il faut ici entendre hemitonium. Philolaos savait donc que deux hemitonia n'équivalent pas à un ton $\left(\text{ἐπόγδοον} = \frac{9}{8}\right)$; sinon il aurait égalé l'octave à 6 *ἐπόγδοα*.

64) Gaudentius „Harmonica Introductio". Meibom. I, p. 23. La note marginale de Huygens percussionem interpr.s indique la traduction „percussio" donnée par Gaudentius de *κροῦσις*. Voyez sur les „duplices notæ" la p. 80 (note 12) qui précède.

65) Voyez sur la question de l'existence de la musique polyphone dans l'Antiquité la Pièce III *D.* à la p. 78 qui précède.

fides fimul vellent ijs utræque notæ adfcribendæ fuerint. quamquam infignis fuerit hæc iftorum hominum περιεργία. fed hanc mirari non debemus cum totum hoc harmonices negotium miris adeo tricis quibufque carere potuiffet, involutum fuerit. quid enim aliud diverfitas illa notarum uniufcujufque modi, quarum ab Alypio recenfentur [66]) . . . . atque ita ut chorda eadem fæpe alio charactere in fingulis modis defignaretur. Sane tenfionem chordarum non fuiffe mutatam in modis (quomodo enim inter fonandum potuiffent mutare modum, ut faciebant fepe) fed tantum in generibus fcimus [67]), et in his quoque non omnium. ut proinde facile potuerint ijfdem notis omnium tonorum odas perfcribere. Quod tamen aliter plane fe habet, nec ulla ratio reddi poffe videtur, nifi ut apud diverfos populos diverfæ notæ primum adhibitæ fuiffe dicantur, Lydios, Dores, Phryges. Quo exemplo cæteri quoque deinceps reperti modi diffimiles notas tum prioribus tum inter fe acceperint.

Si quis ergo interroget cur diverfæ notæ fuerint in cantu ac pulfu cum idem utrobique fonus defignandus effet; quæram et ego cur ijdem foni diverfas notas habuerint in diverfis modis. Eadem hic et illic refponfio, fuperfluis nimirum quampluribus oneratam fuiffe harmonicam veterum difciplinam, uti adhuc hodie non paucis laborat, quale eft ifta clavium quas vocant tanta varietas, quæ feptem funt, cum duæ aut tres fufficiant ac fortaffe nullis opus fit, fi aliam fcribendi rationem fequi placeat. Quia vero non nifi difficile admodum à recepta femel confuetudine difceditur, notarum fcriptio lineis quinque diftincta ut retineatur cenfeo cum non infcite alioqui excogitata fit. Quippe quod eadem nota et tonum et tono conveniens tempus oftendat [68]).

§ 11. pag. 172 Ptol. Harm. Wallifij [69]).

Diatonicum fyntonon Ptolemei [70]).

---

[66]) Alypius „Introductio Musica". Meibom. I. Voyez la p. 93 (note 26).

[67]) Voyez cependant ce que Huygens dit à la p. 94 (l. 5 et suiv.). Il s'agit ici d'une distinction des genres en genres diatonique, chromatique, enharmonique.

[68]) Il est assez connu que c'est seulement au douzième siècle qu'on a eu l'idée d'introduire un système de notes mesurantes, c.à.d. de notes indiquant par leurs formes la durée de chaque ton.

[69]) Portef. „Musica" f. 20v. Huygens cite ici — apparemment en 1691 ou plus tard, puisque la f. 20 r. se rapporte à un ouvrage de Werckmeister de 1691 (p. 88 qui précède) — l'édition „Claudii Ptolemæi Harmonicorum Libri Tres. Ex Codd. MSS Undecim primum Græce editus. Johannes Wallis . . . . . recensuit, edidit, Versione & Notis illustravit, & Auctuarium adjecit. Oxonii, E Theatro Sheldoniano, An. Dom. 1682.

[70]) Cette table se rapporte au genre diatonique tendu décrit, avec d'autres genres, aux p. 167 et suiv. de l'éd. Wallis, p. 70 et suiv. de l'éd. Düring. Les valeurs numériques des longueurs successives des cordes sont données en notation sexagésimale, éd. Wallis, p. 172 (en fractions ordinaires dans l'éd. Düring, p. 73). Les intervalles du tétrachorde sont 10 : 9, 9 : 8 et 16 : 15.
Les lignes { re 133.20 / ut 150.0 } ont été ajoutées par Huygens à la liste de Ptolémée.

	Diapaſon	
mi	60.0	> 10.9*
re	66.40	> 9.8
ut	75.0	> 16.15
si	80.0	> 9.8
la	90.0	> 10.9
sol	100.0	> 9.8
fa	112.30	> 16.15
mi	120.0	
re	133.20	* c. à. d.
ut	150,0	10:9
		9:8, etc.

Hæc diviſio proxime ad noſtram hodie uſitatam accedit, reliquæ tum Ptolemæi tum aliorum quas recenſet longius recedunt. Sed ne hæc quidem ejuſmodi eſt ut in Inſtrumentis Muſicis ea uti poſſimus ſi plurium partium concentu utendum ſit uti apud nos fieri ſolet. Erunt enim ut, ſol; ci, mi; la, mi; quintæ ut et fa, ut et ſol, re. at nequaquam re, la; ſed multo minor[71]). Item re, fa minor quam tertia minor[72]). Si igitur ad concentus ejuſmodi tonis inſtruxiſſent inſtrumenta, inveniſſent defectum hunc, dixiſſentque ſupplendum altero ſuperaddito *re* vel aliter. Quod cum non fecerint apparet concentum qualis nobis in uſu eſt non cognoviſſe. Idque etiam ex varietate illa reliquarum diviſionum clarius liquet, quæ multo pauciores conſonantias præbent.

Vult Zarlinus[73]) cantum vocalem per iſtos tonos incedere idque ita ut quæ intervalla imperfecta ſunt ſupplent ſponte ſua velut re, la. quod non poteſt fieri. ſi enim cantet diapente perfectam U, S, itemque S, r; tum deſcendendo diapaſon perfectam r, r: tum diapente perfectam r, l: ac porro deorſum tertiam majorem perfectam l, f; et hinc diapente perfectam ſurſum f, u. Iam hoc *ut* non erit diapaſon ad illud primum *ut* unde incepit canere, ſed altius commate integro[74]). Sic etiam ſi canat perfectis intervallis deorſum tertiam minorem f, r; ac rurſus ſurſum diateſſ. r, s; ac rurſus deorſum s, m; et ſurſum m, l: et deorſum tertiam majorem l, f; hoc fa non erit idem fa unde incepit cantus ſed Commate gravius[75]). unde repetito novies hoc cantu circiter tono integro deſcendiſſet vox. Hoc vero nequaquam contingere experientia docet; ejuſque

[71]) L'ntervalle $\frac{40}{27}$ re—la est en effet inférieur à $\frac{3}{2}$.

[72]) L'intervalle $\frac{32}{27}$ re—fa est en effet inférieur à $\frac{6}{5}$.

[73]) Probablement Huygens fait ici allusion aux remarques de Zarlino dans le cap. 45 de la Parte II des „Istitutioni Harmoniche": „Se nelle Canzoni seguitiamo cantando gli Intervalli produtti da i veri e sonori Numeri; overo li temperati: e della risolutione di alcuni dubij". Zarlino pense que la voix produit toujours des intervalles justes. Comparez la p. 65 qui précède.

[74]) Cette observation s'accorde avec le contenu de la Pièce III *C*, de la p. 76 qui précède. Sont successivement parcourus les intervalles $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{5}, \frac{3}{2}$ qui, dans leur ensemble, ne constituent pas un intervalle $\frac{2}{1}$, mais un intervalle $\frac{81}{40} = \frac{81}{80} . \frac{2}{1}$, c.à.d. un comma de plus qu'une octave.

[75]) Dans cet exemple les intervalles considérés $\frac{5}{6}, \frac{4}{3}, \frac{5}{6}, \frac{4}{3}, \frac{4}{5}$ forment ensemble l'intervalle $\frac{80}{81}$, c.a.d. un comma.

ratio eſt quod nimis inhæret memoriæ primus tonus fa, ut ab eo tantum deprimatur vox. Quid igitur fit? Nempe vel ipſo temperamento, quod adhiberi ſolet, vox utitur vel paulum diverſo, ſed quod idem efficiat tamen. Itaque non canuntur intervalla conſonantia perfecta.

§ 12[76]). Putat Walliſius, in Appendice ad Ptolemæi Harmonica[77]), Muſicam noſtri ævi ſolum genus diatonicum complecti, cum tamen chromaticum admiſceat non eo modo quo veteres (non enim rectè illi) ſed quomodo tantum ratio patitur. Imo cum et enarmonij quoque chordas uſurpemus, quas veteres illi abſurda quadam ratione adhibebant ſi unquam mere enarmonico genere cecinerunt.

Putat[78]) rationem 9 ad 8, et 10 ad 9 quæ tonos majorem et minorem conſtituunt aliquo modo concinniores eſſe quam e majoribus numeris compoſitos (quid vero de plane aſymmetris diceret?) quod verum non eſt. Nam nec iſtæ proportiones quidquam auribus gratum conſonant.

[76]) Portef. „Musica" f. 22r. Comparez la note 1 de la p. 375 du T. XIX. La f. 22—23 peut fort bien être antérieure à la f. 20 (note 69 de la p. 100 qui précède).

[77]) Appendix. „De Veterum Harmonica ad Hodiernam comparata", p. 281 et suiv. La remarque de Wallis (p. 300) est formulée comme suit: „Nostra vero ætate, vix aut ne vix aliud quam Diatonum intensum [in usu est]; aut quod huic suppar sit".

[78]) Huygens fait probablement allusion à la p. 322 où Wallis combat la division du tétrachorde dans les intervalles $\frac{9}{8}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{265}{243}$ (genre diatonique d'Euclide et d'Eratosthène et genre diatonique ditonié de Ptolémée) en alléguant qu'il s'ensuivrait pour la tierce mineure le rapport $\frac{32}{27}$ bien que la tierce mineure soit plus consonante que le ton entier $\left(\frac{9}{8}\right)$ „adeoque rationem exigere minoribus numeris exponendam".

[79]) Pour autant que nous voyons les exemples donnés par Huygens ne se trouvent pas dans le traité de Wallis. Mais il applique (p. 324 et suiv.) le principe sur lequel reposent les énoncés de Huygens, principe qui consiste dans l'introduction dans l'intervalle mi—la d'un ton, situé entre fa et sol, appelé „fa acuta" ou „sol mollis" et formant avec mi l'intervalle $\frac{8}{7}$, avec la l'intervalle $\frac{6}{7}$; il intercale de même dans l'intervalle de la tierce mineure $\left(\frac{6}{5}\right)$ un ton qui forme respectivement les intervalles $\frac{11}{10}$ et $\frac{11}{12}$ avec les tons le plus bas et le plus haut de cette tierce. Huygens a appliqué cette méthode à d'autres cas, application justifiée par la remarque suivante de Wallis (p. 325): „Atque hæ quidem . . . adhibendæ forent divisiones, pluresque interponendæ voces, si resumenda essent Veterum Genera Enarmonica, Chromatica, variaque Diatonica".

Ad interjicienda hemitonia chromatica putat [79]) rectè facturos si duplicentur 9 et 8, et inter 18 et 16 ponatur 17 pro hemitonio inter fa, sol. similiterque duplicatis 10 et 9, inter 20 et 18 statuatur 19 pro hemitonio inter sol, la, absurdè prorsus, nec attendit talia ponenda hemitonia quæ quamplurimis chordis diatonicis consonent. In enarmonicis chordis eadem methodo utendum putat quod adhuc magis alienum est.

APPENDICE
AUX „NOTES SE RAPPORTANT À DES ÉCRITS DE MUSICOLOGUES ANCIENS”.

[1686] [1])

TONS DE MA FLUTE [Fig. 1]

[Fig. 1] [2])

0 1
0 2
0 3
0 4
0 5
0 6
0 7
0 8

u	g . .(?) open [4])	u ×	8 open
r	8 open	r ×	87 open
m	87 open		
f	86 open	f ×	5 open
ſ	8765 open	ſ ×	48 open
l	123 toe [4])		
c	12 toe		
b	1245 toe		
u	13 toe	u ×	23 toe
r	3 toe	r ×	18 open
m	187 open	m♭	34567 toe
f	167 open. Soufflez un peu fort	f ×	12346 toe
ſ	1234 toe	ſ ×	1234
l	1234678 toe of		145 open
			12357 toe
c	12356 toe	c	1236 toe, met de 5 daer bij beg[in]nen [5])
b	123567 toe	u	125
u	125 toe	r	12347

1 est le trou du pouce 8 celuy du petit doigt. la ligne — deſſous les chiffres 1 [3]) signifie que ce trou doit eſtre ouvert en partie.

---

[1]) La Pièce „Tons de ma flute” mentionnée à la p. 87 de l’Avertissement, est empruntée à la p. 231 du Manuscrit E. La p. 227 porte la date du 5 mai 1686 et la p. 239 se rapporte à une publication de septembre 1686.

[2]) Comparez la Fig. 124 de la p. 377 du T. XIX.

[3]) Et apparemment aussi sous d’autres chiffres.

LA SIRÈNE (?)

[Fig. 2]

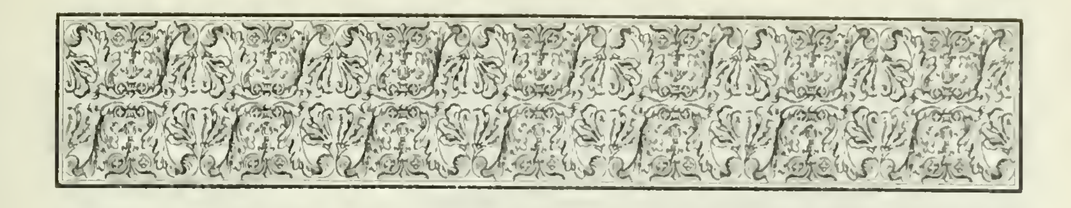
On trouve ſur les feuilles du porteſ. „Muſica” quelques figures ſans texte, qui ne ſe rapportent pas toutes à des inſtruments de muſique. Nous les publierons parmi les Varia; mais nous faiſons une exception pour la Fig. 2 indiquant que, pour meſurer les nombres des vibrations correspondant à des tons déterminés (comparez ſur ce ſujet la p. 375 du T. XIX), Huygens a peut-être conçu l'idée de la ſirène.

4) open = ouvert; toe = fermé.

5) Huygens dit ici que pour obtenir le ton c de la manière indiquée il faut au commencement tenir aussi le trou 5 fermé.

V.

NOTES SE RAPPORTANT À DES ÉCRITS DE MUSICOLOGUES MODERNES.



Avertiſſement.

Ces notes datent d'après 1671 * puiſqu'elles ſont empruntées en majeure partie au groupe de feuilles 1—45 déjà mentionné deux fois dans les Avertiſſements précédents. D'autre part le § 4b, emprunté au Manuſcrit E, eſt de 1674. Le § 8, emprunté au portefeuille „Phyſica varia", ne peut être antérieur à 1680 puiſqu'il traite d'une œuvre de Cl. Perrault qui parut en cette année [1]). Le § 1c, emprunté au Manuſcrit G, date de 1691, et le § 6, emprunté au même Manuſcrit, doit être environ de la même date. Le § 9 (ſur Werckmeiſter) eſt de 1691 au plus tôt.

Les remarques de Huygens ſe rapportent à Zarlino, Salinas, Maillard, Merſenne (et Vincentio Galilei), Kircher (parlant e.a. de Guido Aretinus), van der Elſt, Simpſon, Perrault, Werckmeiſter et Salmon, ce qui ne veut pas dire qu'on ne rencontrera le nom d'aucun autre muſicologue moderne dans cette Pièce-ci ou — nous ſongeons à Artuſi [2]) — dans les Pièces antérieures. D'autre part Merſenne a déjà été cité bien des fois dans les Pièces précédentes. Il en eſt de même pour Zarlino et Salinas. Nous avons rangé les auteurs nommés dans l'ordre indiqué d'après leurs dates de naiſſance.

* Voyez aussi la note 83 de la p. 123.

[1]) D'autre part le § 8 ne peut être postérieur à 1689 puisque Isaac Vossius qui décéda en février 1689 y est mentionné comme une personne encore vivante.

[2]) Voyez la p. 74 qui précède.

Il nous eſt impoſſible d'énumérer ici tous les ſujets traités.

Les notes ſur Salinas et Zarlino ſe rapportent ſurtout à la queſtion du tempérament traitée auſſi dans la Diviſio Monochordi et dans le Cycle Harmonique. Puiſque ce dernier écrit n'a reçu ſa forme définitive qu'en 1691 on peut conſidérer les remarques ſur ces deux auteurs comme des notes préparatoires.

Huygens a voué beaucoup d'attention à Kircher dont il paraît avoir étudié ſoigneuſement l'impoſante Muſurgia. Il critique les recherches expérimentales du jéſuite polymathe ſur la queſtion de l'exiſtence ou la non-exiſtence du ſon dans le vide et ſes conſidérations ſur les expériences de Merſenne ſervant à déterminer les fréquences des vibrations des cordes. Il eſt queſtion en outre du célèbre fragment que Kircher prétend avoir découvert de la muſique d'une ode de Pindare ſur l'authenticité duquel les muſicologues diſputent encore aujourd'hui [3]).

En liſant van der Elſt Huygens fait ſurtout attention à ſon eſſai de juſtification théorique de la défenſe des quintes, octaves, etc. ſucceſſives, queſtion brûlante à laquelle il a auſſi réfléchi lui-même. On l'a toujours ſu puiſqu'il en dit un mot dans ſon livre poſthume, le Coſmotheoros [4]).

Obſervons en dernier lieu qu'il n'approuve guère les remarques de Werckmeiſter ſur la repréſentation géométrique des différents intervalles ni auſſi le nouveau tempérament que cet auteur propoſe, tempérament qui, ſoit dit en paſſant, n'eſt nullement identique avec la gamme uniformément tempérée dont on a parfois voulu lui attribuer la paternité

[3]) Voyez la note 106 de la p. 126 qui suit.

[4]) Voir pour quelques remarques historiques sur cette question la note 119 de la p. 129 qui suit, où l'on trouve aussi un passage de Huygens sur ce sujet dans lequel il ne désapprouve pas absolument une suite de deux octaves. Quant au Cosmotheoros, il sera publié dans le T. XXI.

NOTES SE RAPPORTANT À DES ÉCRITS DE MUSICOLOGUES MODERNES.

§ 1. *a*[1]). **Salinas:** errat cum hexachordon minus item diapafon et femiditonum multafque alias confonantias putat Harmonicè et Arithmeticè dividi a confonis intervallis. æque ac diapafon, diapente, hexachordon majus et aliæ confonantiæ[2]). Tonos 12 cum Zarlino et plerifque alijs ftatuit[3]).

---

[1]) Portef. „Musica", f. 27. r. Les notes du § 1 se rapportent à l'ouvrage de Salinas „De Musica" de 1577 cité dans la note 7 de la p. 45.

[2]) Nous n'avons pas réussi à attacher un sens raisonnable à cette observation. Dans le Cap. 16 du Lib. II, intitulé „De consonantijs perfectis, & imperfectis. & quid sit Arithmeticè, & Harmonicè diuidi in consonantijs" Salinas parle de la division arithmétique et harmonique des intervalles. Un intervalle déterminé par le rapport $p:q$ des longueurs des cordes (où nous supposons $p < q$) est dit être divisé arithmétiquement dans les intervalles $p:r$ et $r:q$, lorsque r est la moyenne arithmétique de p et de q; harmoniquement, lorsque r est leur moyenne harmonique. L'octave (1 : 2) se divise arithmétiquement en une quarte inférieure (3 : 4) et une quinte supérieure (2 : 3), puisque les nombres 2, 3, 4 forment une suite arithmétique (nous rappelons que dans l'intervalle considéré p correspond au ton le plus haut et q au ton le plus bas), harmoniquement en une quinte inférieure et une quarte supérieure, puisque les nombres 3, 4, 6 forment une suite harmonique. Ces deux divisions sont également possibles dans les cas de la quinte, de la tierce majeure, et de la sixte majeure: la quinte se divise de deux manières différentes en une tierce majeure et une tierce mineure, suivant les séries 4,5,6 et 10,12,15; la tierce majeure en un ton majeur et un ton mineur, suivant les séries 8,9,10 et 36,40,45; la sixte majeure en une quarte et une tierce majeure, suivant les séries 3,4,5 et 12,15,20. Mais ces divisions ne sont pas possibles dans les cas de la quarte, de la tierce mineure, et de la sixte mineure, à moins qu'on ne voulût introduire des intervalles dissonants.

En admettant que dans la première ligne du texte il faille lire *diatessaron* au lieu de *diapason* („diapason" étant sans doute une faute d'écriture puisque l'octave ne peut guère être mentionnée entre la sixte mineure et la tierce mineure; d'ailleurs le „diapason" est mentionné de nouveau dans la troisième ligne, cette fois avec la quinte et la tierce majeure) on peut conjecturer que Huygens veut faire ressortir cette différence entre les deux groupes d'intervalles. Mais il n'est pas clair quelle est l'erreur qu'il croit devoir imputer à Salinas: dans le chapitre mentionné (16 du Lib. II) celui-ci dit lui-même que la quarte et la tierce mineure ne se divisent pas arithmétiquement et harmoniquement, comme il en est pour l'octave. En cet endroit il ne parle pas, il est vrai, de la sixte mineure. Mais dans le Cap. XXV du Lib. II il traite de nouveau la question des divisions harmonique et arithmétique, et cette fois il dit expressément que la sixte mineure, ainsi que la quarte et la tierce mineure, n'admettent pas ces divisions.

[3]) Huygens entend sans doute parler ici des 12 modes de la musique grecque et de la musique d'église (comparez les p. 69 et 70 qui précèdent) traitée par Salinas dans le Cap. XI du Lib. IV intitulé „Quòd nomina, quibus harmonias Græci, & antiqui Latini modos appellabant, mirificè quadrent duodecim modis, eo quo positi sunt ordine collocatis, neque aliter dispositis conuenire possint".

§ 1. *b*[4]). 1577 editus. Salinas lib. 3 cap. 27 de prava conſtitutione cujuſdam inſtrumenti ſcribit in Italia ab annis 40 inſtrumentum fuiſſe fabricatum, incerto auctore, in quo tonus omnis in 5 partes æquales diviſus erat, diapaſon in 31, ſemitonium majus 3, minus 2 partes habebat. Idque a magni nominis muſicis in pretio habitum. Deinde docet quomodo tonum illi in 5 partes æquales diviſerint, nempe ſumendo ab utroque termino ſemitonium majus, et ab horum terminis rurſus ſemitonium minus. quam diviſionem merito carpit quia non hoc modo in 5 æqualia tonus ſecatur[5]). Sed quod ſenſui ingratam eſſe hanc poſitionem aſſerit, fallitur. Recte enim ſe habet ad ſenſum, et a vera nihil pene differt ut demonſtrabo. Dicit non credere ſe quartum temperamenti genus inveniri poſſe. dicit illos ſemiditono tribuere dieſes ejuſmodi 8, ditono 10, diateſſaron 13, diapente 18, diapaſon 31. quod recte. Sæpe ſe expertum ait hoc modo diſponere inſtrumentum ſed ingratum auribus omnium ſonum prodijſſe, eoque hoc temperamentum ab omni harmonica ratione tam perfecti quam participati inſtrumenti[6]) abhorrere concluſit. Toto capite de hoc agit. Proculdubio non bene experimentum inſtituit.

§ 1. *c*[7]). Franciſcus Salinas De Muſica lib. 3 cap. 15[8]), tria genera Temperamenti

---

[4]) Portef. „Musica" f. 32 r. Le sujet du § 1 *b* est aussi considéré dans le (nouveau) Cycle Harmonique; voyez la p. 157 qui suit. Mais en cet endroit il n'est pas question, comme ici, de la manière dont, dans la construction de l'instrument considéré, s'effectuait la division du ton en cinq intervalles.

[5]) La construction se fait comme suit (Salinas, l.c. p. 165). Considérons un ton mineur (intervalle 10 : 9) appelé C—D (ce qui est en effet C—D dans le syntonon de Ptolémée). Ce ton mineur est la somme d'un demi-ton majeur et d'un demi-ton mineur (puisque $\frac{10}{9} = \frac{16}{15} \cdot \frac{25}{24}$). En montant à partir de C d'un demi-ton majeur on parvient à Des (D molle enarmonium). En descendant d'autre part à partir de D d'un demi-ton majeur on parvient à Cis (C chromaticum). Il faut ensuite descendre à partir de Des d'un demi-ton mineur et monter à partir de Cis du même intervalle. Les intervalles obtenus sont alors

C		C. chrom.	D molle enarm.		D
1	$\frac{128}{125}$	$\frac{25}{24}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{625}{576}$	$\frac{10}{9}$
dièse		dièse		dièse	

Quant au deuxième et au quatrième intervalle, ce ne sont pas des dièses, de sorte que le ton n'est pas divisé en cinq intervalles égaux.

[6]) Le terme „harmonica ratio perfecti instrumenti" s'applique apparemment au système harmonique naturel, tandis que la „harmonica ratio participati instrumenti" désigne le tempérament du ton moyen (voyez pour le terme „mezzo tuono participato" l'Avertissement de la „Divisio Monochordi" à la p. 45 qui précède).

[7]) Manuscrit G, f. 92 r. Les f. 79 et 93 portent respectivement les dates du 1 janvier et du 28 mars 1691.

[8]) P. 143 du livre de Salinas.

inventa ait, quorum primum ſit [9]), ut Comma, cujus ratio eſt 81 ad 80, dividatur in partes æquales tres; quarum una augeatur Tonus minor, (cujus ratio 10 ad 9) et duabus diminuatur Tonus major (cujus ratio 9 ad 8).

Secundum Temperamentum ſtatuit [10]) in quo Comma in 7 partes æquales diſtribuitur, quarum partibus 4 diminuatur tonus major; minor verò augeatur tribus.

Denique et Temperamentum Tertium idque optimum, exponit cap. 22 [11]).

Caput 27 eodem lib. 3° [12]), hanc habet inſcriptionem:

De prava conſtitutione cujuſdam inſtrumenti quod in Italia citra quadraginta annos fabricari cœptum eſt, in quo reperitur omnis Tonus in partes quinque diviſus.

Ait ignoti authoris eſſe, et archicymbalum vocatum. In eo ſemitonium majus habere $\frac{3}{5}$ toni. Semitonium minus $\frac{2}{5}$. A quibuſdam magni nominis muſicis in pretio habitum dicit et uſu receptum, eo quod omnis in eo ſonus habeat omnia intervalla et omnes conſonantias (ut illis inquit videtur) inferne et ſuperne, et poſt certam periodum ad eundem aut æquivalentem ſibi ſonum poſt 31 intervalla reditur &c.

Diapaſon in partes 31 æquales ipſis diviſa eſt, quarum partes 5 habet tonus, ſemiditonum ſeu tertia minor 8: ditonum ſeu tertia major 10; diateſſaron 13; diapente 18.

Ex ijs quæ de modo dividendi toni in partes 5 exponit quo illi utebantur, apparet ipſos ignoraſſe qua ratione id perfici poſſet. Hinc contra illos argumentatur, non dividere eos tonum in quinque dieſes ut putabant. Deinde facto experimento *tantum ſe ait inveniſſe conſonantiarum imperfectionem ut eam aures pati non poſſent.*

Hanc tamen diviſionem, atque hoc temperamentum optimum [13]) eſſe nec ſenſibiliter ab illo tertio quod in uſu eſt, differre, oſtendimus inventa per Logarithmos vera diviſione octavæ in 31 partes æquales; fiunt enim diapente $\frac{1}{110}$ commatis majores quam in vulgari illo Temperamento, adeo ut paulo meliores efficiantur.

Cap. 28 [14]) vult in violis [15]) ſemitonia omnia eſſe æqualia, ut olim puto Ariſtoxe-

---

[9]) Ce tempérament est traité dans les cap. 15—17 du Lib. III.

[10]) C'est le tempérament dit de Zarlino; voyez l'Avertissement de la „Divisio Monochordi" ainsi que la p. 168. Salinas le considère dans les cap. 18—20 et le compare avec le précédent dans le cap. 21.

[11]) C'est le système du ton moyen; consultez l'Avertissement de la „Divisio Monochordi". Salinas en traite dans le cap. 22 et le compare avec le précédent dans le cap. 23. Il s'agit toujours du Lib. III.

[12]) L.c. p. 164. Voyez la p. 157 qui suit.

[13]) Voyez la p. 153 et suiv. (Pièces se rapportant au „Cycle Harmonique").

[14]) Cap. 28 „De alio instrumentorum genere, quæ Lyræ, et vulgo Violæ vocantur, in quibus alio modo, quam in Organis, ac Cymbalis imperfectio Participata reperitur" (p. 166—168).

[15]) On entend par „Violæ" un „genus cythararum, quarum chordæ digitis, aut pectine pulsantur".

[16]) Aristoxène considère en effet le demi-ton comme la moitié du ton, ce dernier étant défini comme la différence d'une quinte et d'une quarte. C'est pourquoi sa division de l'octave est souvent

nus[16]). Sed nihil vetat quin efficiantur inæqualia ut in cymbalis noſtris et organis, quoniam non opus eſt chordas omnes ijſdem diviſionibus ſecari, a tranſverſarijs illis collo illigatis, quæ ijs locis ubi opus eſt, uni chordæ attribui poſſunt, ac ſeparatim deſigi, ut vera ſemitonia efficiant.

Cap. 31[17]). Paralogiſmus eſt, quod lineam extrema et media ratione continuè diviſam putat exhibere diviſiones ſemitoniorum in violis.

§ 2[18]). **Zarlino** lib. 3 cap. 6[19]). Etſi Didymus ac Ptolemæus tertiam majorem perfectam inter ſecundam quartamque chordam collocaverint, neuter tamen eam conſonantijs adnumeravit[20]). Merſennus et alij contrarium dixerunt[21]). unde putabam illos alia Ptolemæi ſcripta legiſſe, quorum ego copiam non habuiſſem.

---

jugée identique avec celle du système de la gamme uniformément tempérée; voyez p. e. R. Westphal „Aristoxenus von Tarent. Melik und Rhytmik des classischen Hellenentums", Leipzig 1883, p. 251 et suiv.; ou Th. Reinach „La musique grecque", Paris 1926, p. 22. On peut toutefois douter de la justesse de cette identification, puisqu' Aristoxène ne parle pas d'un tempérament, mais exprime la conviction que p. e. la quinte juste vaut sept demi-tons dont l'octave en contient douze. Zarlino dans ses „Sopplementi" de 1588 traite d'Aristoxène à la p. 161 et dans sa „Tauola" à la fin du livre résume ce passage comme suit: „non è da credere, c'hauesse detto semplicemente [Aristosseno], che'l Tuono si potesse diuidere in due parti eguali & proportionali, nel modo ch'ei lo diuide". Comparez sur ce sujet les notes 69 et 70 de la p. 121 qui suit.

[17]) Cap. 31 „Quòd propter diversam trium temperamentorum in Organis inventam constitutionem non varietur in Violis temperamentum superius positum, sed idem semper, immotumque manere contingat: et qualiter data quævis linea recta in quotcunque segmenta invicem proportionalia dividenda est" (p. 172—174).

En cet endroit Salinas veut indiquer sur une corde les points où il faut successivement la presser pour faire monter chaque fois le son d'un demi-ton. A cet effet il divise la corde *ab* en *e* en moyenne et extrême raison, *ae* désignant la plus grande partie; ensuite de la même manière *eb* en *f*, *ef* étant la plus grande partie etc. jusqu'a ce qu'il a obtenu douze points de division *e*, *f*, *g*, *h*, *i* etc. Il pense que lorsque, en partant de *b*, l'on presse successivement la corde en ces douze points, le son montera chaque fois d'un demi-ton et qu'on obtiendra l'octave du ton de la corde entière en la pressant au point *e*. C'est ce que Huygens appelle à bon droit un paralogisme.

[18]) Portef. „Musica", f. 41—42. Voyez sur Zarlino la note 2 de la p. 169 du T. X, sur ses ouvrages la note 8 de la p. 45 qui précède.

[19]) „Istitutioni Harmoniche" Parte III, cap. 6 intitulé „Diuisione delle Consonanze nelle Perfette & nelle Imperfette" (p. 188).

[20]) Voyez sur ce sujet notre Avertissement sur „la Théorie de la Consonance". Huygens ne fait, comme on voit, aucune différence entre Ptolémée et les musicologues antérieurs.

[21]) Huygens peut avoir raison pour les „alii" (voyez, à la p. 27 qui précède, notre citation de Titelouze); mais il se trompe en affirmant que „Mersennus contrarium dixit". Nous n'avons du moins pu trouver aucun passage de Mersenne où celui-ci „contrarium dicit". Il s'exprime fort

Zarlin. Ragionamento 4. propofta 1. dicit Temperamentum ab alio — quem qui fuerit nefcit — et cafu fuiffe inventum [22]). Item lib. 4. cap. 12. Supplementorum Muficalium multum laudat hoc inventum [23]). Inftitut, lib. 2. cap. 42 [24]). Temperamentum non optimum docet in quo 3^{tiae} majores et minores æque multum a perfectione abfunt, et quintæ quartæque $\frac{2}{7}$ commatis. Et cap. 43. demonftrare contendit aliud temperamentum tolerabile non dari, et improbat illud quod tono majori adimit $\frac{1}{2}$ comma ac tantundem tono minori addit. quod tamen verum atque optimum eft temperamentum [25]). fed ab illo tunc non adhuc bene perfpectum. ita enim proponit ut 5^{tas} et 4^{tas} relinquat perfectas [26]).

Salinas [27]) idem explicat et pretend l'avoir trouvè auffi bien que Zarlin, c'eft a dire l'explication ou demonftration. il parle feulement des Inftit.^{ons} de Zarlin et non pas des demonftrations ou le vray temperament docetur [28]), et que Zarlin dit avoir eftè imprimees auparavant le livre de Salinas [29]).

---

clairement en 1633 à la p. 257 de ses „Questions harmoniques dans lesquelles sont contenues plusieurs choses remarquables pour la Physique, pour la Morale, & pour les autres sciences" (Paris, Iaques Villery); on y lit: „Certainement les Anciens ne connoissoient pas si bien les degrez de la Musique que ceux de maintenant; cas ils ne mettoient que le ton majeur, & le demy ton Pythagoricien, & n'usoient point des deux tierces que nous auons, & qui font quasi toute la varieté de la Musique, qui seroit tres-imparfaite sans elles. Et bien que Ptolomée ayt mis le ton majeur, & le mineur, & par consequent le demy ton majeur, & les 2 tierces, auec les 2 sextes, dans l'une de ses especes de la Diatonique, neantmoins il ne les a pas admises pour consonances; Ce qui fait voir tres-clairement qu'il n'en a point reconnu l'excellence, la douceur, & l'utilité".

22) „Dimostrazioni Harmoniche." Ragionamento IV. Proposta I „Potiamo dimostrar nel Genere diatonico la Compositione del Monochordo regolare". Zarlino ne dit pas nettement qu'à son avis le tempérament a été trouvé par hasard: il observe (p. 200) que l'inventeur, qu'il l'ait trouvé par hasard ou bien par réflexion („à càso, ouero studiosamente"), a découvert quelque chose de bien remarquable.

23) Dans le Cap. XII du Libro Quarto des „Sopplementi" Zarlino dit e.a.: „Partecipatione ò Temperamento ..... laqual in uerità è stata di non poco giouamento alla Musica, & di non poco commodo à quelli che trattano cotali Istrumenti; all' Autor delquale, sia stato che si uoglia, si dee hauer molto obligo; del che, per quanto fin' hora si uede, non è alcuno, che n'habbia reso la vera cagione; ne io anco uoglio prometter di far questo; ma solamente diro quel che sento, & ch' io tengo per fermo, fin che si troui miglior ragione".

24) „Istituzioni Harmoniche" Parte II, Cap. 42 „Quel che si dee osservare nel temperare overo accordare gli Istrumenti arteficiali moderni" etc. Il y est question du système dit de Zarlino. Voyez l'Avertissement de la „Divisio Monochordi".

25) C'est le système du ton moyen. Voyez l'Avertissement de la „Divisio Monochordi".

26) „Istituzioni Harmoniche", Parte II, cap. 43. Zarlino y critique en effet le système du ton moyen en disant à tort que seuls les tons entiers sont rendus égaux l'un à l'autre, tandis que les autres intervalles garderaient leurs valeurs naturelles.

27) „De Musica", Lib. III, cap. 14 (p. 140): „Quod non sit nova consonantiarum imperfectarum in

Mon opinion eſt que le Temperament veritable[30]) a eſtè longtemps auparavant practiquè par les organiſtes &c. ſeulement a l'ouie en diminuant un peu les quintes, ſans examiner aucunement la proportion de cette diminution qui n'appartenoit qu' aux geometres. Et la pluſpart des organiſtes l'ignorent encore et j'en ay trouvè qui nioient que les tierces majeures et 6tes mineures fuſſent juſtes.

Zarlini Instit.^{s} et Demonſtr. eodem anno 1589 editas habeo. Supplementis adſcribitur annus 1588[31]). Neſcio an non Inſtitutiones ante editæ fuerint[32]). At in inſtitutionum editione hac allegat demonſtrationum opus, de participatione ſeu temperamento loquens parte 2da cap. 41. ubi trium temperamentorum meminit[33]), sed unum tantum explicat et admittit ubi $\frac{2}{7}$ commatis diminuuntur $5^{tæ}$[34]). At in demonſtrationibus prefert omnibus illud ubi $\frac{1}{4}$ commatis aufertur 5^{tis}[35]). Hinc plane opinor Inſtitutionum ſecundæ editioni aliquid fuiſſe adjectum[36]).

Cap. 47. Parte 2 Inſtit.[37]) Clavicymbalum ſuæ inventionis deſcribit ubi adjunctæ ſunt chordæ Enarmonicæ præter Chromaticas. Tonum ibi ait diviſum in 4 partes. Ego in 5 partes eum divido. Palmulas bene ordinat, ſed tamen difficultas erit in ſonando quod enarmonicarum et chromaticarum vicinia faciet ut ſæpe duæ ſimul pro una deprimantur.

Il fait fort valoir ce qu'il ſcait de la geometrie, ce qui ne regarde que les proportions comme tous les autres qui ont fait les docteurs en muſique Boethius, Glareanus, Salinas.

Il a brouillè tout par le meſlange de la muſique anciene et de ſes termes parmi la moderne[38]). comme en nommant les tons par les noms des Grecs hypate hypaton trite diezeugmenon &c. et parlant touſjours des tetrachordes.

Musicis instrumentis positio, sed eas semper usus obtinuerit: et omnino necessario ponendas esse".

28) „Dimostrazioni Harmoniche", Ragionamento IV, Prop. I, p. 198 et Rag. V, Prop. I, p. 259.

29) Ceci est en effet parfaitement juste. Les „Dimostrazioni Harmoniche" parurent en 1571 et 1573, l'ouvrage de Salinas en 1577.

30) Le tempérament du ton moyen.

31) Les „Sopplimenti Musicali" mentionnés plus haut (note 23). Le Catalogue de la vente de 1695 des livres de Chr. Huygens (p. 389 du T. XIX) mentionne en effet (Libri Mathematici in Folio N°. 48) „Tutte le Opere di Gioseffo Zarlino con i Supplementi Musicali, Ven. 1588".

32) Elles avaient en effet été publiées en 1558, 1562 et 1573.

33) Dans le chapitre mentionné („che ne gli Istrumenti artificiali moderni non si adopera alcuna delle mostrate specie Diatoniche") on lit à la p. 152: „in tre maniere (lasciando alcuni altri modi da un canto per breuità), si può fare il Temperamento di qual si uoglia de i nominati Istrumenti, & la Distributione del nominato Côma, etc."

34) Savoir dans le Cap. 42 de la Parte II des „Istitutioni Harmoniche".

35) Ce système est annoncé comme une nouvelle découverte à la p. 241 dans le Ragionamento V

Il ſe glorifie beaucoup d'avoir trouvè qu'on chante aujourdhuy l'eſpece de diatonique que Ptolomee nomme ſyntonon [39]). ce qui eſt vray; s'entend meſlee des chordes chromatiques. Dans ſes demonſtrations harmoniques ou il enſeigne le bon et veritable temperament [40]) il n'adjoute pas les demitons ou tons chromatiques, ni meſme le C♭. Et ainſi il n'a pu remarquer deux quintes et 2 quartes que l'on gagne par ce temperament. qui ſont C♭F et CF♯ quintes et FC♭, F♯C quartes.

Ces conſonances eſtoient imparfaites dans le monochorde diatonique ou les quintes et tierces ſont parfaites. Et le remede du double D ou RE ne faiſoit rien a celleſcy, quoyque il donnaſt la quinte parfaite RL, et par conſequent la quarte parfaite LR, comme il a remarquè [41]); mais il ne devoit pas dire que c'eſtoit gagner 2 quintes et 2 quartes car ce n'eſt qu'en conſiderant le ſyſteme de 2 octaves de ſuite depuis L a L³ ou il a deux fois RL et LR.

En adjoutant les tons chromatiques aux diatoniques on n'avoit pas le S♯, ni le M♭.

Sur les inſtrumens qui n'avoient que les ſons diatoniques ils ne pouvoient pas faire les cadences RV♯R, SF♯S, LS♯L.

Cap. LXXIX tertiæ partis inſtit. [42]) exiſtimat antiquos muſicos cantum ita junxiſſe liræ citharæ alijſque organis ut fuerit quod nunc appellatur un faux bourdon d'octave quinte et quarte. Vel etiam abſque cantu, putat altera manu eaſdem chordas iſtius faux bourdon ſonare ſolitos, dum alterâ cantilenam iſti conſonantiæ accommodatam exprimebant ſimplicibus tonis. Et hæc ſententia vero non eſt abſimilis [43]).

---

des „Dimostrazioni Harmoniche". Il est expliqué aux p. 259 et suiv.

[36]) En effet, le passage considéré (note 33) ne se trouve pas encore dans la troisième édition des „Ist. Harm." Huygens appelle deuxième édition celle de 1589 qui est en réalité la quatrième.

[37]) „Ist. Harm." Parte II, Cap. 47 „In che maniera possiamo inspessare il detto Monochordo con le chorde Enarmoniche".

[38]) „Dimostrazioni Harmoniche", Rag. IV, passim.

[39]) Zarlino parle de ce sujet dans les „Ist. Harm." Parte II, cap. 16 „Quel che sia Genere, e di tre generi di Melodia, o Cantilena appresso gli Antichi, e delle loro specie". Nous ignorons à quel passage Huygens fait allusion en disant „Il se glorifie beaucoup".

[40]) Voyez la note 35.

[41]) „Dimostr. Harm." Rag. V, p. 263.

[42]) „Ist. Harm." Parte III, cap. 79 „Delle cose che concorreuano nella compositione de i Generi" (p. 372). Zarlino ne se sert pas de l'expression „faux bourdon"; il parle comme suit: „Et io tengo per fermo, ch' alcune delle chorde de i loro Istrumenti erano accordate. . . . per Ottaua, per Quinta, & per Quarta; & l'Harmonia che usciua da queste chorde, sempre si udiua continuata & senz' alcuna quiete, mentre sonauano: & dopoi sopra di esse faceuano vna parte al modo loro con l' altre chorde più acute".

Cap. 75 parte tertia Inſtit. Zarl. [44]) incompoſitum intervallum vocatur ex. gr. ſemiditonus in Genere chromatico, ditonus in Enarmonio quod illic abſque ullo ſono medio accipiantur. Eſt enim MFF̋L tetrachordum chromaticum. MM̋FL tetrachordum enarmonium. Idem ditonus et ſemiditonus in genere diatonico vocantur intervalla compoſita. Non bene mihi videntur uti ſigno × ad notandos ſonos enarmonios. melius enim ſignis ̋ et ̗ omnia perficiuntur, quorum illud indicat appoſitionem ſemitonij minoris ſurſum ſeu in partem acutiorem; alterum vero remiſſionem ſimilis ſemitonij deorſum ſeu in partem graviorem.

Cap. 74 ibid. [45]). Si ad veterum normam cantum componere libeat, nihil vetat generibus quibuſque ſimpliciter uti; ſi vero concentum deſideremus qualis hodie viget, fruſtra conabimur uti chromatico vel enarmonio ſolis.

Cap. 19. Rag. 1 [46]). Male ſupponit terminos datos quibus medius prop. harmonicè inveniendus eſt differre inter ſe unitate. deinde in demonſtratione plane παραλογίζει.

Duodecima, octava, ſexta major, quinta a tono intermedio conſono harmonice dividuntur non autem 6ª minor licet ipſa quoque tonum intermedium conſonum biſariam recipiat.

§ 3 *a* [47]). **Maillard** [48]) eſcrit que l'octave contient moins de 6 tons.

Salinas croid [49]) que la ſixte mineure ſe diviſe authentiquement et harmoniquement par la tierce mineure en bas et par la majeure, ce qui eſt faux. Et il aſſure la meſme choſe de pluſieurs autres conſonances ou cela n'eſt pas vray non plus.

§ 3 *b* [50]). P. Maillard des modes imprimè 1610 [51]). Chap. 10 [52]). Il parle de l'addition

---

[43]) Comparez sur le faux-bourdon ici considéré la p. 65 qui précède.

[44]) „Ist. Harm." Parte III, cap. 75 „Che 'l Diatonico può procedere nelle sue modulationi per gli Intervalli di Terza maggiore, & di minore; & che ciò non faccia variatione alcuna di Genere".

[45]) „Ist. Harm." Parte III, cap. 74 „Che la Musica si può usare in due maniere; & che le cantilene, che compongono alcuni de i Moderni, non sono d'alcuno de i due nominati Generi".

[46]) „Dimostr. Harm." Rag. I, Prop. 19 „Tra due dati termini di qual si voglia proportioni, si può ritrouar' il mezano: il quale constituisca la Proportionalità harmonica; ouer quello che faccia la Contr'harmonica, ne i suoi termini radicali".

[47]) Portef. „Musica", f. 31 v.

[48]) Pierre Maillart, né vers 1550 à Valenciennes, devint en 1583 chanoine et chantre de la cathédrale de Doornik (Tournay). Il décéda en 1610. Voyez sur son ouvrage la note 51; la remarque citée s'y trouve à la p. 11 du Ch. III.

[49]) Comparez la note 2 de la 111 qui précède. Nous y avons déjà dit ne pas savoir à quel endroit de Salinas Huygens fait allusion. Nous n'avons pas réussi non plus à trouver chez lui un terme qui pourrait être rendu par le mot „authentiquement".

[50]) Portef. „Musica", f. 34. r.

[51]) Voici le titre complet de cet ouvrage: „Les Tons, ou discours, sur les modes de musique, et les

du Sy aux 6 notes de Guido, et mesme de o pour huictieme qui fait l'octave du Vt [53]). Et dit que l'an 1574 qu'il demeuroit a Anvers on ne parloit entre les musiciens que de ces nouvelles notes. Il meprise [54]) cette invention, disant qu'apres le LA on fait suivre tantost un ton entier et tantost un demi-ton, et que partant on ne sçauroit donner un certain nom a la note apres le LA: *voila une bonne raison!*

Il loue [55]) extremement l'invention des 6 notes de Guido et croit qu'il ait voulu indiquer par la les 6 modes authentiques [56]). Et comme le Sy ou Ci ne peut constituer un mode pour n'avoir de 5 en haut ni 4 en bas, c'est pour cela [57]) qu'il croit ce ton indigne d'avoir un nom.

Il dit [58]) que Eric Puteanus dans son traitè Musathenum adjoute aux 6 notes de Guido le BI [59]). Il avoue [60]) que par cette methode on apprend facilement a chanter

---

tons de l'église, et la distinction entre iceux, de Pierre Maillart Valencenois, chantre et chanoine de l'église cathedrale de Tournay: Divisez en deux parties: ausquelles a esté adioustée la troisiesme, par le dict Autheur, en laquelle se traicte des premiers elements et fondements de la Musique". A Tournay. Chez Charles Martin Imprimeur Iuré, au S. Esprit. 1610.

52) L.c. p. 61. Chap. X „Où est respondu à aucunes obiections".

53) En marge: Il met l'invention de Guido a l'an 1024 selon Genebrardus. Buttler met l'an 960. Maillart cite Genebrardus à la p. 49.

Gilbert Genebrard, érudit et prélat français, né à Riom en 1537, mort a Semur en 1597, publia un grand nombre d'ouvrages dont beaucoup sont des traductions.

Charles Buttler naquit en 1599 à Wycombe et décéda le 29 mars 1647 à Wootton. Il écrivit „The Principles of musick, in singing and setting; with the twofold use thereof, ecclesiastical and civil", London 1636.

54) L.c. p. 64.

55) Maillart parle de l'invention de Guido aux Chap. IX (p. 49 et suiv.) et X (p. 65).

56) L.c. p. 50, 57 et suiv.

57) L.c. p. 52.

58) Maillart cite (p. 66 et suiv.) la „Musathena" d'Ericius Puteanus. Puteanus (van de Putte, Dupuy) naquit le 4 novembre 1574 à Venlo et décéda le 17 septembre 1646 à Louvain où il était professeur à l'Université depuis 1606. Outre de nombreux autres livres, il publia en 1599 à Milan un ouvrage intitulé „Modulata Pallas sive septem discrimina vocum ad harmonicæ lectionis usum aptata philologo quodam filo", dont la deuxième édition porte le titre „Musathena sive notarum heptas ad harmonicæ lectionis novum et facilem usum", Hanoviæ, Typis Wechelianis, apud Claudium Marnium et heredes Ioan. Aubrii. 1602".

59) En marge: Il cite le passage de Puteanus ou il parle de la difficultè et embaras des nuances.

Cette remarque s'applique à la p. 67 de l'ouvrage de Maillart où l'auteur cite le passage suivant de la „Musathena" (Cap. IX, p. 35): „Senæ hæ notæ sic inventæ usum sui apud Musicam passim gregem, sed tardum admodum difficilemque præbent. Quæ enim mora Mutationum; confusio Clavium; substitutio Vocum? Videas plerosque atque indigneris bonam ætatem impendisse huic Arti: et exiguum tamen profecisse, perfectos annis priùs, quam istiusmodi Lectione.

toute ſorte de muſique, mais pour parvenir a la connoiſſance des modes il ſouſtient qu'il faut ſuivre celle de Guido. Et il a tort [61]).

§ 4. *a* [62]). Mersenne liv. 5 prop. 34 [63]). nomme le Maire [64]) qui avoit diviſè le ton en 4 parties ſur ſon luth. Et Titelouze [65]) qui l'avoit diviſè en 3 parties egales ſur une ſpinette particuliere. l'un et l'autre ne valoit rien [66]).

Il dit que S. Auguſtin parle de la meſure qu'on bat qu'il nomme Plauſus [67]).

Difficultas scilicet obstat, remoramque plerisque facit. Ego tollam: cursumque universum facilem et expeditum reddam". Et un peu plus loin: „Ego adiungo, et molestias istas fugiens Notarum numerum augeo: et senis receptis, ut Musathena constituatur comitem unam adiicio, ex eodem illo Hymno (Solve polluti laBIi reatum): BI. Ordinem eundem servo: UT, RE, MI, FA, SOL, LA, BI".

La dernière partie de la citation n'est pas tout à-fait correcte chez Maillart.

[60]) L.c. p. 68.

[61]) Huygens a noté ici en marge l'hymne bien connu de S. Jean (comparez la fin de la note 59) auquel sont empruntés les syllabes ut, re, mi, etc.

Ut queant laxis
Resonare fibris
Mira gestorum
Famuli tuorum
Solve polluti
Labij reatum
Sancte Ioannes.

[62]) Portef. „Musica", f. 28 r.

[63]) Ceci s'applique aux „Traitez des Consonances etc." faisant partie de l'„Harmonie Universelle". Mais il y a ici une faute d'impression au haut de la page. On y lit „Livre cinquiesme", tandis que le texte de la page fait partie du Livre VI „De l'art de bien chanter". C'est dans la Prop. 34 de ce livre, à la p. 439, qu'on trouve cette citation de notre § 4.

[64]) Le Maire, musicien français, naquit vers 1600. Mersenne le cite en outre à la p. 342 de l'„Harmonie Universelle" à propos de la syllabe *za* qu'il proposait d'introduire dans le chant et pour ses innovations dans la notation musicale.

[65]) Jean Titelouze, célèbre organiste français, naquit en 1563 à St. Omer et décéda le 25 octobre 1633 à Rouen, où il était organiste de la cathédrale depuis 1588. Mersenne parle de sa division du ton en trois intervalles égaux non seulement dans le passage cité dans le texte, mais aussi dans le Livre III „Des genres de la Musique, etc.", Prop. 20, p. 196; il est vrai qu'en cet endroit on ne trouve pas son nom, mais la périphrase „excellent organiste" indique que c'est bien de lui qu'il s'agit.

[66]) Pour autant que nous voyons, le jugement de Mersenne lui-même n'est pas si nettement défavorable. Il dit p. e. à la p. 196: „I'ajoûte que si l'on aime mieux diviser chaque ton en trois parties . . . qu'il est libre à un chacun de faire ce qu'il luy plaira".

[67]) „Traitez des Consonances etc.", Livre V „De la Composition" (p. 324): „Le batement de la

§ 4. *b* [68]). De la diviſion du monochorde et de l'accord des inſtruments.

Ariſtoxene diviſoit l'octave en 12 demitons egaux, ce que Vincent Galilee [69]) maintient eſtre la meilleure diviſion. Merſenne s'en ſert pour le luth [70]).

Du vray temperament et accord des inſtruments.

Merſenne raporte pag. 73 et 74 des Inſtruments les divers genres de Diatonic, Chromatic et Enharmonic de pluſieurs anciens, tous peu propres a la muſique [71]) et qui montrent qu'ils ne chantoient pas a pluſieurs parties [72]).

---

mesure, laquelle sainct Augustin et les autres anciens Latins appellent Plausus, n'est autre chose que le baisser et le lever de la main, qui signifient le temps qu'il faut donner a chaque note".

En effet, St. Augustin écrit: „In plaudendo enim quia levatur et ponitur manus, partem pedis sibi levatio vindicat, partem positio", et ailleurs: „Intende ergo et aurem in sonum et in plausum oculos. Non enim audiri, sed videri opus est plaudentem manum, et animadverti acriter quanta temporis mora in levatione, quanta in positione sit". Le premier passage se trouve à la p. 334, le deuxième à la p. 337 du „Primus Tomus Eximii Patris D. Aurelii Augustini Hipponensis Episcopi", Basileæ per Ambrosium et Aurelium Frobenios, fratres, Anno Salutis humanæ MDLXIX. On les trouve aux p. 1110 et 1113 de l'édition moderne de Migne (Patrologia Latina, Tom. XXXII, Parisiis apud Garnier fratres et J. P. Migne successores 1877 = Sancti Aurelii Augustini opera omnia Tom. primus, respectivement Cap. X, 18 et Cap. XIII, 24, de „De Musica" liber secundus). Nous aurions pu citer plusieurs autres endroits.

[68]) Manuscrit E, p. 9—10, datant de 1674. Nous avons déjà publié une partie de ces pages aux p. 370—371 du T. XIX.

[69]) „Dialogo di Vincentio Galilei nobile Fiorentino Della Musica antica Et Della Moderna", Fiorenza, G. Marescotti, 1581. Le dialogue a été réimprimé en 1934 à Rome, avec une préface de Fabio Fano, par la Reale Accademia d'Italia. On lit p. e. à la p. 53 „... molto bene sapeua Aristosseno, d'hauere à distribuire in parti vguali la qualita del suono ...".

Voyez, dans la note 16 de la p. 113 qui précède, l'opinion exprimée en 1588 par Zarlino, laquelle ne s'accorde pas tout-à-fait avec celle de V. Galilei.

[70]) Voyez les trois derniers alinéas de la note 9 de la p. 32 qui précède. Il est vrai que dans ses „Questions harmoniques" de 1633 (citées dans la note 21 de la p. 114 qui précède) Mersenne parle (p. 259) d'„Aristoxene, qui disoit que tous les tons, & les demy-tons sont esgaux, comme l'on pratique encore maintenant sur le Luth & sur les Violes, ce qui repugne neantmoins aux loix de l'harmonie & de la raison". A propos de Vincent Galilée Mersenne écrit e. a. (Livre Second des Instrumens, Prop. V, p. 60—61): „Il y en a encore plusieurs qui croyent que cette diuision d'Aristoxene doit estre preferée à toutes les autres, ce que Vincent Galilée s'est efforcé de prouuer en faueur de ses amis Aristoxeniens, parceque ce Systeme est le plus aysé de tous, & que le iugement des sons depend entierement de l'ouye". Toutefois V. Galilée „confesse en faueur de la vérité, que la Quinte Pythagorique eſt plus agreable que l'Aristoxenique, & que la nature n'a pas esgard à nos commoditez, de sorte qu'il ne s'ensuit pas que le Systeme d'Aristoxene, dans lequel la quinte contient 7 douziesmes de l'Octaue, soit plus parfait que celuy, dans lequel elle est iuste".

[71]) On trouve en effet une „Table des Diatoniques de cinq Musiciens" etc. etc. aux pages indiquées; „on peut ce semble conclure" dit Mersenne „que nous entendons mieux qu'eux la Théorie, ou du moins la Pratique".

rſ l u rſ l u les 2 accords nouveaux du luth l'un par b quart l'autre par b mol. C'eſt depuis la 4e chorde juſqu'a la chanterelle.

u l ſ r l m r u c l tout l'accord nouveau par b mol du deſcendant de la chanterelle.

Raiſon des differents ſons que rend une meſme chorde [73]); et des ſons de la trompette marine, et de la trompette.

Du ſon des anches, qu'on baiſſe leur ton en mettant des morceaux de cire ſur les languettes [74]).

Que les tuyaux ouverts et a anches ne font pas pluſieurs tons mais ſeulement les bouchez [74]).

S'il eſt vray que des tuyaux de meſme longueur mais plus gros les uns que les autres font de tons differents de 5 ou 6 intervalles comme l'aſſure Merſenne. Le moindre avoit 3 lignes de diametre. tous 6 pouces de long. les autres 6, 12, 24, 48 lignes de diametre [75]).

Pag. 342 des Orgues. Apres avoir bien expliquè le temperament, il dit qu'on n'en peut uſer qu'en mettant 20 marches a l'octave, et que Salinas le prouve au livre 3. chap. 33. Que pour cela il faut faire les 12 demitons egaux comme au luth [76]). Mal!

Voyez encore ſur Merſenne la note 21 de la p. 114 et le § 5*b* qui ſuit.

---

[72]) Voyez sur cette opinion, qui eſt auſſi celle de Huygens, la Pièce III *D* qui précède.

[73]) Voyez sur ce sujet la note 1 de la p. 26 qui précède.

[74]) Voyez dans l'„Harmonie Universelle" de 1636 le „Livre Sixiesme des Orgues". A la p. 329 (Prop. XI) Mersenne dit que „les Anches montent ou baissent de ton par le mouuement de leurs ressorts, ou rafettes: mais on les fait encore baisser sans remuer le ressort, en mettant de petits morceaux de cire sur differents endroits des languettes qui se meuuent d'autant plus lentement qu'elles sont plus chargées: d'où il arriue que le son des Anches en est plus doux & plus agreable".

[75]) Comparez la note 7 de la p. 87 qui précède. La Prop. XII (p. 331) du „Livre Sixiesme des Orgues" est ainsi conçu: „Determiner si l'on peut faire un Orgue qui ayt tous ses tuyaux de mesme hauteur, c'est à dire si la seule difference de leurs largeurs peut faire l'estenduë de quatre Octaues qui sont ordinairement sur l'Orgue, etc." Mersenne parle „de plusieurs tuyaux de mesme hauteur que i'ay fait faire exprez ..... Quant à la longueur ils ont tous demy pied de Roy, & le diametre de la base du plus delié a seulement trois lignes, le second a demy-pouce etc."

[76]) Voyez sur le luth la note 70 qui précède. A la p. 342 nommée Mersenne écrit en effet ce que Huygens cite sur les 20 marches et sur Salinas. Mais ensuite Mersenne ajoute „ . . . que les Orgues n'ont pour l'ordinaire que treize marches sur l'Octaue. il faut user d'une autre industrie, par exemple de celle que i'ay monstrée dans le traité du Luth, par le moyen de laquelle tous les demy-tons de l'Octaue sont egaux". Il est vrai qu'il conclut comme suit: „Mais tous ces tempe-

§ 5. *a*[77]). **Kircher** Muſurgia[78]) l. 1. cap. 6. digreſſione. an in vacuo fieri poſſit ſonus[79]). Experimentum indiligenter factum refert, eoque aerem in phiala experimenti toricelliani reſtare probat quod ſonus campanulæ incluſæ audiretur[80]). aquam ad 10 pedes conſtitiſſe ait. unde non bene rem peractam liquet[81]). in vacuo tamen ſi daretur putat ſonum non fieri. Experimentum Florentinum ſimiliter ſonum fuiſſe auditum aſſerit[82]). Meum vero contra[83]).

L. 5. c. 2[84]). inventum Guidonis Aret. [85]) valde laudat quod mihi non videtur

ramens ne seruent de rien pour la fabrique de l'Orgue, d'autant que les tuyaux que l'on fait selon la iuste proportion, approchent si pres dudit temperament, que les mesmes tuyaux qui sont faits pour l'Orgue parfait, peuuent seruir pour l'imparfait, ou l'ordinaire, parce qu'ils ne sont pas esloignez de plus d'un quart de comma les uns des autres".

77) Portef. „Musica", f. 36r.—37v.

78) Athanasius Kircher, né le 2 mai 1601 à Geiss près de Fulda, devint membre en 1618 de la Compagnie des Jésuites. Il fut professeur à Würzburg, vécut à Avignon après 1635 et enseigna ensuite à Rome au Collegium Romanum; il décéda dans cette dernière ville le 30 octobre 1680. Kircher est un polymathe; il a publié des ouvrages volumineux sur des sujets fort divers. Les remarques de Huygens se rapportent à la „Musurgia" dont le titre complet est: „Athanasii Kircheri Fuldensis e Soc. Jesu Presbyteri Musurgia Universalis sive Ars Magna Consoni et Dissoni in X libros digesta. Quà Universa Sonorum doctrina, et Philosophia, Musicæque tam Theoricæ, quam practicæ scientia, summa varietate traditur; admirandæ Consoni, et Dissoni in mundo, adeòque Universà Naturà vires effectusque, uti nova, ita peregrina variorum speciminum exhibitione ad singulares usus, tum in omni poenè facultate, tum potissimùm in Philologià, Mathematicà, Physicà, Mechanicà, Medicinà, Politicà, Metaphysicà, Theologià, aperiuntur et demonstrantur". Romæ. Ex Typographia Hæredum Francisci Corbelletti. Anno Jubilæi MDCL.

79) „Musurgia", Lib. I, cap. VI, p. 11. „Digressio. Utrum in vacuo fieri possit sonus".

80) L'expérience décrite par Kircher (l.c. p. 12) fut exécutée avec un tube de plomb d'une longueur de 100 pieds, à l'une des extrémités duquel un globe de verre était attaché hermétiquement. A l'intérieur de ce globe se trouvait une cloche ainsi qu'un marteau de fer pouvant être mis en mouvement du dehors au moyen d'un aimant. Le tube fut rempli d'eau et employé pour l'expérience de Torricelli: l'eau resta suspendue à une hauteur de 10 pieds. Le son de la cloche frappée par le marteau resta perceptible. Convaincu que dans le vide il ne pourrait y avoir de son, Kircher en déduit (ce qui ne cadre pas bien avec le titre de la Digressio) que le vide est impossible.

81) Le fait que l'eau resta suspendue à la hauteur de 10 pieds fait bien voir que l'espace au-dessus d'elle était loin d'être vide.

82) Voyez sur ces expériences de l'„Accademia dei Lincei" la p. 240 du T. XIX. Kircher ne les mentionne pas.

83) Huygens parle apparemment de son expérience du 19 décembre 1674 (T. XIX, p. 239).

84) „Musurgia", Lib. V, cap. 2 „Utrum Antiquis cognita fuerit Symphoniurgia polyphona sive Musica ex pluribus composita vocibus".

85) Aret. = Aretini. Guido Aretinus naquit d'après la tradition vers 995 à Arezzo près de Rome. Il décéda en 1050. Il appartenait à l'ordre des Bénédictins. Ses plus grands mérites pour la mu-

laude dignum. Cum jam ante lineis uterentur 8 et Elementis literarum feptem fonos octavæ fignificarent [86]). Guidonem refert ad annum 1024. 300 annis poft ait Ioannem de Muris Parifinum ultimam manum impofuiffe guidonianæ muficæ, inventis notis quæ tempora prolationis fimul notarent [87]).

Dicit ibidem [88]) Guidonem inveniffe primum fymphoniam plurium vocum. Id conftare ex præfatione Micrologi ad Theobaldum Epifc. Aretinum [89]). Edidit hunc Microl. fub papa Ioanne 2 [90]). Vellem videre. dicit et auctorem fuiffe inftrumentorum *polyplectrorum* ut clavicymb. &c. Sed fallitur puto nam organa et hydraulica etiam polyplectra erant jam diu ante ejus tempora, nifi tantum quæ fidibus tenduntur hoc nomine cenfenda fint [91]).

L. 6 c. 1. theor. 9. de cognofcendo numero diadromorum chordæ [92]). Merfenni habet experimentum [93]). chorda 17 pedum ex 12 inteftinis tenfa pondere $\frac{1}{2}$ libræ, bis currit et recurrit in minuto fecundo. duabus libris tenfa quater recurrit. 8 libris octies. Contradicit huic experimento ob difficultatem quod ubi primum vibrationes numerabiles fiunt fonus amplius audiri nequeat. ftolidè. fufficit enim cognita proportio numeri vibrationum fubdupla rationis ponderum quibus tenditur.

Guido promittit [94]) menftruo fpatio difcendum quod antea vix multis annis etiam

---

musique consistent dans l'amélioration de l'écriture des notes et l'introduction des syllabes du chant ut, re, mi, fa, sol, la, par où il devint le fondateur du système de la solmisation.

[86]) Kircher lui-même dit (l.c. p. 213) avoir vu dans le couvent de S. Salvator à Messine un livre d'hymnes vieux d'environ 700 ans dans lequel un système de huit lignes était employé.

[87]) Johannes de Muris était originaire de Normandie où il doit être né avant 1300. En 1350 il devint recteur de la Sorbonne. Son décès eut lieu après 1351. Il publia une „Musica practica" en 1321 et une „Musica speculativa" en 1323. Voyez encore sur lui la note 119 de la p. 129 qui suit.

[88]) „Musurgia", p. 215. Guido a fait connaître ses trouvailles (note 85) dans un ouvrage appelé parfois „Introductorium" et parfois „Micrologus" (savoir: de disciplina artis musicæ). Il était dédié à Théobald, évêque d'Arezzo.

[89]) Nous ne voyons pas que Kircher considère l'invention du chant polyphone par Guido comme démontré *par un passage de la préface du „Micrologus"*. Après avoir fait mention de cette préface il ajoute: „porrò Guido necdum contentus hac nova cantandi methodo, inauditam ante hac plurium vocum symphoniam excogitavit primus".

[90]) Lisez: sub papa Ioanne XX.

[91]) Voyez sur ce sujet les Additions et Corrections à la fin du présent Tome.

[92]) „Musurgia", Lib. VI, cap. 1, theor. 9 „Utrum in notitiam diadromorum, quos chorda quæpiam tensa conficit, certa scientia perveniri possit?"

[93]) Il est question de l'expérience décrite par Mersenne dans son „Harmonie Universelle" (voyez la note 9 de la p. 29 qui précède), plus précisément dans les „Traitez de la Nature des Sons, et des Mouvemens de toutes sortes des Corps" Livre III „Des mouvemens et du son des chordes". La longueur des cordes dont Mersenne parle ici était de $17\frac{1}{2}$ pieds.

[94]) Cette remarque appartient encore à l'alinéa précédent. La promesse dont il est question se trouve dans la préface mentionnée dans la note 89 qui précède.

ingenio pollens didiciſſet. quanta ergo difficultas illa priſca fuerit cum et Guidonis methodus tantum tricarum habeat.

L. 7 c. 5. [95]). Improbat conſuetudinem componiſtarum ad clavicymb. ſua examinantium. vultque abſque illo per ſcientiæ regulas ſymphoniam condi. ineptè.

Recte ibidem [96]) reprehendit illos qui vocibus ſingulis cantum accommodant non vero argumento, contra quod ſepe peccant. ut qui ad verba illa ſeu thema [97]), *Abſterget Deus omnem lachrymam ab oculis eorum ubi nullus luctus clamor aut dolor*, plurimum ludit in verbis illis *lachrymam luctus dolor*, hoc agens omnibus modis ut triſtem cantum, triſtes clauſulas, ijs accommodaret. Quid autem lachrymæ, dolor, luctus cum celeſtibus gaudijs commune habent. alterum exemplum refert *mors luctuosa feſtinat* [98]); ubi illud feſtinat incitatis notis et mirè diſcurrentibus exprimit contra decorum.

Lib. 7. Exempla affert mœſti cantus [99]).

Mihi videtur non adeo lentis ſyllabis dolorem exprimendum, ut nonnunquam ◇ [100]) ſingulis dentur; ſed prorſus imitandum tenorem ſermonis qui non multo lentior eſt plangentibus quam loquentibus.

Vellem etiam ut non quæ artificioſiſſima ſunt et inventu difficilia ſectarentur melopœi noſtri ſed quæ aures maximè afficerent. Quid enim mihi cum imitationibus accurate ſervatis, quas fugas vocant, quid cum duplicibus, ſi abſque his ut liberior ita et gratior efficitur melopœia. Artifices iſtis ſe delectari dicunt, non tam dulcedine concentus affectos quam conſideratione artificioſæ compoſitionis; qui non recte hoc pacto melopœam æſtimant, cujus finis eſt delectare ſono quem auribus percipimus, non contemplatione artis. Hæc enim diverſa ſunt.

Illi vero artem magis ex regulis quibuſdam quas ſibi finxere et quibus ſæpe nimis tenaciter inhærent, quam ad effectum harmoniæ judicant. Ars autem niſi naturam moveat ac delectet nihil ſane egiſſe videatur, ut Cicero inquit [101]). Itaque illam ſibi

---

[95]) „Musurgia" Lib. VII, Pars I, cap. 5 (p. 562) „De defectibus et abusibus modernorum Melothetarum, sive quos Componistas vulgò vocant".

[96]) L.c. p. 563—564.

[97]) Apocalypse de Saint-Jean, cap. 21, vs. 4.

[98]) Kircher écrit: *mors festinat luctuosa*, disant: „Non ita pridem alius ... huiusmodi clausulis ludit etc".

[99]) „Musurgia", Lib. VII, cap. 2 (p. 572 et suiv.) „Regularium et naturalium duodecim Tonorum proprietas exemplis demonstrata".

[100]) La semibrevis: comparez la p. 68 qui précède. Actuellement ce signe est celui de la note entiére, la „blanche".

[101]) Cicero „De Oratore" III, 197: „ars cum a natura profecta sit, nisi naturam moveat ac delectet, nihil sane egisse videatur". Toutefois, les éditions modernes adoptent, au lieu de „naturam". la leçon „natura".

unicè artem proponant quâ auditores delicatas aures habentes delectare [102]) possint, sed ita ut et imperitioribus voluptatem pariant. Unde enim origo præceptorum nisi ab ijs rebus quas probabant suavesque sentiebant nondum ullis præceptis imbuti. Quamobrem nec præceptis ita confidere debent ac si geometriæ axiomata essent, sed multas exceptiones dari existiment semperque fixum illud teneant, propositum delectationem adferre auribus prius quam artis examen instituatur.

§ 5 *b*. Apud Mersennum [103]) disputatur an gratior sit concentus monodijs nec rationes desunt.

§ 5 *c*. In methodo Guidonis illud operam dedit ut semitonium majus syllabis mi fa tyrones semper exprimerent, cum tamen tonum quatuor modis canant nempe UT RE, RE MI, FA SOL, SOL LA [104]).

§ 5 *d*. Kirch. tom. 1. l. 7. Erotemate 4 [105]). Explicat notas musicas odes Pindaricæ χρύσεα φόρμιγξ Ἀπόλλωνος [106]). Strophe notas τῆς λέξεως habet sive quæ cantum dirigunt. antistrophe notas τῆς κρούσεως instrumento sequendas, sed tamen et his verba subjiciuntur. Modus est Lydius quod ex figura notarum patet [107]). Cantus autem videri potest esse Toni MLM [108]) nisi quod finit in R. Kircherus finit eum in G, sed

[102]) Leçon alternative: delenire.

[103]) Mersenne traite cette question dans le Livre IV („De la Composition de Musique") des „Traitez des Consonances etc." contenus dans l'„Harmonie Universelle". La première Proposition est intitulée: „Determiner si les simples recits qui se font d'une seule voix, sont plus agreables que lors qu'on chante la mesme chanson à deux ou plusieurs parties".

[104]) Cette remarque ne semble pas avoir de rapport direct avec la lecture de Kircher. Elle s'applique au système de la solmisation dans lequel l'intervalle d'un demiton, se trouvant dans tout hexachorde, était toujours chanté comme Mi-Fa.

[105]) Kircher „Musurgia" Lib. VII, Pars I, Erotema IV (p. 540 et suiv.) „Quibus Veteres Musici in melothesia exprimenda notis usi sint".

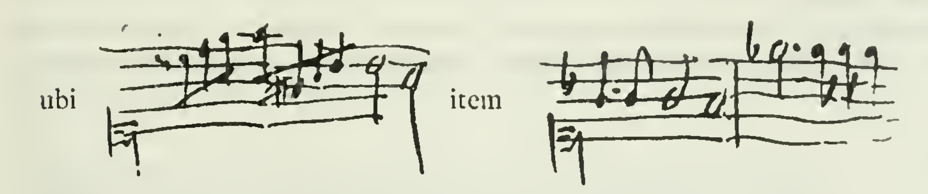
[106]) Il est question ici du célèbre fragment de la musique de la première ode pythique de Pindare, fragment que Kircher dit avoir découvert dans la bibliothèque du couvent San Salvator à Messine et sur l'authenticité duquel on dispute encore aujourd'hui. On peut consulter sur ce sujet Paul Friedländer „Die Melodie zu Pindars erstem Pythischen Gedicht" dans les „Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Phil. Hist. Klasse 86 (1934), Heft 4", Hirzel, Leipzig, 1934. Comparez sur ce fragment la p. 85 qui précède.

[107]) Kircher lui-même écrit au-dessus de sa reproduction du fragment: „Musica veterum nostris notis musicis tono Lydio expressa": il observe que les signes employés sont identiques avec ceux du ton lydien tels qu'ils sont représentés dans la table des notes d'Alypius qu'il vient de reproduire vis-à-vis de la p. 541.

[108]) Une explication de cette remarque nous a été donnée par M. A. Rome, professeur à l'Université de Louvain. M. Rome suppose que Huygens ait transposé le fragment publié par Kircher

hoc nihil refert cum idem ipſi ac mihi fiat cantus [109]). In fine notas quaſdam male explicaverat quas correxi [110]).

pag. 593 et 594 [111]). Exemplum Capſpergerianæ [112]) melopœæ recitat

ubi  item

§ 5 *d.* Si per omnes tonos ita diſcurrere licet ut diu in illis maneant, aut ſaltem ad primum non redeant, quidni et in alio tono finire permittant; et ſane vidi in Italorum meliſmatis ubi hoc factitarunt, incipientes in SVS, ſunt qui finiunt in MCM. Hoc vero ut ineptum eſt ita etiam vagatio iſta per tonos alienos ut plane ejus in quo cœperant obliviſcantur. Hoc enervat vim ac decorem cantus nec perinde delectat auditores ac conſtans modulatio quæ tonum ſervat vel ita certe excurrit ut continuo revertatur.

Neceſſe eſt vocem canentis ope inſtrumenti dirigi et in ordinem cogi ne a tono

---

de telle manière „qu'il n'y ait plus ni dièze ni bémol. Il obtient ce résultat en commençant la mélodie par un *la* au lieu d'un *re*, comme le fait Kircher. Alors la première phrase de la pythique devient la, la, sol, fa, mi; la, sol, fa, mi; la, sol, fa, mi, re, mi et Huygens remarque que le sentiment de cette première phrase, surtout des 8 premières notes, est nettement celui du 4[e] mode grégorien, dont le tonique est *mi* et la dominante *la*. Donc: cantus videri potest ton MLM. Seulement la fin du morceau (fa, sol, sol, re, mi, re) est dans le 1[er] mode grégorien Huygens reste d'avis que c'est du 4[e] mode, sauf que la finale du morceau est un *re*".

[109]) M. Rome explique cette phrase par la remarque suivante: „la structure modale restant la même dans tous les tons, Huygens avertit le lecteur non prévenu, que dans la transcription de Kircher le morceau finit par un *sol*, sed parum refert, cela ne fait rien, puisqu'en transposant dans un autre ton Huygens n'a pas changé la structure modale ni la ligne mélodique; cum idem ipsi ac mihi fiat cantus".

[110]) Nous ne connaissons pas ces corrections. Elle se trouvaient (ou se trouvent) peut-être dans l'exemplaire de la „Musurgia" mentionné dans le Catalogue de la vente des livres de Huygens en 1695; nous ignorons ce que cet exemplaire est devenu.

[111]) Kircher „Musurgia", Lib. VII, Pars II, Cap. 5 „De vario stylorum harmonicorum artificio". D'ailleurs les exemples récitatifs de Kapsberger commencent déjà à la p. 592.

[112]) Johann Hieronymus von Kapsberger, virtuose et compositeur d'origine allemande, demeurait à Venise vers 1604. Plus tard il habita Rome, où il décéda en 1650 environ.

Les paroles du deuxième exemple („Musurgia" p. 596) sont „miglior stato ma se pietà gli porge".

evagetur. nam ſi verbi gr. canat V Ś R̀ Ĺ M̀, hoc ultimum M non erit tertia major ad V ſed toto commate altius vero [113]).

§ *6* [114]). Ad **Jo. van der Elst** [115]). Ouden en nieuwen grondt vande musycke. Gedruct te Gent. 1662 [116]).

Sex ſyllabas Guidonis Aretini retinet [117]) ideoque mutationes quas vocant, diſcentibus difficillimas, cum addito *ſi*, cuique tono ſuum nomen tribuatur. Semitonijs [118])

---

[113]) Ailleurs aussi Huygens parle des différences, évaluées en commas, qui peuvent résulter de la justesse d'un certain nombre de notes chantées consécutivement: voyez les p. 64 en 77 qui précèdent.

[114]) Manuscrit G, f. 47 r. La f. 44 porte la date 1692, mais plus loin on trouve dans le Manuscrit des dates de 1690.

[115]) Joannes van der Elst, moine augustin, naquit au commencement du dix-septième siècle au château Meulenakers en Brabant d'une famille gantoise, dit-on, bien connue. Il passa une partie de sa jeunesse en France. Avant l'ouvrage cité dans la note suivante il avait publié en 1657, également à Gand, ses „Notæ augustinianæ sive musices figuræ seu notæ novæ concinnendis modulis facilioris, tabulatis organicis exhibendis aptiores".

[116]) Le titre complet de cet ouvrage est le suivant:

Den Ouden ende nieuwen Grondt van de Musiicke. Bevanghende
De vermeerderinghe ende verbeteringhe van den Sangh.
De oude ende nieuwe Sangh-woorden.
De oude ende nieuwe Figuren.
De XII. Toonen van den Sangh.
De proportien van de Consonantien &c.
De bedeelinghe van 't Monochordum.
Den grondt van de Chordosophie.
De Musicale Instrumenten.
Het volmaeckt Clauwier Diatonicum Syntonum.
Dry fondamentale manieren van accorderen.
De Reghels van de Compositie.
De Reghels van den Bas-continuél.
Het ghebruyck van de dry Musicale gheslachten.
In de welcke met korte ende klare Reghels ende redenen wt-gheleydt wordt het mergh van de Musijcke, soo kerckelicke, Figuréle, als Instrumentéle, soo voor de Theorie als voor de Practijcke, door P. I. V. E. A. Te Ghendt, by Maximiliaen Graet in den Enghel. 1662.

L'„Epistola Dedicatoria" est signée F. Joannes van der Elst.

[117]) L.c. p. 3.

[118]) L.c. p. 10 „De Nieuwe Chromatycke Sangh-woorden". A la p. 11 on trouve la règle („Reghel") suivante: „Het teecken van B-dure (♯ ✕) ghestelt wesende voor eenighe besonder Note verheescht in de Sangh-woorden de Vocale I, ende het teecken van B-molle (♭) de Vocale A".

Nous remarquons qu'outre les „Sanghwoorden" cités par Huygens van der Elst emploie aussi les syllabes *li* et *lae*.

ſua nomina dat ſi, ſil, it, ri, item at, ra, ma, ſal, quod fieri poteſt, ſed non eſt tam neceſſarium atque vox *ſi*.

Duæ perfectæ conſonantiæ non debent ſeſe conſequi. ut quintæ, octavæ, uniſoni. Rationem abſurdam reddit [119]) quod audita perfecta conſonantia, plane acquieſcat ſenſus; ideoque ne nauſea ſequatur ſubjungendam imperfectam. Nam primo diviſio illa in perfectas et imperfectas conſonantias inepta eſt. Deinde non ſequitur dulcedo aut ſatietas nimia cum duæ quintæ ſeſe ſequuntur, ſed contra offenduntur aures rudi ac dura illa conſonantiarum ſucceſſione quia ſubito quaſi in alium Tonum tranſitur; nam etiam tertiæ intermediæ vel accedunt, vel ſubaudiuntur. Octavæ vero continuatæ improbantur, quod eadem modulatio Baſſi et Cantus nequaquam ſatisfaciat expectationi auditoris, cui gratiores eſſent aliæ conſonantiæ quintarum et tertiarum.

Si pluribus Choris canatur. debent Baſſus diverſorum vel uniſonis vel octavis vel interdum tertijs inter ſe referri, nunquam vero quintis.

Dans ſon „Bericht" de 1732, mentionné à la p. 69 qui précède, Q. van Blankenburg, qui connaît auſſi les ouvrages de van der Elſt, écrit: „Wat aangaat de namen *Si* en *Sa*, *It* en *Ut*, die heb ik in den jare 1681 met den Ed. Heere Chriſtiaan Huygens vaſtgeſtelt, en zijne zwarigheid, dat men de naam Ci (die men in d'oude muſiec vind) in geen Ca mogt veranderen door 't verwiſſelen van die C in een S, weggenomen; in dezelfde tijd heeft zijn Ed. zijn Cycle Harmonique van 31. klanken in 't octaaf in cyffer geſtelt, en bij de Mi een Ma gevoegt", etc. Comparez le § 3 à la p. 167 qui ſuit.

À la même p. du Man. G Huygens cite auſſi **Ludovicus Viadana**: voyez les Additions et Corrections.

---

[119]) L.c. p. 61. Le passage de van der Elst dont il s'agit est le suivant: „De reden van desen Reghel is, dat als gehoort wort een perfecte Consonantie het ghehoor ten vollen voldaen is; ende om datter geen versaetheyt oft walgh en soude wt-spruyten, moet naer de perfecte ghestelt worden een imperfecte, die wederom verweckt eenen appetijt ofte beghcerte tot de perfectie".

Sur la question de la défense de la succession de deux quintes etc. — déjà mentionnée aux p. 81 et 110 qui précèdent — on peut consulter p.e. A. W. Ambros „Zur Lehre vom Quintenverbot", Leipzig, H. Matthes, sans date; où l'on voit que la règle „debemus binas consonantias perfectas seriatim conjunctas ascendendo vel descendendo prout possumus evitare" provient de Joh. de Muris („Quæstiones super partes musicæ", vers 1300; comparez sur lui la note 87 de la p. 124 qui précède). „Die alten Niederländer des 15. Jahrhunderts nahmen vorerst von dem glücklichen Funde der Theorie wenig Notiz". Quelques compositeurs célèbres (J. Seb. Bach, Händel) n'observent pas non plus rigoureusement cette règle. Elle fut cependant de plus en plus respectée. Zarlino la discute dans le Chap. 29 de la Troisième Partie de ses „Istituzioni Harmoniche".

À la f. 15 du portef. „Musica" Huygens écrit: Quand on deffend 2 octaves de ſuite a 2, 3 ou 4 parties ſi ce n'eſt pas parce que cela rend l'accord defectueux d'harmonie. Et ſi peut eſtre a 5, 6 ou pluſieurs parties ce n'eſt pas une faute en effet, eſtant non obſtant cela l'harmonie complette.

§ 7 [120]). **Simpson** [121]). Compendium Muficæ Angl.^{e} [122]).

Varios effectus modorum apud veteres, ortos inde exiftimat, quod præter diverfa intervalla cantus etiam diverfitatem menfuræ feu rythmi contineant [123]).

Quintas perfectas et imperfectas eleganter poni deinceps cenfet, in notis non longis [124]).

En b mol l'on fait des cadences fur la note mediante [125]). Mais cela n'eft pas aifè en ♮; mais alors il veut la cadence mediante à la feconde ou quarte plus haut que la finale. Ainfi dans le ton de VSV les cadences mediantes feront en R ou F. J'y adjoute encore la cadence imparfaite ou le deffus finit en M et la Baffe en L.

Chriftoph. Simpfon efcrit que de C♭ a Ci eft le demiton majeur et de Ci a V le demiton mineur, juftement a rebours, et de mefme dans tous les autres demitons [126]). Il croit auffi que le triton et la fauffe quinte font des intervalles egaux [127]).

---

[120]) Portef. „Musica", f. 34 et f. 31.

[121]) Christopher Simpson, anglais, était un virtuose sur la Viola da Gamba. Né en 1610, il décéda en 1669 à Turnstile.

[122]) Chr. Simpson „A Compendium, or Introduction to practical musick", London, Playford 1655. Cet ouvrage fut plusieurs fois réimprimé; il y eut même encore une huitième édition en 1732.
Nous avons pu consulter la troisième édition. „A Compendium of Practical Musick in five Parts. Teaching by a New, and easie Method, 1. The Rudiments of Song. 2. The Principles of Composition. 3. The Use of Discords. 4. The Form of Figurative Descant. 5. The Contrivance of Canon. Together with Lessons for Viols &c". The Third Edition. By Christopher Simpson, London MDCLXXVIII.

[123]) L.c. p. 69.

[124]) L.c. p. 100.

[125]) L.c. p. 36.

[126]) A la p. 83 de l'ouvrage cité Simpson dit que l'intervalle A—Bes (ou La—Si bé mol) est un demi-ton mineur et Bes—B (ou Si bémol—Si) un demi-ton majeur.

[127]) Nous rappelons que le triton est la quarte augmentée, composée de trois demi-tons majeurs et de trois demi-tons mineurs du système du ton moyen, tandis qu'on entend par fausse quinte, ou quinte diminuée, le complément du triton par rapport à l'octave.
Simpson (l.c. p. 67) appelle le „tritonus" un „Greater or Excessive 4th" et la „semidiapente" un „Lesser or Defective 5th". Son assertion de l'égalité des deux intervalles est moins catégorique que Huygens nous la représente. Il dit „.... which, according to the Scale, where we have no other divisions or distinctions than *Semitones* or *Half-Notes*, seem to be the same Interval, as to proportion of sound, either or them consisting of six Semitones".

[128]) Portef. „Varia", suite f. 25.

[129]) Il s'agit de l'article „De la musique des anciens" par Claude Perrault (né à Paris en 1613, médecin et architecte, devenu membre de l'Académie des Sciences en 1666 et mort à Paris le 9 octobre 1688; voyez aussi sur lui le T. XIX). Il fait partie de ses „Essais de Physique, ou Recueil de plusieurs Traitez touchant les choses naturelles", Paris 1680—1688, 4 vol. Nous

§ 8 [128]). *Sur un traicté de Musique de M.* Perrault *le medecin* [129]).

6 [130]). Que les systemes estoient les intervalles, si cela se prouve clairement. Je crois plustost qu'on le prenoit pour la quarte remplie des tons d'entredeux [131]).

14. Bonne remarque de ce que leurs chants n'avoient pas la douceur des nostres faute des demitons aux cadences [132]).

19. Comment sçait on si le Symphonia de Daniel estoit la mesme des vielleurs [133]).

21. Iroquois [134]). dites cette comparaison a Vossius [135]).

28. Comment ils ont chantè à la tierce qu'ils prenoient pour dissonance [136]).

---

l'avons consulté dans l'édition „Oeuvres Diverses de Physique et de Mechanique" de Mrs. C. et P. Perrault. Volume Premier. Leiden, P. v. d. Aa. 1721.

[130]) Les nombres 6, 14, 19 etc. ne s'appliquent pas, comme cela est évident, aux pages de l'édition de 1721.

[131]) L.c. p. 297. „Les *Systemes* étoient les Intervalles, qui ne sont pas entre deux sons voisins, que l'on pourroit appeler Intervalles simples, mais qui sont composez d'autres Intervalles, qui sont voisins". Nous ne voyons pas ce que Huygens trouve à objecter à cet énoncé. Il s'accorde absolument avec ceux d'Aristoxène „Harm. Elem." I, éd. Meibom. p. 15—16 et Euclide „Introd. Harm.", éd. Meibom. p. 1 = éd. Menge p. 186.

[132]) L.c. p. 300. „Il est évident que leur modulation ou simple chant n'avoit point la douceur qui se trouve dans la nôtre, faute des demi-tons qui servent à faire les cadences avec agrément".

[133]) L.c. p. 303. Dans le Livre de Daniel, Chap. III, vs. 5 et 7, il est question d'un instrument de musique appelé Symphonia; voici le texte latin cité par Perrault: „In hora, quâ audieritis sonitum Tubæ, et Fistulæ, et Citharæ, et Sambucæ, et Psalterii, et Symphoniæ" etc. D'après Perrault cet instrument était encore récemment en usage chez les vielleurs (la vielle est un instrument à cordes frottées que l'on fait agir au moyen d'une roue mue par une manivelle). Perrault dit qu'il était „en forme d'un arc sur lequel trois cordes étoient tendues: il ne servoit que comme de bourdon [le mot bourdon signifie une basse continue et uniforme que font entendre, toujours sur la même note, certains instruments tels que la vielle]: et celui qui en sonnoit n'avoit rien autre chose à faire qu'à suivre le mouvement et la cadence du Violon".

[134]) L.c. p. 304. Perrault compare la musique des Anciens avec „celui qui regne encore parmi les Nations barbares, où la Symphonie de la Musique consiste dans un bruit confus pour ce qui est des tons, mais fort bien reglé à l'égard du mouvement: nous en avons vû un échantillon il n'y a pas longtemps dans le concert des Hiroquois, qui furent amenez en cette ville".

„Iroquois" est le nom français pour la confédération des six nations peaux-rouges du sud-est des lacs Erié et Ontario.

[135]) Isaac Vossius était d'avis que la musique des anciens avait une grande valeur: en 1687 (p. 242 du T. IX) Huygens dit à propos d'un ouvrage sur cette musique ne pas savoir si l'auteur „est du sentiment de Is. Vossius ou du contraire, qui est aussi le mien, c'est a dire que cette anciene musique estoit tres peu de chose".

[136]) L.c. p. 307. Perrault s'appuie ici sur un texte d'Athenæus d'après lequel, suivant Perrault, Pindare, écrivant à Heron dit que la Musique chantée par un enfant, qui joint sa voix à celle d'un homme, s'appelle Magadis, parce qu'ils chantent ensemble l'un et l'autre un même chant selon deux modes. Il juge que „chanter selon deux modes" signifie „chanter à la tierce",

33. Si la mandore [137]) eſt ſemblable au Pandoron ancien [137])? Barbitus [138]) eſt pris pour la viole par les modernes a ce qui me ſemble et non pas pour le luth.

38. O Teſtudinis aureæ &c. [139]). Il me ſemble qu'Horace dit O muſe qui jouez du luth.

44. Qu'il faut quelque choſe de plus a la ſculpture que d'imiter ſimplement la nature [140]). Il y a apparence que la peinture des anciens n'eſtoit pas ſi peu de choſe, vu les raports de Pline et autres [141]).

49. Je ne ſcay ſi on peut recevoir cette diſtinction entre toucher le cœur et toucher l'esprit [142]).

---

ceci d'aprés une remarque d'Aristote disant que les consonances octave, quinte et quarte ne se magadizent point. Il est évident qu'il ne peut être question d'une lettre *à Héron*: c'est d'une ode de Pindare dédiée au roi *Hiéron* de Syracuse (dont un fragment a été conservé) qu'il s'agit („Pindari Carmina", éd. W. Christ, Lipsiæ 1896, fragm. 125, p. 408). Pindare y parle d'un ψαλμός qu'il appelle ἀντίφθογγος. D'aprés Athénée („Dipnosophistarum Libri", éd. Kaibel, Leipzig. 1887, Lib. XIV, 635b; éd. citée III, 401) le ψαλμός est identique avec la μαγάδις laquelle est appelée ἀντίφθογγος ..... διὰ τὸ διὰ δύο γενῶν ἅμα καὶ διὰ πασῶν ἔχειν τὴν συνῳδίαν ἀνδρῶν τε καὶ παίδων.

Comparez sur la remarque de Huygens au sujet de la tierce dans l'antiquité, le troiſième alinéa de la p. 114 qui précède où nous renvoyons le lecteur à un Avertissement antérieur.

137) L.c. p. 309. Perrault parle ici du „jeu de la simple Mandore, dont l'usage est aboli depuis quelque temps. A la page suivante il ajoute que la Mandore est identique avec le pandoron mentionné par Athénée. Or, Athénée mentionne un instrument πάνδουρος (c'est sans doute de celui-ci que Perrault entend parler) au liv. IV, 176b et 183f (éd. citée, 395 et 401).

138) L.c. p. 306: „Athenée dit que le Magadis étoit le même que le Barbiton et le Pectis; et il y a apparence que c'est pour cette raison que les Modernes appellent notre Luth Barbiton". La citation n'est pas tout-à-fait exacte: Athénée (IV, 182f; éd. citée I, 398) applique tant au βάρβιτον qu'à la μαγάδις la désignation ἀρχαῖα, mais il ne dit pas que ces deux instruments sont identiques. Ailleurs (182e, éd. citée I, 398) il dit que la μαγάδις est, comme le βάρβιτον, un ὄργανον ἐντατόν.

139) L.c. p. 312. Horace, Carmina IV, ode 3:

O testudinis aureæ
Dulcem quæ strepitum, Pieri, temperas.

Traduction de Perrault: „Ce sont vous mes Vers qui faites que le son de ma Lyre a quelque chose d'agréable".

140) L.c. p. 314. Perrault dit qu'il n'est pas permis de conclure de l'excellence de la sculpture des anciens à celle de leur peinture. „La raison de cela est, qu'un Sculpteur n'est à l'égard de la nature qu'il imite, que ce qu'un Peintre copiste est à l'égard d'un tableau qu'il copie".

141) Pline parle de la peinture grecque dans le Lib. 35 de son „Historia Naturalis" (Caji Plinii Secundi Historiæ Naturalis Libri XXXVII ex rec. J. Harduini. Biponti 1783).

142) L.c. p. 316: „Il ne faut donc pas s'étonner si les Musiciens et les Peintres de l'Antiquité faisoient de si grands miracles avec si peu d'art, puisqu'ils ne s'étudioient qu'à toucher le cœur et à contenter les sens; ce qui est bien plus aisé que de satisfaire l'esprit; parce que le cœur peut

Qu'il eſt aſſez diſputable ſi les muſiciens modernes avec leur contrepoint figurè ou l'on prononce des paroles differentes en meſme temps, ſont dans le bon chemin.

§ 9 [143]). **Andr. Werckmeister** [144]) Organiſt zu Quedlinburg (en marge: author ineruditus ac parvi pretij) improbat Temperamentum optimum quo quintæ diminuuntur $\frac{1}{4}$ commatis [145]). Errat autem in eo quod ab omnibus chordis tam diatonicis quam chromaticis putat diapente ſurſum poſtulari in hoc Temperamento [146]). Incipit enim ab V, S, et procedit ad S, R; R,L; L,M; M,Z; Z,F♯; F♯ U♯; U♯ S♯ ac porro ponit etiam S♯ d♯ seu S♯ e♭; malè, hoc enim nemo ut puto ſic ſtatuit; hinc rectè pergit per E♭B (ſeu ut ille D♯B); B,f; F,c. Iam dicit 2 commatis inveniri gravius hoc c quam ut ad C imum diapason efficiat.

---

aimer également tous les objets, et même quelquefois plus fortement les moins aimables; ce qui n'arrive pas à l'esprit, qui n'est point sujet aux aveuglemens dont le cœur est capable, et qui n'estime ordinairement les choses qu'à proportion qu'elles sont estimables".

[143]) Portef. „Musica", f. 20.

[144]) Andreas Werckmeister naquit à Beneckenstein le 30 novembre 1645; il décéda le 26 octobre 1706 à Halberstadt où il était organiste après avoir exercé la même fonction à Hasselfelde et à Quedlinburg. C'est dans cette dernière ville qu'il publia l'ouvrage qui donna lieu aux observations de Huygens. En voici le titre complet:

Musicalische Temperatur, Oder deutlicher und warer Mathematischer Unterricht / Wie man durch Anweisung des Monochordi Ein Klavier / sonderlich die Orgel-Wercke / Positive, Regale, Spinetten / und dergleichen wol temperiert stimmen könne / damit nach heutiger manier alle Modi ficti in einer angenehm= und erträglichen Harmonia mögen genommen werden / Mit vorhergehender Abhandlung Von dem Vorzuge / Vollkommen= und weniger Vollkommenheit der Musicalischen Zahlen / Proportionen / und Consonantien, Welche bey Einrichtung der Temperatur wohl in Acht zu nehmen sind: Benebst einem darzugehörig= in Kupffer vorgebildeten deutlichen und völligem Monochordo beschrieben / und an das Tages=Licht gegeben durch Andreas Werckmeistern / Stiffts=Hof=Organisten zu Quedlinburg. Franckfurt und Leipzig / In Verlegung Theori Philippi Calvisii, Buch=Händler in Quedlinburg / ANNO 1691.

Outre celui-ci plusieurs autres ouvrages sortirent de sa plume.

[145]) Kapitel 1; pag. 1.

[146]) Ibidem.

[147]) Kap. 17; pag. 32.

[148]) Gibelius = Otto Gibel naquit en 1612 à Borg sur Fehmarn, devint Kantor à Stadthagen en 1634, ensuite Kantor à Minden en 1642, puis Recteur d'une école dans la même ville, où il décéda en 1682. Il écrivit e.a. une „Introductio musicæ didacticæ" (1640) et „Proportiones mathematico-musicæ" (1666).

[149]) Baryphonus, nom grec de Heinrich Pipegrop, né le 17 septembre 1581 à Wernigerode, décédé

Videtur [147]) cum alijs authoribus (e quibus Gibelium [148]), Baryphonum [149]) allegat) optimum temperamentum ſtatuere hujusmodi [150]).

3600	3456	3375	3240	3200	3072	3000	2880	2700	2592	2560
G	Cis	Cis dur	D mol	D	Dis	E mol	E	F	Fis m	Fis

2400	2304	2250	2160	$2133\frac{1}{3}$	2040 [151])	2025	2000	1920	1800
G	Gis	A m	A	A dur	As	B m	B	H	c

ubi D auxiliare apponitur [152]).

Intervallum vero Gis, Dis, ponitur diapente [153]). Hanc vocat unſerer Temperatur [154]) et in monochordi ſigura primum collocat et huic tantum ac 6to Temperamento numeros adſcribit. ſed hic nihil temperatum.

---

le 3 (13) janvier 1655 à Quedlinburg. En 1606 il devint Subconrector et Stadtkantor à Quedlinburg. Il écrivit une „Isagoge musica", Magdebourg 1609.

150) La division du monochorde qui suit dans le texte a été obtenue comme suit: la longueur de la corde entière, correspondent au ton C, étant par hypothèse de 3600 unités, l'auteur détermine celle de l'octave c en prenant la moitié de 3600; celle de la quinte G est déterminée par la fraction $\frac{2}{3}$, de la quarte F par $\frac{3}{4}$, de la tierce majeure E par $\frac{4}{5}$, de la tierce mineure (E mol, c.à.d. E molle = Mi bémol) par $\frac{5}{6}$. Ensuite A est déduite de F et H de G en réduisant à $\frac{4}{5}$ la longueur de la corde (tierce majeure). Werckmeister observe qu'on peut aussi déduire A de C et H de D en prenant les $\frac{3}{5}$ de la longueur de la corde (sixte majeure). Cependant D ellemême n'est pas encore déterminée. C'est sans doute à cette circonstance que Huygens fait allusion en disant: ubi D auxiliare apponitur. On peut cependant remarquer qu'à la p. 35 Werckmeister donne pourtant une détermination directe de D en prenant les $\frac{8}{9}$ de la longueur de la corde de C. Ensuite Werckmeister trouve Fis, Gis, Cis, Dis, Ais comme tierces majeures supérieures respectivement de D, E, A, H et Fis (éventuellement avec réduction d'octave). B mol étant déterminée comme octave de la quinte inférieure (ou comme quarte) de F, Cis dur (durum) s'en déduit comme étant la tierce mineure et D mol comme étant la tierce majeure de B mol, tandis que Fis mol est la tierce majeure de D mol, A mol la tierce mineure de F, A dur la tierce mineure de Fis et enfin B celle de G.

151) Lisez 2048 et Ais.

152) Voyez la note 150.

153) D'après la méthode de Werckmeister tel est en effet le cas.

154) Werckmeister prend „Temperatur" dans le sens de „Divisio Monochordi", donc dans celui de détermination de rapports mathématiques correspondant aux intervalles. Huygens fait probablement allusion ici à un endroit de la p. 51: „Dieses ist also die Vorstellung aller Proportionen und Intervallorum, so weit in unserer Temperatur operiret wird".

Hoc eft ipfius temperamentum [155]) 1 : 132 [156]).

		4 : 3				4 : 3					
196	186	176	165	156	147	139	131	124	117	110	104
C	Cis	D	Dis	E	F	Fis	G	Gis	A	B	H
98	93	88	$82\frac{1}{2}$	78	$73\frac{1}{2}$ [157])		$69\frac{1}{2}$	$65\frac{1}{2}$ [158])			
c	cis	d	dis	e	f		fis	g			

[155]) C'est dans les Kapitels 26 et 27 que Werckmeister fait connaitre ses propositions à lui sur la Temperatur: (26) „Noch eine sonderliche Art einer Temperatur durch den Septenarium, so mit der Weitläufftigkeit der commatum nichts zu thun hat"; (27) „Process der Temperatur ex Septenario zweyerley Arten". On voit que l'un et l'autre système reposent sur le Septenarius, c.à.d. sur les propriétés du nombre 7. Suivant celui des systèmes dont parle Huygens la longueur de la corde (monochorde) est divisée en 7. 4196 parties (p. 72 du livre). Werckmeister n'indique d'ailleurs pas comment il a obtenu les diverses longueurs qu'il donne en cet endroit. Pour faire voir dans quelle mesure cette Temperatur se rapproche du système de la gamme tempérée uniformément (dite „gamme tempérée") — laquelle est souvent attribuée à Werckmeister — nous calculons ici en Cents la valeur des différents intervalles (voyez sur les Cents la note 16 de la p. 146 qui suit, faisant partie de l'Avertissement du „(nouveau) Cycle Harmonique").

Intervalles de la corde C suivant le système

	de Werckmeister	de la gamme tempérée
Cis	90,66	100
D	186,33	200
Dis	298,07	300
E	395,17	400
F	498,04	500
Fis	594,92	600
G	697,54	700
Gis	792,62	800
A	899,41	900
B	1000,02	1000
H	1097,12	1100
c	1200	1200

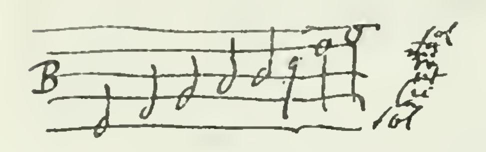
[156]) Ce nombre indique apparemment que l'intervalle E—A s'écarte de $\frac{1}{132}$ de la quarte. En effet $\frac{176}{131} = \frac{4}{3} \cdot \frac{132}{131}$.

[157]) Huygens a mis ici le nombre juste au lieu du nombre erroné (72) de Werckmeister. Mais dans la planche vis-à-vis de la p. 38 du livre on trouve la vraie valeur $73\frac{1}{2}$.

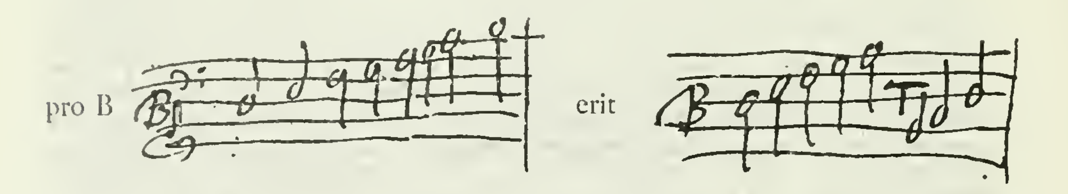
[158]) Le reste de la page de Huygens est recouvert par des calculs brouillonnés servant à vérifier les grandeurs des intervalles. Pour l'intervalle re—sa (D—Bes) il trouve $\frac{5}{8}$; pour dis—sa

§ 10[159]). **Thomas Salmon**[160]) (mag. art. in Colleg. Trin. Oxon. impr. 1672) An Effay to the avancement of mufick[161]).

Docet abfque clavibus vel potius unica muficam omnem commodè fcribi, in quinque lineis quarum infima femper fit locus foni G feu fol[162]). Idemque vult fieri in fingulis partibus quas vocant ut Baffo Tenore Superio[163]).



Singulis octavam fuam tribuendo per diapafon a proxima differentem quas litera prefixa difcriminat. B Baffi diapafon notat. T tenoris (apud illum T eft Trebble feu fuperius), C Cantus. Tum fi longe ultra lineas excurrant notæ ad altiorem inferioremve diapafon referuntur præpofita litera ejus partis indice, fic



quæ mutatio percommoda eft quod diftantia per diapafon mutetur. Hæc meo judicio non contemnenda eft inventio, atque eo facilius in ufum recipienda, quod, Clavis Baffi ordinaria, ijfdem locis fonos fignet atque hæc methodus: nec non et fupremæ partis clavis una, ut nihil novi addifcere fit neceffe. utilitas autem et difcentibus muficam et componentibus concentus non exigua hinc oritur.

(Dis — Bes) $\frac{2}{3}$; pour sol — re (G — d) 3.88 2.131 2, de sorte que l'écart par rapport à la quinte juste est de $\frac{1}{132}$; Huygens observe: „plus quam $\frac{3}{5}$ commatis hæc diapente deficit"; c'est ce qu'il calcule à l'aide de logarithmes. Nous nous abstenons d'une reproduction intégrale de ces calculs.

159) Portef. „Musica", f. 34 v.

160) Thomas Salmon naquit le 24 juin 1648 à Hackney et fut enterré le 16 août 1706 à Mepsal où il était recteur.

---

161) Voici le titre complet: „An Essay to the Advancement of Musick by Casting away the Per plexity of Different Cliffs and Uniting all sorts of Musick.

Lute		Organ
Viol		Harpsechord
Violin		Voice &c.

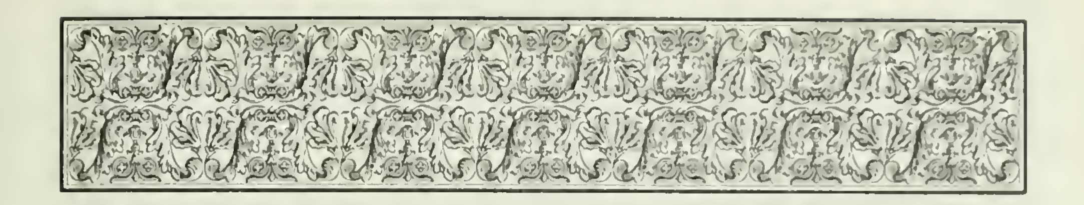
in one Universal Character". By Thomas Salmon, Master of Arts of Trinity College in Oxford. Frustra fit per plura, quod fieri potest per pauciora. London. Printed by J. Macock and are to be sold by John Car at the Middle-Temple-Gate. 1672.

162) La forme dans laquelle cette proposition est formulée dans le „Musik-Lexikon" de Riemann (11ième édition par A. Einstein, Berlin, 1929) peut induire en erreur. On y lit: „er schlug in dem Essay in the Advancement of Musick (1672) .... als etwas neues vor, statt der Noten die Buchstabennamen der Töne auf die Linien zu schreiben ...." Or, la proposition de Salmon consiste en ceci qu'à chaque endroit situé à la même hauteur par rapport aux lignes parallèles il veut toujours faire correspondre la même lettre.

163) Nous observons encore que Salmon se sert des trois lettres T (Trebble), M (Meanne) et B (Base).

VI.

LE (NOUVEAU) CYCLE HARMONIQUE.



Avertiſſement.

L'étude ſur le Cycle Harmonique a déjà été imprimée dans le T. X [1]) dans la forme que Huygens lui donna en 1691, bien longtemps après avoir fait les calculs [2]), ſavoir celle d'une lettre à l'éditeur [3]) de l' „Hiſtoire des Ouvrages des Sçavans" [4]). La traduction latine de cette publication de 1691 dans les „Opera Varia" [5]) de 1724 porte le nom „Novus Cyclus Harmonicus".

Dans la l. 19 de la p. 168 de la Pièce qui conſtitue notre Appendice I Huygens parle lui-même des „nombres du *nouveau* [nous ſoulignons] temperament. l'octave en 31 parties egales". En effet, plus loin dans la même Pièce il écrit:

„Que ſans doute les diviſions de 3 a 2, 4 a 3, 5 a 4, 6 a 5 donnent les conſonances les meilleures qu'elles puiſſent eſtre. contre Stevin [nous conſidérons cette première ſentence plus loin]. L'octave en 31 parties que donne Merſenne prop. 10 des Genres

[1]) P. 169—174.

[2]) La Pièce A qui suit doit dater de 1661; en effet, Huygens écrivait le 1 août 1661 (p. 12 qui précède) avoir trouvé que dans la musique „les logarithmes sont de grand usage", ce qui ne s'applique pas aux Pièces de 1661 sur la Division du Monochorde dans lesquelles il n'est pas fait usage de logarithmes.

[3]) Basnage de Beauval.

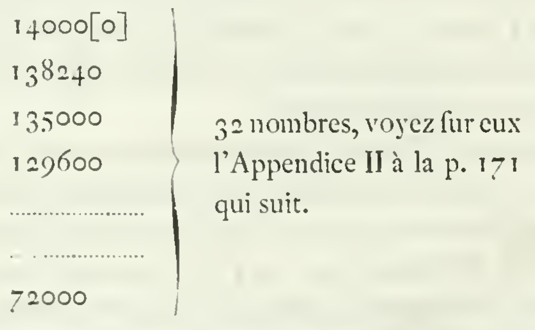
[4]) Voyez sur ce périodique la note 11 de la p. 83 du T.X qui mentionne aussi une nouvelle édition de 1721.

[5]) P. 747—754.

de muſique n'eſt pas la noſtre. *et ne ſont ſes parties aucunement egales* [nous ſoulignons]". Il pouvait donc fort bien, en écrivant cette page, programme de la Pièce *E*, conſidérer comme nouvelle la diviſion en 31 parties *égales*.

Il parle autrement ſur Merſenne dans la ſuite. Dans le § 2 de la Pièce *E* il écrit: „je veux icy aller au devant de ce que me pourroient objecter ceux qui ont lu les livres de Salinas ou du Pere Merſenne, a ſcavoir qu'il y eſt parlè bien expreſſement de cette meſme diviſion de l'octave *en* 31 *parties egales. Ce qui eſt vray et je l'avoue volontiers* [nous ſoulignons]".

Or, les nombres donnés par Merſenne au lieu cité de l' „Harmonie Univerſelle" de 1636, après les paroles énigmatiques „Ie donne neanmoins [c. à. d. ſans l'approuver] le ſysteme qui ſupplee les defauts de celuy de Salinas, afin que l'on ayt tout ce qui ſe peut deſirer ſur ce ſujet: or il y a 32 notes, ou 31 intervalles, dont on voit les raiſons exprimées par les nombres qui ſont à coſté vis a vis de chaque note, mais il eſt ſi aiſè de remarquer ce qu'il a de plus que les autres qu'il n'eſt pas beſoin de l'expliquer, joint que nous en parlons plus amplement dans le liure des Orgues", ces nombres, diſons-nous, ſont les ſuivants:



Le rapport des deux premiers nombres eſt 1,0127; celui du deuxième et du troiſième 1,0240; celui du troiſième et du quatrième 1,0417 etc. Huygens avait donc pleinement raiſon en écrivant que les intervalles de Merſenne ne ſont nullement égaux et il a eu tort d'avouer un peu plus tard le contraire. Nous ajoutons que les différences des rapports paraiſſent beaucoup trop grandes pour que nous puiſſions croire que Merſenne ait eu au moins l'*intention* de les rendre égaux. Quant à Salinas (dont Merſenne dit corriger les défauts) il écrit e. a. [6]): „non inficiamur, Tonum atque omne

[6]) „Musica", Live III, chap 27.

interuallum in quinque partes, & plures æquè proportionales diuidi posse Geometricè, sed eas esse Dieses, prorsus negamus". Voyez la p. 112 qui précède, avec la note 5. Chez Salinas il est donc manifestement question de séries d'intervalles égaux, mais, comme l'observe Huygens, seulement pour les désapprouver.

Or, dans la Pièce *F*, c. à. d. dans le „Cycle Harmonique" de 1691, Huygens écrit, comme auparavant dans la Pièce *E*: „Salinas fait mention de cette invention de diviser l'Octave en 31 parties égales, mais ce n'est que pour la condamner; & le P. Mersenne après luy la rejette de même, d'où l'on pourra bien me croire, si je dis que ce n'est pas de ces Autheurs que je l'ay prise". Dans l'une et l'autre Pièce Huygens parle de son „*nouveau* systême".

La raison donnée par Huygens pour nous faire croire „que ce n'est pas de ces Autheurs" qu'il a pris la division en 31 intervalles nous paraît faible. Ce qui est parfaitement croyable à notre avis — et tel peut être le véritable sens de sa phrase — c'est que ce ne soient pas ces auteurs *seuls* qui lui aient donné l'idée de sa περικύκλωσις. En effet, dans la Pièce qui constitue notre Appendice I il mentionne aussi Stevin; nous avons cité plus haut l'alinéa qui contient ce nom, lequel est immédiatement suivi par celui où Huygens dit que les 31 intervalles de Mersenne ne sont nullement égaux. D'autre part, nous l'avons exposé dans la note 9 de la p. 32, Mersenne savait tout aussi bien que Huygens que chez Stevin il est question de douze intervalles égaux, et les rapports des treize nombres de Beaugrand donnés par Mersenne pour les exprimer sont en effet (à fort peu près) égaux; cette circonstance met encore plus en relief l'inégalité des 31 rapports dont il est question plus haut. Nous avons vu (p. 27) que Huygens désapprouve, tout aussi bien que Descartes, la division en 12 de Stevin, qui d'ailleurs chez cet auteur n'est pas un *tempérament*, mais est censée correspondre à la nature des choses. N'y a-t-il donc pas lieu, tout bien considéré, de soupçonner que le tempérament de Huygens, son *nouveau* [mot de Huygens] cycle harmonique, provient de l'ancien cycle de Stevin, qu'il connaissait sans doute depuis sa jeunesse, corrigé par l'augmentation du nombre des intervalles? De cette façon l'avantage de la περικύκλωσις était conservé, sans que les écarts des tons avec ceux du tempérament ordinaire (le tempérament du ton moyen, que Huygens appelle le tempérament véritable [7]) fussent trop grands.

---

[7]) Voyez la l. 1 de la p. 116 qui précède.

Tout-le-monde ſait, et nous l'avons déjà dit plus haut, que c'eſt le ſyſtème de Stevin (ou d'Ariſtoxène) qui a triomphé, du moins juſqu'aujourd'hui [8]). Mais celui de Huygens eſt ſans doute plus exact.

Nous ajoutons encore la remarque hiſtorique qu'on trouve déjà chez Vicentino [9]), que Huygens ne mentionne pas, la propoſition de diviſer l'octave en 31 intervalles égaux, dont cinq formeraient un ton entier et trois un demiton majeur. D'autre part la diviſion d'un ton en cinq „dièſes" ſe trouve déjà chez Marchetto de Padoue [10]).

Conſultez ſur un manuſcrit qui nous eſt reſté inconnu et qui a pu avoir une certaine influence ſur Huygens la note 11 de la p. 46 qui précède.

Voyez auſſi la fin de la note 21 de la p. 160 qui ſuit.

Chez Huygens le ſyſtème prend un nouvel aſpect à deux égards. D'abord il eſt en état d'indiquer fort exactement les longueurs des cordes correſpondant aux différents

---

[8]) Ici nous exagérons légèrement. „Tout-le-monde" sait que le système de la gamme tempérée, à 12 intervalles égaux, a triomphé; mais il n'est pas généralement connu que Stevin a préconisé le système des 12 intervalles égaux au début du dix-septième siècle et que c'est à lui que Mersenne, dans l' „Harmonie Universelle", l'attribue en premier lieu (p. 33 qui précède). James Jeans („Science and Music", Cambridge, Univ. Press, 1938, p. 175) écrit: „All semitones are now equal and ... each represents precisely the same frequency ratio 1,0587 ... these frequency ratios had been correctly calculated by the French mathematician Mersenne [voyez cependant ce que nous disons à la p. 34 qui précède sur Beaugrand, Boulliau et Gallé], and published in his *Harmonie Universelle* as far back as 1636". J. P. N. Land écrit („Het toonstelsel van Chr. Huygens", 1891, p. 198): „Met name wilde de prakrijk, dat men de toonladder, zonder op een instrument met vaste tonen (klavier of orgel) al te veel toetsen in te voegen, op elk harer eigene trappen zou kunnen transponeren. Sedert J. Seb. Bach is dit, naar men weet, bereikt door de verdeeling der octaaf in twaalf gelijke halve tonen, waarvoor men de berekening heeft gemaakt".

[9]) Nicola Vicentino, né en 1511 à Vicenza, décédé à Rome en 1572, compositeur et théoricien, tâcha de faire revivre les systèmes chromatique et enharmonique des Anciens. Il traite ce sujet dans son ouvrage „L'antica musica ridotta alla moderna prattica", Rome 1555. Comparez K.W.J.H. Riemann, „Geschichte der Musiktheorie im IX—XIX Jahrhundert", Leipzig, 1898, p. 358.

[10]) Marchetto de Padoue, théoricien, florissait vers 1300. Comparez Riemann, l. c. p. 136.

[11]) Voyez les notes 4, 5 et 6 des p. 171 et 172 qui suivent.

tons, puisqu'il fe fert, lui le premier, paraît-il, du calcul des logarithmes [11]); défor-mais, la vraie mefure d'un intervalle devient le logarithme du rapport correfpondant: comparez le premier Avertiffement du préfent Tome et la lettre de Huygens à Moray de 1661 [12]). En fecond lieu il démontre que le fyftème des 31 tons ainfi définis diffère fi peu de celui du ton moyen que les deux peuvent être confidérés comme paffablement identiques: partant le fyftème du ton moyen acquiert pour ainfi dire un nouveau fondement mathématique.

Nous publions ici (Pièce *D*) un fragment inédit d'un projet de lettre à Bafnage de Beauval [13]); (Pièce *E*) une rédaction française du Cycle Harmonique — d'ailleurs fragmentaire elle auffi: elle fe termine par une phrafe inachevée — antérieure à celle (Pièce *F*) qui parut en octobre 1691; (Pièce *A*) la „Divifio octavæ in 31 intervalla æqualia" datant fans doute déjà de 1661 puifque le revers de la feuille contient la nouvelle méthode [14]) de cette année du calcul des logarithmes (dont Huygens fit part à l'Académie des Sciences de Paris en 1666 ou 1667, voir plus loin dans le préfent Tome); enfin une table (Pïèce *B*) mentionnée et partiellement reproduite dans l'article de 1891 „Het toonstelsel van Christiaan Huygens" de Land [15]); un commentaire fur une autre table (Pièce *C*), quelques notes (Pièce *G*) et l'important Appendice I mentionné plus haut. Voyez sur l'Appendice II la p. 142.

Notons encore que les claviers mobiles que Huygens fit conftruire à Paris paraiffent être de 1669: voyez la note 22 de la p. 161. Confultez fur un clavier mobile dont Huygens entendit parler en 1663 le deuxième alinéa de la note 2 de la p. 154.

Pour terminer nous donnons ici une table des intervalles que forment avec la tonique C les différents tons de la gamme chromatique refpectivement fuivant le fyftème de Huygens, fuivant celui du ton moyen et fuivant celui du tempérament uniforme ou divifion de la gamme en 12 intervalles égaux. Nous exprimons les inter-

[12]) P. 7 et 12 qui précèdent. F. J. Fétis, „Biographie universelle des musiciens" (2ième édition, Paris 1864, T, VI s. v. Neidhardt), émettait l'hypothèse que J. G. Neidhardt dans son ouvrage „Sectio canonis harmonici, zur voelligen Richtigkeit der Generum modulandi", Königsberg, 1724, aurait été le premier à appliquer les logarithmes dans la théorie de la musique. Riemann, „Musik-Lexikon", 9ième éd. Leipzig, 1919 (de même Riemann—Einstein „Musik-Lexikon", 11ième éd. Berlin, 1929 s.v. Logarithmen). ne connaît pas d'application de logarithmes à la musique avant L. Euler. Comparez la p. 7 qui précède (note 10).

[13]) Comparez la note 3 de la p. 141.

[14]) Comparez la fin de la Pièce II à la p. 12 qui précède.

[15]) Mentionné dans la note 4 de la p. 44 qui précède.

valles en Cents [16]) et en outre en dièses dans le cas du système de Huygens. Les différences de grandeur des intervalles du système de Huygens et de ceux du système du ton moyen sont indiquées en Cents et aussi en fractions du comma syntonique.

Intervalles avec C. d'après le système

	de Huygens en dièses	en Cents	*du ton moyen* [17]) en Cents	*différence* en Cents	en fractions de comma	*du tempérament égal*
Cis	2	77,42	76,06	1,36	1/16	100
Des	3	116,13				
D	5	193,55	193,15	0,40	1/54	200
Dis	7	270,97				300
Es	8	309,68	310,28	—0,60	—1/36	
E	10	387,10	386,31	0,79	1/27	400
F	13	503,23	503,44	—0,21	—1/102	500
Fis	15	580,65	579,48	1,17	1/18	600
G	18	696,78	696,58	0,20	1/108	700
Gis	20	774,20	772,63	1,57	1/14	800
As	21	802,91				
A	23	890,33	889,73	0,60	1/36	900
Ais	25	967,74				1000
Bes	26	1006,45	1006,80	—0,35	—1/61	
B	28	1083,87	1082,90	0,97	1/22	1100
C	31	1200.	1200.			1200

---

16) Le nombre de Cents correpondant à l'intervalle de deux tons donnés par des cordes de longueurs respectives m et n (où nous supposons $m < n$), en d'autres termes, celui de deux tons dont les fréquences des vibrations sont dans le rapport $n:m$, est le logarithme de la fraction $\frac{n}{m}$ pour la base $\sqrt[1200]{2}$. On calcule donc le nombre de Cents d'après la formule $\frac{1200 \log. \frac{n}{m}}{\log. 2}$. L'octave vaut évidemment 1200 Cents; la dièse de Huygens en comprend $\frac{1200}{31} = 38,71$; et le comma syntonique 21,5.

17) Le calcul a été exécuté par l'application de la formule de la note 16 aux valeurs de la table du „(Nouveau) Cycle Harmonique" dressée par Huygens.

A. DIVISIO OCTAVAE IN 31 INTERVALLA AEQUALIA [1])

[1661] (per logarithmos)

1676. bon. Publiè dans les Ouvrages des Scavants [2]) de Mr. Beauval, au mois de Dec. 1691 [3]).

Differentia logarithmorum 100000 et 50000 dividitur per 31 quia inter chordas partium 100000 et 50000 quærimus medias proportionales 30 ut fiant intervalla 31 æqualia.

Quotiens 97106450 additus continuè ad logarithmum numeri 50000, dabit logarithmos omnium chordarum intermediarum inter eam quæ partium 50000 et maximam partium 100000.

diff.[a] log.[i] 100000 et log.[i] 50000.

5,0000000000
4,6989700043
0,3010299957

qui eſt log. 2, quem ex cap. 7 log.[orum] Vlacquii accerſivi [4]).

31 /30102999566/ 971064502 [5])

quinta minor est verâ $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{110}$ commatis. tantundem quarta exuperat. tertia major excedit veram $\frac{1}{27\frac{1}{2}}$ commatis. tertia minor deficit $\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{37}$ commatis [6]).

5,0000000000 log. 100000
97106450
4,9902893550 [7])

---

[1]) Portefeuille „Musica", f. 11. Les remarques initiales, datées de 1676 et de 1691, ont évidemment été ajoutées plus tard. Comparez la note 3.

[2]) Ou plutôt „Histoire des Ouvrages des Sçavans".

[3]) D'après la note 1 de la p. 169 du T. X ce fut dans le fascicule d'octobre; celui-ci parut deux mois plus tard.

[4]) Voyez sur cet ouvrage la note 1 de la p. 478 du T. XIV.

[5]) Nous indiquons ainsi la division de Huygens de 30102999566 par 31.

[6]) Comparez le § 3 de la Pièce E sur le „Cycle Harmonique" qui suit (p. 158), où sont indiquées les différences suivantes par rapport aux intervalles du système usuel; pour la quinte $\frac{1}{110}$ comma (excès), pour la tierce mineure $\frac{1}{37}$ comma (défaut), pour la tierce majeure $\frac{4}{110}$ comma (excès).

[7]) La table qui suit contient les colonnes I, II, III, V et IV de celle de la „Lettre touchant le Cycle Harmonique" (Pièce F. qui suit ou plutôt T. X, p. 173). Seulement dans la table du texte toutes les unités de la dixième décimale des logarithmes qui forment la colonne I sont plus grandes de six unités. Dans celle de la „Lettre" Huygens prendra $\frac{1}{31}$ log 2 = 0,0097106450

ſcripſi 9 pro 3[7]), addito 6 quod proventurum erat ex 2 ſibi addito 31ies.

971064502	N			
4,6989700049[7])	log. 50000	V	50000	C
4,7086806499	51131			
4,7183912949	52287			
4,7281019399	53469	C	53499	B♯
4,7378125849	54678			
4,7475232299	55914		559017	B
4,7572338749	57179	L♯	57243	A♯ [8])
4,7669445199	58471			
4,7766551649	59794	L	59814	A
4,7863658099	61146			
4,7960764549	62528	*	62500	A♭ [9])
4,8057870999	63942	S♯	64000	G♯
4,8154977449	65388			
4,8252083899	66866	S	66874	G
4,8349190349	68378			
4,8446296799	69924	*	69879	
4,8543403249	71506	F♯	71554	F♯
4,8640509699	73122			
4,8737616149	74776	F	74767	F
4,8834722599	76467			
4,8931829049	78196			
4,9028935499	79964	M	80000	E
4,9126041949	81772			
4,9223148399	83621	M♭	83592	E♭
4,9320254849	85512	*	85599	D♯ [9])
4,9417361299	87445			

en négligeant les 2 unités de la 11ième décimale. Puisque le nombre trouvé doit être ajouté 31 fois à log. 50000, la somme des fautes s'élève alors à 6 unités de la 10ième décimale. C'est pourquoi dans la présente table Huygens ajoute ces 6 unités au premier terme de la série.

[8]) La présente Ais n'a dans la „Lettre" d'autre nom que celui de corde enharmonique.

[9]) Note dépourvue de nom dans la „Lettre".

4,9514467749	89422	R	89443	D
4,9611574199	91444			
4,9708680649	93512	*	63459	D♭
4,9805787099	95627	V♯	95702	C♯
4,9902893549	97789			
4,9999999999	100000	V	100000	C

En marge au crayon: V[oyez] Merſenni traitè des Conſonances et Diſſonances p. 117 [10]).

B. TABLE INTITULÉE „DIVISION DE L'OCTAVE EN 31 PARTIES EGALES" [11])

Diviſion en parties egales	Diviſion ſuivant le temperament ordinaîre	
50000	V [12])	50000
51131		
52287		
53469	C	53499
54678		
55914	C♭	
57179	*	
58471		
59794	L	59814
61146		
62528	*	62500

[10]) Ceci se rapporte aux „Traitez" cités e.a. dans la note 63 de la p. 120 qui précède. Livre II. Des Dissonances. Prop. II. „Expliquer tous les Demitons, et les Dieses dont on se sert dans la Musique considerée en sa plus grande perfection". Mersenne y traite des observations de Salinas („De Musica", Lib. III, cap. 27) sur l'Archicymbalum dont il sera question à la p. 157 qui suit.

[11]) Portefeuille „Musica", f. 4. La table a été mentionnée, et les dernières lignes ont été publiées en 1891 par J. P. N. Land, comme nous l'avons indiqué dans l'Avertissement. Comme cette table est à fort peu près identique avec celle de la Pièce A qui précède nous l'aurions omise si nous n'avions voulu tenir compte de l'article de Land.

Division en parties egales	Division suivant le temperament ordinaire	
63942	S♯	64000
65388		
66866	S	66874
68378		
69924		
71506	F♯	71554
73122		
74776	F	74767
76467		
78196		
79964	M	80000
81772		
83621	M♭	83592
85512	*	85599
87445		
89422	R	89443
91444		
93512	*	93459
95627	V♯	95702
97789		
100000	V	100000

Dans la division egale les quintes sont moindres que les parfaites d'un $\frac{1}{4} - \frac{1}{110}$ de comma; et partant un peu meilleures que dans le temperament ordinaire ou il y a $\frac{1}{4}$ de comma entier. Les quartes sont donc plus grandes que les parfaites d' $\frac{1}{4} - \frac{1}{110}$ de comma. La tierce majeure excede la parfaite d' $\frac{1}{27}$ de comma. La tierce mineure est trop petite d' $\frac{1}{4} + \frac{1}{37}$ de comma.

C. COMMENTAIRE SUR UNE TABLE[1]).

La 2[de] colomne de cette table [2]) contient les nombres qui expriment les longueurs des 31 chordes qui sont les 31 intervalles egaux suivant la nouvelle division, la chorde entiere estant supposée de 100000 parties et par consequent sa moitiè, qui fait l'octave contre elle de 50000. Et a costè sont les noms des tons, qui sont emploiez d'ordinaire et des * pour quelques chordes enarmoniques, dont celle aupres du sol♯ est la plus necessaire.

Ces nombres ont estè trouvez par ceux de la 1[re] colomne qui sont leur logarithmes respectifs. Et pour avoir ceux cy, j'ai divisè le logarithme de 2 qui est 0,30102999566 par 31, d'ou est venu le nombre N 97106450, que j'ay adjoutè continuellement au logarithme de 50000, qui est 4,6989700049. D'où sont procedèz tous ces logarithmes jusqu'au plus grand 4,9999999993, qui manquant si peu de 5,0000000000, fait voir que le calcul a este bien fait. Ceux qui entendent les Logarithmes scavent qu'il a falu faire ainsi pour avoir les 30 nombres proportionaux entre 100000 et 50000.

La 3[e] colomne comprend les longueurs des chordes suivant le Temperament ordinaire [3]), et dans la 4[e] colomne sont leurs logarithmes; qui ont estè trouvez par les nombres Algebriques de la 5[e] et 6[me] colomne. Et ceux cy par la methode qui s'ensuit [4]), et qui fait voir comment ce Temperament pourroit avoir estè trouvè lors qu'il estoit encore inconnu.

J'ay nommè a la longueur de toute la chorde dont le ton soit Vt d'où la moitiè estoit $\frac{1}{2}a$, dont le ton est marquè Vt². Pour la longueur de la chorde sol j'ay mis x, m'imaginant que ce fut la quinte au dessus de ut. Et, faisant l'intervalle de sol Re²

---

[1]) Portefeuille „Musica", f. 9r et v.

[2]) Nous ne possédons pas la table en question. Le texte fait voir qu'elle doit avoir été partiellement identique avec celle du „Cycle Harmonique" (la présente Pièce F) publiée à la p. 173 du T.X: les colonnes I et II doivent avoir été les mêmes à cette différence près que dans la table du texte les noms des notes formant les colonnes III et IV de l'autre table faisaient partie de la colonne II. Les colonnes III et IV de la table du texte correspondaient donc aux colonnes V et VI (voyez sur cette dernière les corrections de Huygens de la p. 240 du T.X.) de l'autre. Quant aux colonnes V et VI, elles étaient apparemment identiques avec les deux premières colonnes de la Pièce C. „Divisio Monochordi II" (p. 57 qui précède), du moins en ce qui se rapporte à l'intervalle Ut-Ut², et à cette différence près que la table du texte ne donnait pas les longueurs des cordes enharmoniques entre C♯ et D, entre D et E♭, entre G♯ et A et entre A et B (c. à. d. Bes).

[3]) C'est du système du ton moyen que Huygens entend parler. Comparez la note 14 de la p. 158.

[4]) Consultez la Pièce B. Divisio Monochordi I.

derechef d'une quinte il faloit que comme a à x ainſi fut x à $\frac{xx}{a}$ longueur de la chorde Re^2. Et de cellecy l'octave en bas, ſcavoir Re devoit eſtre $\frac{2xx}{a}$; et d'icy montant derechef d'une quinte en La, sa longueur devoit eſtre $\frac{2x^3}{aa}$, parce que comme a à x ainſi $\frac{2xx}{a}$ a $\frac{2x^3}{aa}$. Et montant encore d'une quinte en Mi^2, elle eſtoit $\frac{2x^4}{a^3}$ et ſon octave en bas Mi, $\frac{4x^4}{a^3}$.

Or je ſcavois que l'intervalle de Ut, La devoit faire la ſexte majeure, et qu'on l'emploioit pour tel. Mais en poſant les quintes juſtes ſelon la proportion de la 3 à 2, c'eſt a dire en faiſant $x \infty \frac{2}{3}a$, on avoit $\frac{2x^3}{aa} \infty \frac{16}{27}a$. Donc la proportion de a à $\frac{16}{27}a$ devoit eſtre comme de 5 a 3 qui est celle de la ſexte majeure, ce qui n'est point, car la raison de a à $\frac{16}{27}a$, ou bien la raison de 27 a 16, excede celle de 5 à 3 de la raiſon de 81 à 80, qu'on appelle le Comma, donc en voulant que les quintes ſoient juſtes, la ſexte majeure ſurpaſſoit la vraye d'un comma entier, ce que l'oreille ne peut pas ſouffrir eſtant pres de 1/9 de ton. Mais outre cela l'intervalle de Ut, Mi, qu'on veut que ce ſoit une tierce majeure, devient plus grand que le veritable, car Mi a eſtè trouvè $\frac{4x^4}{a^3}$ qui devient $\frac{64}{81}a$ ſi on ſuppoſe $x \infty \frac{2}{3}a$. Or la raiſon de a a $\frac{64}{81}a$, ou de 81 a 64, eſt plus grande que celle de 5 à 4 (qui donne la tierce majeure juſte), de la raiſon de 81 à 80, qui eſt encore juſtement celle du Comma. Et les tierces mineures ſeront moindres que les veritables de ce meſme Comma parce qu'elles ſont le complement a la quinte des tierces majeures. J'ay donc vu qu'il eſtoit bon de diminuer les quintes de quelque choſe en poſant x plus grand que $\frac{2}{3}a$, parce que de là les ſextes majeures decroiſſoient eſtant trop grandes; et qu'en meſme temps la tierce majeure Ut Mi ſe diminuoit auſſi parce que $\frac{4x^4}{a^3}$ devient plus grand lors qu'on augmente la quantitè de x. Mais de combien plus grande faloit il prendre x que $\frac{2}{3}a$. La voie du milieu parut eſtre la meilleure qui eſtoit de faire que les quintes et les ſextes majeures differaſſent egalement des vraies, les unes en perdant les autres en excedant. J'ay donc fait que la longueur de x fut à $\frac{2}{3}a$ comme $\frac{3}{5}a$ à $\frac{2x^3}{aa}$, c'eſt a dire comme la longueur de La parfaite à celle qui a eſtè trouvée cy deſſus. d'ou vient l'equation $\frac{2x^4}{aa} \infty \frac{6}{15}aa$ et $x \infty \sqrt{\sqrt{\frac{1}{5}a^4}}$.

Par là la chorde Mi qui a eftè trouvée $\frac{4x^4}{a^3}$ devient $\frac{4}{5}a$, x eftant donc fuppofée telle les quintes feront diminuees de la mefme quantitè que les fextes majeures [5]). Or la raison de $\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}a^4}}$ a $\frac{2}{3}a$ eft la mefme que celle qui conftitue le quart du comma, puifque cette raifon eftant quadruplée fait la raifon de 81 à 80 ou du comma entier, comme il eft aifè de voir en prenant le quarre quarrè de chacun des deux termes.

Diminuant donc la quinte Ut, fol, et par confequent auffi les autres de $\frac{1}{4}$ de Comma, les fextes majeures furpafferont d'autant les veritables; et pour les quartes et les tierces mineures qui font les complements a l'octave de ces confonances, les premieres furpafferont les vraies du mefme $\frac{1}{4}$ de comma et les autres defaudront d'autant.

D. PROJET D'UNE LETTRE À BASNAGE DE BEAUVAL [1]).

Je vous envoie comme j'avois promis, ma remarque en matiere de Mufique. Elle regarde le premier fondement de cette fcience, fcavoir la determination des Tons que l'on obferve dans le Chant et dans la fabrique des Inftrumens qui fervent a l'harmonie. Ceux qui ont un peu eftudiè en cecy la Theorie, fcavent que l'Octave eft divifee en tons et femitons, qui ne font pas formez par hazard ni par caprice, mais qui font comme des fuites neceffaires des confonances; ce qui eft caufe que par tout le monde ces Tons ou degrez du chant ne fcauroient eftre que les mefmes, c'eft a dire du chant le plus naturel, qu'on appelle diatonic. Ils fcavent auffi que depuis qu'on a commencè a vouloir definir ces mefmes Tons felon l'exactitude mathematique, l'on a trouvè quelque diverfitè dans la divifion de l'octave faite en divers temps et par diverfes perfonnes. Car les anciens qui ne comptoient pour confonances que l'octave, la quinte et la quarte, et qui ne pratiquoient point la compofition a plufieurs parties, prenoient feulement garde en divifant leur octave ou double octave, que les intervalles des tons leur rendiffent en certains endroits ces confonances dans toute leur perfection. Mais dans la Mufique moderne ou l'on a trouvè que la pluralitè des confonances eft neceffaire et que toute l'harmonie des concerts en depend; on a reconnu que fur nos inftrumens les plus parfaits comme les Orgues et les Clavecins, on ne pouvoit fuivre aucune des conftitutions des Tons des Anciens, ou bien qu'il faloit adjouter a ces

---

[5]) Lisez: de la quantité dont les sextes majeures seront augmentées.

[1]) F. 10 r et v du portefeuille „Musica”. Comparez, aux p. 169 et suiv. du T. X, le texte définitif de la „Lettre touchant le Cycle Harmonique”.

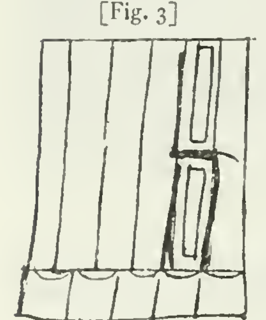
instrumens des chordes et des touches extraordinaires, outre les feintes ou tons chromatiques qu'on y avoit desia adaptees avec beaucoup de raison [2]). parce que sans ces chordes adjoutees on manquait de plusieurs consonances necessaires, ou on les avoit si imparfaites que l'oreille ne pouvoit les souffrir. mais ce nombre des touches supernumeraires apportant trop de confusion et de difficultè, on a a la fin trouvè heureusement ce qu'on appelle le Temperament, a l'aide duquel, en ostant quelque peu à de certaines consonances et adjoutant à d'autres sans que pourtant cela choque l'oreille, on a formè le systéme dont on se sert aujourdhuy qui est abondant en accords; et fournit tout ce qu'il faut pour l'Harmonie de plusieurs Parties. Apres cette invention, dont les meilleurs autheurs comme Zarlin et Salinas parlent comme d'une des plus belles et des plus utiles qui se puissent trouver en fait de Musique, l'on a laissè la tous les Systèmes des Anciens, et les supplemens des chordes des modernes; sur tout depuis que ces autheurs que je viens de nommer, ont examinè et defini le meilleur temperament par regle et par raison, dont ils se disputent entre eux la gloire; car l'experience et la necessitè l'avoient desia introduit en quelque maniere auparavant, sans qu'on sçust pourtant la vraie mesure ni methode.

On apprend au reste chez ces mesmes autheurs, que pour pratiquer ce Temperament dans l'accord des instrumens il faut diminuer la consonance de quinte d'une petite quantitè qui fait le quart de ce qu'on appelle Comma; ce qui est si peu que cette diminution à peine est perceptible a l'oreille et ne l'offense nullement; le comma entier estant le raport entre les tons de la chorde entiere contre elle mesme racourcie d'une $\frac{1}{80}$ partie. Toutes les quintes estant ainsi diminuees, il s'en ensuit que les quartes sont

---

[2]) On connaît l'existence d'instruments à touches scindées (p.e. pour dis et as) déjà dans la deuxième moitié du 15[ième] siècle. Ils s'appelaient: instruments enharmoniques. D'autre part il y avait des constructions permettant de modifier par voie mécanique les tons des touches supérieures. Pour les particularités on peut consulter la dissertation de 1935 de W. Dupont (comparez la note 9 de la p. 157 et la note 14 de la p. 158).

[Fig. 3]



En 1663 Huygens visita à Londres un nommé Senti qui demandait une certaine somme „voor een clavecingel die 2 halve toonen gesneden soude hebben, en met het uyttrecken van 't clavier een toon hoogher gaen" (Journal de voyage à Londres, p. 176 de H. L. Brugmans „Le séjour de Christian Huygens à Paris etc." 1935).

La Fig. 3 de Huygens, empruntée à la f. 1 du portef. „Musica", représente une touche scindée.

augmentees de cette mesme quantité de quart de comma, que les tierces mineures sont encore diminuees, et les sextes majeures augmentees, de cette mesme quantité. Et qu'enfin les Tierces majeures demeurent parfaites ce qui est fort considerable. Enfin tous ces petits changements aux consonances dont il n'y a que ces tierces majeures et les octaves d'exceptees, n'empeschent pas que toute l'harmonie ne soit ecoutée comme si rien ne manquoit [3]).

E.[1]) CYCLE HARMONIQUE PAR LA DIVISION DE L'OCTAVE EN 31 DIESES[2]), INTERVALLES EGAUX.

Cette étude est précédée (également f. 16 du portef. „Musica") par la Pièce, le programme peut-on dire, que nous publions comme Appendice à la p. 168 qui suit.

§ 1. Ceux qui ont un peu estudié la Theorie de la Musique (et ce n'est que d'eux que je pourray estre entendu) sçavent ce que c'est que le Temperament qui sert a bien accorder les instruments a clavier qui sont les plus parfaits que nous ayons. Zarlin et Salinas en parlent comme d'une des belles choses et des plus necessaires, qu'on pust trouver dans la musique et se disputent l'honneur de l'avoir examiné et reglé par raison car l'experience et la necessité avoient desia auparavant introduit l'affoiblissement des 5[tes] qui est le point principal, mais sans precise mesure, sans sçavoir de combien. C'est aussi ce Temperament qui a fait negliger avec raison tous les divers systemes et divisions du monochorde des anciens, la pluspart absurdes et inpraticables; et qui rend

---

[3]) En marge: vocem temperamentum sequi. — Salinas parle de la division 31. Comparez la p. 112 qui precède.

[1]) Portefeuille „Musica" f. 16—19.

[2]) Huygens donne à l'intervalle 31 fois répété le nom dièse (δίεσις), lequel dans le système harmonique naturel désigne l'intervalle dont une octave surpasse la somme de trois tierces majeures (grand dièse) ou bien celui dont la somme de 4 tierces mineures surpasse l'octave (petit dièse). Dans le système pythagoricien le même mot est parfois employé pour indiquer le λεῖμμα (256 : 243). Chacun de ces dièses a sa propre valeur: celle du grand dièse est de 62,6 Cents, du petit 40,1 Cents, du λεῖμμα ou limma 90,23 Cents, de celui de Huygens 38,71 Cents.

Gènéralement, chez les musicologues, le mot δίεσις est employé pour désigner un petit intervalle. La manière dont Huygens applique ce terme s'accorde en principe avec celui d'Aristoxène, qui appelle son plus petit intervalle ($\frac{1}{4}$ ton) δίεσις ἐναρμόνιος ἐλαχίστη („Harm. Elem". éd. Meibomius, p. 21). On pourrait parler d'un intervalle-atome.

Comparez l'„intervalle-atome" de la Tabula de Meibomius mentionnée à la p. 6 qui précede.

noſtre ſyſteme plus abondant en accords et plus ſelon la nature du chant, que n'eſtoient ceux la [3]).

On apprend au reſte chez ces autheurs [4]) que pour le pratiquer les quintes et les 6 mineures ſont diminuees d'un quart de comma, qui eſt un petit intervalle a peine perceptible a l'oreille, le comma entier eſtant le rapport entre le ſon de la chorde entiere contre elle meſme racourcie d'une partie 81me, et que les 4tes et les ſixtes majeures par conſequent s'y trouvent augmentees de ce meſme quart de comma et qu'ainſi outre les octaves et les tierces majeures qui demeurent parfaites, tous les accords ſont modifiez [5]) en ſorte que l'oreille n'en eſt aucunement offenſée, mais ſ'en contente comme ſ'ils eſtoient parfaits, que je ſuppoſe que l'on connoit, ſcavoir que la quinte parfaite ſ'entend entre le ſon de la chorde entiere et celuy de ſes $\frac{2}{3}$. ou bien que la proportion qui produit cette conſonance eſt de 3 a 2, celle de la quarte de 4 a 3; de la tierce majeure de 5 à 4, de la tierce mineure de 6 a 5. de la sixte majeure de 5 à 3, de la ſixte mineure de 8 a 5.

Or la remarque que j'ay faite, c'est que ſi on diviſe l'Octave en 31 parties egales, ce que ſe fait en trouvant 30 longeurs moienes proportionelles entre toute la chorde qu'on prend pour regle Harmonique, et sa moitiè; on trouvera dans les tons qui provienent en faiſant ſonner apart toutes ces longeurs, un ſyſtème ſi approchant de celuy qui provient du dit Temperament, tant pour les tons diatoniques que chromatiques et enarmoniques qu'on y voudra joindre, qu'il ſera entierement impoſſible que l'oreille la plus delicate y trouve de la difference. Et que pourtant ce meſme nouveau ſyſteme ſera d'une nature bien differente de l'autre, et apportera de nouveaux avantages tant pour la theorie que pour la pratique.

Le ſon contiendra 5 de ces parties egales, qu'on peut nommer dieses, le grand demiton 3, le petit demiton 2, la tierce mineure 8, la tierce majeure 10, la quarte 13, la quinte 18; la ſixte mineure 21; la ſixte majeure 23; le triton 15 et la fauſſe quinte par conſequent 16 [6]).

§ 2. Mais devant que de faire voir la proximitè de cette diviſion avec celle qui nait du Temperament ſuſdit, je veux icy aller au devant de ce que me pourroient objecter ceux qui ont lu les livres de Salinas ou du Pere Merſenne, a ſcavoir qu'il y eſt parlè bien expreſſement de cette meſme diviſion de l'octave en 31 parties egales. Ce qui

3) Leçon alternative: les leurs.

4) Voyez, à la p. 49 qui précède, la Pièce B. „Divisio Monochordi I".

5) Leçon alternative: ordonnez.

6) Voyez l'Avertissement. Le triton ou quarte augmentée est un intervalle composé d'un ton majeur, d'un ton mineur et d'un deuxième ton majeur, p.e. c — fis$\overline{\ \ }^{1}$. Le rapport correspondant est 45:32 ou approximativement 7:5. La „fausse quinte" est le complément du triton par rapport à l'octave.

eſt vray et je l'avoue volontiers. Mais comme Salinas ne fait mention de cette invention que pour la condamner abſolument, et que le P. Merſenne la rejette de meſme, on pourra bien me croire ſi je dis que ce n'eſt pas de la que je l'ay pris [7]). Mais quand cela ſeroit, je croirois avoir fait aſſez d'avoir examinè cette diviſion par la voye de la geometrie et de l'avoir ſoutenuë contre l'injuſte ſentence prononcee par ces 2 celebres autheurs. je crois qu'on me ſeroit obligè.

Salinas fait un Chapitre entier dont l'inſcription eſt *De prava conſtitutione cujusdam inſtrumenti quod in Italia citra quadraginta annos fabricari coeptum eſt, in quo reperitur omnis tonus in partes quinque diviſus* [8]). Il dit que cet inſtrument eſtoit nommè archicymbalum [9]) qu'il eſtoit *incerti authoris* [10]), que certains muſiciens celebres en faiſoient grand eſtime, et particulierement de ce qu'il avoit tous les intervalles et toutes les conſonances (comme ils croient dit il) en deſſus et en deſſous, et qu'apres certaine periode on y revenoit au meſme ſon, ou æquivalent, d'ou on eſtoit parti. marquant auſſi combien de ces 31 parties egales de l'octave, chaque conſonance en contenoit, de meſme que je viens de faire. Mais il adjoute qu'il a eſſaiè d'accorder un inſtrument de cette maniere, mais qu'il a rendu un ſon deſagreable et qui bleſſoit ſi fort les oreilles de tous ceux qui l'entendoient; qu'il en conclud qu'un tel accord ſ'eloigne de toute raiſon harmonique, ſoit qu'on conſidere les accords juſtes ou bien les temperez [11]).

Outre ſon experience il adjoute encore cette raiſon priſe de la maniere dont pour cet archicymbalum on diviſoit l'intervale du ton en 5 parties egales, qui eſtoit de prendre ſur cet intervalle depuis ſes 2 extremitez deux demitons majeurs, et puis d'ou ceux cy finiſſent en arriere deux demitons mineurs. Il dit que par ce moien le ton n'eſt pas diviſè en 5 parties egales. Mais de quel ton pretend il parler puis qu'il s'agiſſoit de leur ton de $\frac{5}{31}$ de l'octave, du quel il n'a point sceu la grandeur, ni peut estre ceux la meſme qui eſtoient inventeurs, car on a beſoin pour cela des logarithmes inconnus alors [12]).

---

7) Voyez sur ce passage l'Avertissement qui précède.

8) Cap. 27 du Lib. III de „de Musica".

9) Nous ignorons le constructeur de cet instrument que Salinas paraît avoir vu déjà vers 1537 („citra quadraginta annos", écrit-il en 1577). Il est bien connu que plus tard dans le cours du seizième siècle il en a existé plusieurs. Vicentino en construisit un qu'il décrit dans „L'antica musica ridotta alla moderna prattica" de 1555 (comparez la note 9 de la p. 144).

Arnolt Schlick fait également mention d'instruments de ce genre: voyez N. Dupont „Geschichte der musikalischen Temperatur", Inaug. Diss. Erlangen 1935. Nördlingen, 1935, p. 51.

10) „... ab eius autore, quisquis ille fuit, Archicymbalum appellatum".

11) L. c. p. 166.

12) En marge: comment ſcavoit il la valeur de leur ton. ſ'il euſt ſu les logarithmes. du ton qui fait $\frac{5}{31}$ d'octave. voir Salinas l. 3. ch. 15 ou 27. — Le chap. 15 du livre 3 est intitulé „Quod tres sunt inventæ temperamenti constitutiones in Musicis, quibus utimur, instrumentis: et de illarum prima". Voyez sur le chap. 27 la note 6 de la p. 142 qui précède.

Sans cela il n'eſtoit pas poſſible preſque de trouver 30 moienes entre 2 nombres donnez, de ſorte que ni Zarlin [13]) a pu examiner cette diviſion, ni les inventeurs de l'archicymbale connoitre ſ'il eſtoit accordè ſuivant ce qu'ils pretendoient. Enfin ce nouveau temperament qu'il rebute ſi fort ſe peut dire le plus excellent de tous, ayant tous les avantages qu'il dit qu'on luy attribuoit, et encore d'autres dont je parleray en ſuite, et ſon harmonie ne pouvant eſtre diſtinguée avec celle que donne le Temperament ordinaire dont tous ſe ſervent.

§ 3. Pour le faire voir je dis premierement que les quintes de cette diviſion ne ſurpaſſeront celles du Temperament que de $\frac{1}{110}$ de Comma [14]), difference qui ne ſcauroit aucunement eſtre appercue par l'oreille, puiſque celle de $\frac{1}{4}$ de Comma l'eſt ſi peu qu'elle ne l'offenſe pas. Et il faut noter que c'eſt de ce $\frac{1}{110}$ de Comma, que les quintes de la diviſion approchent d'avantage des 5tes parfaites que ne font celles du Temperament. les quartes par conſequent ne ſont excedées que de $\frac{1}{110}$ de Comma de celles du Temperament, et elles tendent d'autant plus vers la perfection de cette Conſonance.

Les tierces mineures ſont excedées de celle du Temperament par $\frac{3}{110}$ ou environ

[13]) Ceci doit probablement s'entendre de Salinas.

[14]) Voyez la Table de l'Avertissement. La différence est de 0,20 Cents. Le comma contient 21,5 Cents. $\frac{1}{110}$ comma = 0,196 Cents.

A propos des endroits du „Cycle harmonique" ou „Novus Cyclus Harmonicus" (Pièce F), où se trouve la même affirmation, Riemann observe dans une note de la p. 359 de sa „Geschichte der Musiktheorie" (nous l'avons déjà dit dans la note 10 de la p. 7 qui précède): „Huyghens . . . wirft Salinas und Mersenne vor, dass sie aus Unkenntnis der Logarithmen, die Vorzüglichkeit der 31-stufigen Temperatur nicht hätten erkennen können; nicht um $\frac{1}{4}$ des syntonischen Kommas zu klein, sondern um $\frac{1}{110}$ desselben zu gross seien die Quinten dieser Temperatur. Nach meiner grossen Tabelle der Tonwerte in Logarithmen auf Basis 2 . . . sind aber doch die Quinten um $\frac{1}{4}$ Komma zu klein — ich überlasse die Nachprüfung Mathematikern von Fach!" Dupont dans sa „Geschichte der musikalischen Temperatur" (note 9 qui précède) aboutit à la même conclusion par un raisonnement analogue. Or, ces remarques sont le résultat d'un malentendu. Huygens dit clairement que ses quintes surpassent de $\frac{1}{110}$ de comma les quintes du tempérament usuel, *c. à. d. du système du ton moyen.* En effet, tout son discours tend à faire voir que son système ne diffère qu' imperceptiblement de celui du ton moyen. Mais les auteurs cités le font dire bien à tort que sa quinte ne diffère que de $\frac{1}{110}$ de comma de la quinte *naturelle* et combattent ensuite cette assertion prétendue.

Notons en passant que Huygens se rendait parfaitement compte du fait que Salinas, mort en 1590, ne pouvait pas connaître les logarithmes: voyez les dernières lignes de la p. 157.

$\frac{1}{37}$ de Comma [15]). Et les ſixtes majeures excedent d'autant les ſixtes majeures du Temperament. toutes deux a la veritè en ſ'eloignant de la proportion parfaite. Mais on voit que cette difference ne ſcauroit encore eſtre perceptible.

Les tierces majeures enfin excedent celles du temperament, qui ſont parfaites, de $\frac{4}{110}$ ou $\frac{1}{28}$ de Comma [16]). qui eſt une ſi petite difference qu'on ne les pourra prendre que pour parfaites puiſque ſur une chorde de 5 pieds elle n'importe pas $\frac{1}{3}$ de ligne. Les demitons majeurs comme de E,F y approchent un peu plus de leur vraie proportion que dans le temperament, car cette vraie proportion eſtant de 16 a 15, ſçavoir la difference d'entre la quarte et tierce majeure parfaite, le demiton du Temperament la ſurpaſſe de $\frac{1}{4}$ de comma, et le noſtre de $\frac{1}{4}$ moins $\frac{1}{22}$ de comma [17]) ce qui ne pourroit qu'adoucir tant ſoit peu ce demiton et feroit du bien dans les cadences [18]).

On peut dire au reſte qu'il n'est qu'avantageux de gaigner quelque perfection ſur les 5tes et ſur les 4tes en perdant un peu plus ſur les tierces, parce que plus les conſonances ſont parfaites, c'eſt a dire plus leur tremblements ſ'uniſſent ſouvent, et moins l'oreille leur ſouffre d'alteration. ainſi à l'uniſſon et a l'octave on n'en peut ſouffrir la moindre. Et la quinte eſt plus ſenſible en cela que la quarte et celle cy que les tierces et les ſixtes. Mais, comme j'ay deſia montrè, toutes les differences de ces 2 Temperaments ſont imperceptibles, et il ſ'enſuit que lors qu'un jeu d'Orgue ou un clavecin ſera accordè ſuivant le Temperament ordinaire, on peut dire qu'il le ſera auſſi ſuivant le nouveau, autant que l'oreille peut diſcerner. Mais ſi pourtant on veut ſe ſatiſfaire entierement la deſſus, et avoir en meſme temps la diviſion de l'octave en 31 parties egales on n'aura qu'a diviſer un monochorde ſuivant les nombres que l'on verra dans le Table que je donne [19]), et en mettant ſa chorde en uniſſon avec le c du clavecin ou orgue, accorder de meſme les autres chordes ou tuyaux avec les ſons de la chorde ſucceſſivement racourcie du Monochorde.

Que ſi l'on demande, quel avantage on tire donc de cette Diviſion puis qu'elle donne des tons ſi ſemblables a ceux du Temperament, je dis qu'il y en a plus d'un. car

[15]) La différence est de 0,60 Cents. $\frac{1}{110}$ comma = 0,59 Cents.

[16]) La différence est de 0,79 Cents. $\frac{4}{110}$ comma = 0,78 Cents.

[17]) Dans le système harmonique naturel le demi-ton majeur est de 112 Cents, dans celui du ton moyen il est de 117,13 et chez Huygens de 116,13 Cents. La différence des écarts est donc de 1 Cent ou environ $\frac{1}{22}$ comma.

[18]) Savoir dans toutes les cadences où le dessus monte d'un demi-ton.

[19]) Voyez la Pièce F qui suit, c. à. d. le (Nouveau) Cycle Harmonique, T. X, p. 173.

premierement elle nous apprend que ſans rien faire perdre du bon effect du Temperament, mais pluſtoſt en y adjoutant, nous avons un ſyſteme dans lequel chaque chorde tant des tons que ſemitons et dieſes ſe trouve avoir toutes les conſonances et intervalles en deſſus et en deſſous, et cela partout de la meſme façon.

que dans ce ſyſteme le demiton majeur contient trois cinquiemes parties du ton, et le demiton mineur les autres deux cinquiemes.

qu'enfin il conſtitue [comprend] un parfait Cycle Harmonique, en ce qu'en y montant ou deſcendant tout de ſuite par l'intervalle de quinte ou quelqu'autre que ce ſoit, on revient apres certaine revolution a la chorde d'ou l'on a commencè [20]).

§ 4. Je dis de plus que ſur ces fondemens on peut conſtruire un jeu d'orgue ou un Clavecin, qui ſervira a tranſpoſer en hauſſant ou en baiſſant de tel intervalle qu'on voudra, comme de 4[te], tierce, ton, demiton, &c, juſqu'a une dieſe ou cinquieme de ton. Ce qui ſur les inſtrumens ordinaires de cette ſorte eſt impoſſible; et ſe fait icy ſans peine ni ſans avoir l'habiletè que la tranſpoſition demande. Et a fin que ceux qui voudront faire fabriquer un tel inſtrument ſcachent comment ſ'y prendre je veux icy donner l'inſtruction.

Il faut diſpoſer les tuyaux ou les chordes en ſorte qu'il y en ait 31 dans chaque octave ſans comprendre la derniere chorde, ce qui eſt aiſè aux orgues et encore aux Clavecins, puis qu'on y met deſia d'ordinaire 24 chordes a ceux qui ont deux regiſtres à l'uniſon et quelque fois encore 6 ou 8 autres pour 3 ou 4 feintes extraordinaires [21]). Les batons qui font partir ces tuyaux ou chordes ſe feront preciſement d'egale largeur, qui ſoit d'une cinquieme partie de la largeur d'une touche et ſeront rangez pres les uns des autres et tous a meſme hauteur, ſans aucune difference. La deſſus on poſera un clavier mobile ayant les touches a l'ordinaire qui ſeront attachees par un bout à une regle platte qui puiſſe couler dans une autre regle fixe et arreſtée ſans en pouvoir ſortir ce qui eſt aiſè. De la regle mobile vers chaque bout on coupera 3 ou 4 morceaux chacun de la largeur d'une touche, ce qui ſera que les touches atta-

---

[20]) C'est à cette propriété que le petit traité de Huygens doit son titre (*Cycle* Harmonique). Elle résulte immédiatement du fait que chaque intervalle est un multiple entier du dièse. Lorsque l'intervalle considéré est de n dièses, une ascension par une série de 31 de ces intervalles-là conduit à la n[ième] octave du ton fondamental.

[21]) Il en était ainsi p. e. pour le Gravicembalo construit en 1548 pour Zarlino par Domenico de Pasaro: entre b et c et de même entre e et f une touche blanche avait été intercalée; entre les autres touches blanches chaque fois deux touches supérieures colorées. Il est quelquefois fait mention d'une scission en deux de la touche noire entre d et e pour distinguer les notes dis et es, et même de celle entre g et a pour distinguer as et gis. Comparez Dupont l. c. p. 50 et suiv. Un „clavemusicum omnitonum" de 1606, possédant 31 touches pour chaque octave, a été conservé jusqu'aujourd'hui (Dupont, p. 53).

Le lecteur hollandais pourra consulter aussi l'ouvrage de M.[me] Bertha van Beynum von Essen „Bouw en Geschiedenis van het Klavier" (Rotterdam, Brusse, 1932).

chées a ces morceaux se pourront transporter d'un bout de la regle immobile a l'autre a fin que la mobile puisse avancer ou reculer autant qu'il est besoin selon les marques qu'on escrira dessus. J'ay fait autrefois ajuster de tels claviers mobiles a des clavecins estant a Paris, et mesme a ceux qui avoient leur clavier ordinaire où il faloit que celuy que je mettois par dessus egalast en mesme temps les hauteurs des touches et des feintes a fin que les touches pussent glisser sans empeschement. Et cette invention fut approuvée et imitée par des grands maitres qui y trouvoient de la commoditè et du plaisir [22]).

Il reste a dire pour celle dont je traite icy qu'il faut attacher par dessous à chaque touche et feinte du clavier mobile de petits bouts, disposez en sorte qu'ils se rencontrent placez pour presser directement sur les batons qui sont dessous et qui respondent aux tons de ces touches, à quoy il faut du soin et de l'exactitude. mais estant bien ajustez dans une situation ils seront bien dans toutes les autres a cause de l'egale largeur des bastons.

Il y a aussi cette commoditè que sans adjouter des chordes on peut avoir des feintes extraordinaires sur le clavier pour les tons enarmoniques qui servent principalement à suppleer des accords dont on a a faire en jouant dans certains tons. Car ces touches adjoutees trouveront aussi bien que les autres, leur vrayes chordes dans toutes les transpositions, comme il paroitra par le Table suivante [23]) ou les plus necessaires de ces feintes à adjouter seront marquées.

§ 5. Je raporteray encore icy une remarque a l'avantage de ce nouveau temperament qui est que l'intervalle du triton y est contenu par tout de la proportion de 7 à 5 ne manquant qu'un $\frac{1}{12}$ de comma et celuy dela fausse quinte par consequent n'excedant que d'autant la proportion de 10 a 7. au lieu que ces differences dans le temperament ordinaire sont de $\frac{1}{7}$ de comma [24]). Or je dis que ces intervalles de 7 a 5 et de 10 a 7 ont quelque chose de harmonieux estant examinez avec attention (du moins

[22]) En juillet et août 1669 (T. VI, p. 473 et 484) Huygens fait mention dans des lettres à son frère Lodewijk de son „invention du clavecin" ou „invention [du] clavier mobile", dont il dit avoir envoyé une exacte et assez longue description à leur père. Nous ne la possédons pas, car les lettres échangées entre Huygens et son père pendant le séjour du premier en France nous font défaut; comparez la note 3 de la p. 7 du T. XVIII.

[23]) Voyez la Table par laquelle se termine notre Avertissement (p. 146).

[24]) L'intervalle 7 : 5 vaut 582,52 Cents. Pour la vraie valeur 45 : 32 du triton on trouve 590,22 Cents. 15 dièses diffèrent en effet de 1,87 Cents ou $\frac{1}{12}$ comma du nombre de Cents mentionné 582,52.

je le trouve ainſi a mon oreille) et qu'on les pourroit compter parmy les conſonances [25]) quelque choſe qu'en puiſſent dire les maitres compoſiteurs, qui les rangent autrement parmy les fauſſes relations [26]). Il en peut eſtre de meſme que des Tierces majeures et mineures chez les anciens qui ne les voulurent jamais reconnoitre comme conſonances, comme encore aujourd'huy on veut qu'elles ne soient qu'imparſaites et que les parfaites ſont l'octave, quinte et quarte qui eſt une diſtinction tres mal fondee [27]). Mais pour prouver ce nouveau paradoxe que je viens de avancer touchant le triton et la fauſſe quinte, il faudra dire quelque choſe touchant l'origine [28]) des Conſonances en general.

§ 6. On ſcait que ce qui fait bien ſonner enſemble 2 chordes [29]) ce ſont les battements ou tremblements qu'elles cauſent dans l'air, qui vienent a ſ'unir ſouvent et reglement, et que d'autant plus frequentes que ſont ces unions, d'autant plus la conſonance eſt cenſée parfaite, ou du moins eminente en dignitè. ainſi dans l'octave les battemens ſ'uniſſent a chaque fois que la chorde baſſe a fait 1 vibration et l'autre 2. dans la quinte a chaque 2 vibrations de l'une et 3 de l'autre, a la quarte de 3 et de 4, a la tierce majeure de 4 et de 5, a la tierce mineure de 5 et de 6. On veut que dans le nombre de 6 ſoient bornees toutes les conſonances [30]), car bien que dans la ſixte

---

[25]) Comparez le dernier alinéa de la p. 37 qui précède.

[26]) En marge: Merſenne trouue point de raiſon. 8 a 5 pourquoi plait a l'oreille. ſert a accorder. orne le chant. intervalle fort frequentè et qui ſert plus qu'on ne penſe a faire des beaux chants. quelque place qu'on leur donne n'en ſeront pas moins beaux. La ſixte majeure n'eſt elle pas ſauvee preſque toujours de l'octave. on l'entonne aiſement. celuy de 7 a 4 ne ſ'y trouve que 2 fois. cela le rend moins ſoufrable. 7 a 6 ni 7 a 3 ne se trouve point icy. — non audio qui allegant authoritatem.

[27]) La remarque sur Mersenne se rapporte sans doute à ses considérations sur le nombre des consonances dans le Livre I „des Consonances". Prop. 33 „Pourquoi il n'y a que sept ou huit simples consonances".

Cette distinction est faite e. a. par Zarlino „Istitutioni Harmoniche" Parte III cap. 6 „Divisione delle Consonanze nelle Perfette e nelle Imperfette". Elle repose sur le fait que les nombres indiquant les rapports de toutes les „consonances parfaites" sont compris dans la série 1, 2, 3, 4, tandis que pour exprimer toutes les consonances sans exception il faut la série 1, 2, 3, 4, 5, 6, le „senarius": comparez la note 30 qui suit.

[28]) Leçon alternative: la nature.

[29]) En marge: et il en eſt de meſme des tuyaux d'orgue.

[30]) Huygens fait allusion ici à la théorie du „senarius" développée par Zarlino dans ses „Istitutioni Harmoniche", Parte I, cap. 13—16, et par Salinas dans son „De Musica", Lib. II, cap. 12, 24, 25. D'après cette théorie les rapports des intervalles consonants seraient tous compris dans la suite des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6.

mineure les battemens ne s'unissent qu'a chaque 5 vibrations de la chorde basse et 8 de la haute; on voit que ces 8 font 4 vibrations doubles contre les 5 de lautre chorde [31]), et qu'ainsi cette consonance peut estre censée en dedans du nombre de 6; et qu'elle ne doit guere ceder en douceur a celle de la tierce majeure; et il en est de mesme de 3 contre 8, et de 3 contre 10. qui sont l'Unzieme et la Treizieme.

Or puis que les 5 battemens contre 6 font consonance, pourquoy veut on que 6 contre 7 n'en fassent point, ni 5 ou 4 ou 3 ou 2 contre 7.

Le P. Mersenne apres avoir longtemps cherchè quelque raison a cela, advoue [32]) qu'il n'en sçauroit trouver qui soit bonne. Et je crois qu'en effect il n'y en a point, parce qu'on suppose une chose fausse, car puisque l'union frequente des battemens fait la consonance, cette union revient assez souvent lors que contre 5 ou 4 ou 3 ou 2 battemens de la chorde basse il se fait 7 battemens de la haute, mais ce qui rend quelques unes de ces consonances desagreables, c'est que quoyque l'intervalle de chacune se trouve dans les tons de nostre systeme, ces intervalles ne s'usent jamais ou fort rarement dans la suite de nostre chant, ce qui fait en mesme temps qu'apres avoir frappè cette consonance, on n'en trouve point où l'on puisse passer en suite. Ce qui sans doute doit rendre cette consonance fort mechante, puisque mesme la plus excellente de toutes, si on la frappe sur des chordes qui soient tout a fait eloignees du Ton ou Modes ou l'on joue, ne parait pas consonance d'abord, et offense extremement l'oreille, comme si apres avoir fait la cadence en D, l'on frappe la quinte C̸G̸.

Mais les consonances de 5 battemens contre 7 se trouvant en plusieurs endroits sur nos claviers et de mesme celle de 10 ou 5 doubles battemens contre 7 (puisque ce sont comme j'ay dit les tritons et les quintes diminuees, dont il y en a 6 de chacun) et faisant de fort beaux intervalles dans le chant; ayant aussi des consonances voisines qui les suivent agreablement, il ne leur manque rien de ce qu'ont les autres consonances et elles doivent avoir leur rang apres les autres, qui ont l'avantage de consister en des proportions plus simples.

Que si on veut argumenter [33]) qu'elles sont fausses de ce qu'on les sauve l'un par les sixiemes, l'autre par les tierces, l'on peut respondre que la 4 le plus souvent a aussi besoin d'estre sauvee, que la sixieme majeure se sauve de mesme presque tousjours par l'octave. il est vray que ces sixiemes et tierces sont les meilleurs accords pour succeder à ces tritons et quintes diminuees, mais de cela on ne peut pas conclure que ce soient des intervalles faux.

[31]) En marge: Et que cette chorde de 8 vibrations n'est que la replique a l'octave de celle qui faisoit la tierce majeure avec la chorde de 5 vibrations.

[32]) Voyez la proposition de Mersenne (p. 88 de l'„Harmonie Universelle") citée dans la note 26.

[33]) Leçons alternatives: prouver, inférer.

J'ay dit que les intervalles de 6, 4, 3, 2, contre 7, ſe trouvent auſſi dans les tons de noſtre ſyſteme. car en effet les chordes qui font les ſecondes ſuperflues de F et G$^{\sharp}$, de B et C$^{\sharp}$ et de M$^{\flat}$ et F$^{\sharp}$ uniſſent leur battemens a chaque 6 vibrations de l'une contre 7 vibrations de l'autre, ſi pres qu'il n'y a que $\frac{1}{5}$ de comma a dire a cette proportion.

Par conſequent les ſeptiemes diminuees de C$^{\sharp}$B, de G$^{\sharp}$F et de F$^{\sharp}$M$^{\flat}$ excedent ſeulement de ce $\frac{1}{5}$ de comma la proportion de 7 a 12.

Outre cela l'intervalle de 3 a 7 doit ſonner auſſi bien que . . .

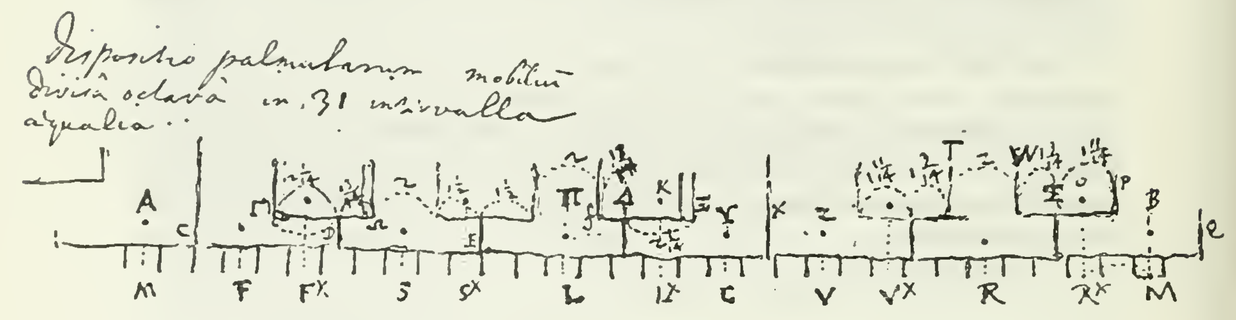
F. LETTRE À BASNAGE DE BEAUVAL TOUCHANT LE CYCLE HARMONIQUE (CONNUE SOUS LE NOM DE NOVUS CYCLUS HARMONICUS)

1691

C'eſt la Pièce publiée en octobre 1691 dans l'„Hiſtoire des ouvrages des sçavans", mieux connue ſous le titre „Novus Cyclus Harmonicus" qui eſt celui de la traduction figurant dans l'édition de 's Graveſande, les „Opera varia" de 1724. Voyez les p. 169—174 du T. X.

Dans la figure [Fig. 4] de la p. 164r du portef. "Muſica" Huygens indique la diſpoſitio palmularum mobilium diviſâ octavâ in 31 intervalla æqualia.

[Fig. 4]



G. QUELQUES NOTES SE RAPPORTANT À LA DIVISION DE L'OCTAVE EN 31 INTERVALLES ÉGAUX[1])

§ 1. le ſemiton mineur je l'appelleray dieſe.

la tierce mineure et majeure; la ſixte mineure et majeure, la 7ᵉ mineure et majeure, different d'une diese.

Item tous les intervalles diminuez ou ſuperflus different des parfaits d'une dieſe.

le triton ſonne un peu plus haut que la quarte re ſol.

la fauſſe quinte un peu plus bas que la quinte re la.

la quinte ſuperflue ſonne un peu plus bas que la ſixte mineure r ♭.

la 7ᵉ mineure differe d'un ton de l'octave.

la 7ᵉ majeure differe d'un ſemiton [2]) de l'octave.

la 7ᵉ diminuee ſonne un peu plus fort que la 6 majeure re ci.

la 6 diminuee eſt plus petite que la quinte ſuperflue. Elle ſonne entre re la et r ♭[3]).

la quinte ſuperflue ſonne preſque comme la 6 mineure c'eſt a dire r ♭.

la 4ᵉ diminuee un peu plus fort que la tierce majeure ut mi.

il n'y a qu'une tierce ſuperflue de m♭ s♯. Elle ſonne entre ut mi et ut fa. Elle

---

[1]) Portef. „Musica", f. 44 r — 45 v. Dans les présentes notes Huygens ne désigne plus, comme précédemment, par le mot dièse chacun des 31 intervalles égaux. Ce qu'il appelle ici dièse c'est le demiton mineur, c. à. d. l'intervalle correspondant au rapport $\frac{25}{16}f$ dans le système du ton moyen: voyez la p. 72. La gamme diatonique présente maintenant les intervalles suivants exprimés en $d = \frac{1}{31}$ d'octave:

C		Cis		D		Es		E		F		Fis		G		Gis		A		Bes		B		c
	2*d*		3*d*		3*d*		2*d*		3*d*		2*d*		3*d*		2*d*		3*d*		3*d*		2*d*		3*d*	

Voici une table des différents intervalles:

Prime superflue = semiton majeur	2*d*	Quarte superflue = Triton	15*d*
Semiton majeur	3*d*	Fausse quinte = Quarte diminuée	16*d*
Ton	5*d*	Quinte	18*d*
Tierce diminuée	6*d*	Sixte diminuée	19*d*
Seconde superflue	7*d*	Quinte superflue	20*d*
Tierce mineure	8*d*	Sixte mineure	21*d*
Tierce majeure	10*d*	Sixte majeure	22*d*
Quarte diminuée	11*d*	Septime mineure	26*d*
Tierce superflue	12*d*	Septime majeure	28*d*
Quarte	13*d*	Octave	31*d*

[2]) C. à. d. d'un semiton majeur = 3*d*.

[3]) Il ne faut pas perdre de vue que ♭ désigne notre ton bes.

fait connoiſtre l'unique ſixte diminuee. Il n'y a que 2 tierces diminuees qui ſont les intervalles des tons faux u♯ m♭ et s♯ ♭. Elles font connoiſtre les 2 ſixtes ſuperflues qui ſont leur complements m♭ u♯ et ♭ s♯.

§ 2. Il faut obſerver que tout intervalle juſte ou faux, avec ſon complement a l'octave, doit faire 9. ainſi la 4ᵉ eſt le complement de la 5ᵉ. la ſixte majeure de la tierce mineure, la tierce majeure de la 6ᵉ mineure. la ſeptieme majeure de la ſeconde mineure. la ſeptieme mineure de la ſeconde majeure. Et cette regle ſert principalement a connoiſtre les intervalles faux, parce que ſcachant l'une moitiè l'on connoiſtra auſſi l'autre qui conſiſte en complements.

5 uniſſons ſuperflus intervalle du ſemiton mineur ou dieſe	u u× m♭ m f f× s s× c♭ c	leur complements octaves diminuees	u× u m m♭ f× f s× s c ♭
3 ſecondes ſuperflues ton et dieſe	m♭ f× f s× c♭ u×	leur complements ſeptiemes diminuees	f× m♭ s× f u× ♭

il faut noter que les ſecondes ſuperflues ont l'intervalle plus grand que les tierces diminuees, celles la ayant $\frac{7}{5}$ d'un ton, et les tierces diminuees $\frac{6}{5}$.

2 tierces dimin. intervalle du faux ton. deux ſemitons maj.	u♯ m♭ s× c♭	leur complements ſixtes ſuperflues	m♭ u♯ ♭ s×
1 tierce ſuperflue	m♭ s×	ſon complement ſixte diminuée	s× m♭

de meſme la tierce ſuperflue eſt plus grande que la 4ᵉ diminuee, l'une ayant $\frac{12}{5}$ de ton et l'autre $\frac{11}{5}$ de ton.

4 quartes diminuees	u× f f× c♭ s× u c m♭	leur complements quintes ſuperflues	f u× ♭ f× u s× m♭ c

6 quartes ſuperflues ou tritons	u f×	leur complements quintes diminuees ou fauſſes quintes	f× u
	r s×		s× r
	m♭ l		l m♭
	f c		c f
	s u×		u× s
	c♭ m		m ?

Mais la quarte ſuperflue ou triton eſt moindre que la quinte diminuée, celle la eſtant de 3 tons et l'autre de $3\frac{1}{2}$ de ton.

Pour connoistre le triton d'avec la fauſſe quinte, il faut prendre garde que quand c'eſt le triton, le deſſus eſt une touche de celles qui peuvent faire avec leur touche ſuivante le ſemiton de mi fa [4]), leſquelles ſont u×, m, f×, s×, l, c. Mais que le deſſus tombe ſur une des autres touches, qui ſont u, r, m♭, f, s, b, lorſque c'eſt la fausse quinte. On les connoiſt encore par la diſtance des notes extremes, contant les feintes de meſme que les tons diatoniques et ma comme mi, ça comme ci. Ainſi VF♯ eſt une 4 ſuperflue ou triton parce que VF eſt une quarte et S♭ R eſt une fauſſe 5 ou diminuee, parce que SR eſt la 5.
le triton demande avec luy la 2^e et la 6^e majeure.
la fauſſe quinte demande la 3^e mineure et la 6^e mineure.

§ 3. Il eſt bon de donner un nom particulier a chacun des 12 tons de l'octave ainſi
Ut it re ma mi fa fe sol sel la ça ci ut.
Cela ſert non ſeulement pour nommer facilement toutes les intervalles tant juſtes que fauſſes, mais auſſi pour les diſtinguer les unes d'avec les autres. Car raportant chaque feinte au ton prochain dont elle a la meſme lettre conſone comme ma à mi, ça à ci, fe à fa, it à ut &c. l'on ſcaura par exemple que ut, fe eſt une eſpece de 4e, ſcavoir la ſuperflue ou triton, parce que ut, fa eſt une quarte; et que f, it [5]), eſt une quinte diminuee parce que fa, ut, eſt la quinte. que ſel, ma, eſt une eſpece de ſixte, ſcavoir la ſixte diminuee, parce que ſol, mi, eſt une ſixte. que ſel, ut eſt une 4e diminuee parce que sol, ut eſt une 4e. que fe, ma eſt une eſpece de 7e, ſcavoir la 7e diminuee parce que fa, mi, eſt une 7e. Et ainſi du reſte. Mais pour dire quel intervalle c'eſt de ſon genre, il faut la connoiſtre ſur le clavier en regardant l'intervalle prochain d'un coſtè ou d'autre dont celuy qu'on propoſe ne differe que d'une dieſe. Ou bien par d'autres remarques, comme eſt celle que j'ay miſe cy deſſus pour diſtinguer le triton d'avec la fauſſe quinte.

---

[4]) Donc le semiton majeur = $3d$.
[5]) Pour f, it lisez: fe, ut.

APPENDICE I

AUX PIÈCES SUR LE CYCLE HARMONIQUE: L'IDÉE DE LA περικύκλωσις, ETC. (PROGRAMME DE LA PIÈCE *E*) [1].

Que les anciens n'ont point connu le temperament.

Comparez notre note 16 de la p. 113 ſur Ariſtoxène.

En marge: Apres cete invention toutes les diviſions du monochorde ceſſent, et les differences de ton majeur et mineur.

Il ſ'agit évidemment de l'invention du tempérament par excellence, celui que Huygens déſigne par le nom de „temperament veritable" (l. 1 de la p. 116) et qu'on a appelé plus tard celui du ton moyen (p. 45).

Zarlin et Salinas ſ'en diſputent l'invention.

Trouvè par experience, puis la raiſon [2].

Zarlin premierement celuy qui diminue la 5[te] de $\frac{2}{7}$ de comma. C. à. d. Zarlino trouva d'abord (voyez les p. 46 et 55 qui précédent) un autre tempérament que le „veritable", savoir le „tempérament de Zarlino". dit que c'a eſtè une importante invention de muſique. une des plus belles inventions en muſique p. 241 ragionamento [3]. En cet endroit il ſ'agit du „temperament veritable".

Les nombres du monochorde temperè. Voyez les Pièces „Diviſio Monochordi", p. 49 et suiv.

Nombres du nouveau temperament. l'octave en 31 parties egales.

Merſenne et Salinas le condamnent. ce qu'ils en racontent [4].

Revient quand a l'effet au temperament du $\frac{1}{4}$ de comma [5].

En marge: que la voix chante ſelon le Temperament ou a peu pres. point par des intervalles parfaits [6].

Mais cette connaiſſance de la περικυκλωσις donne moyen de faire un clavecin ou orgue avec le clavier mobile ſur les batons d'egale largeur et 31 dans l'octave, lequel

[1]) Portef. „Musica", f. 16 v. Voyez sur cet Appendice l'Avertissement qui précède.

[2]) Nous avons cité ces deux lignes dans la note 6 de la p. 18.

[3]) Voyez la note 35 de la p. 116.

[4]) Voyez l'Avertissement qui précède.

[5]) Voyez le deuxième alinéa de la Pièce E qui précède.

[6]) Voyez la Pièce III C à la p. 76 qui précède.

clavier ſert a tranſpoſer avec facilitè par cinquiemes de ton, et en ſorte que toutes les ſeintes ou dieſes adjoutees, trouvent leur chordes egalement juſtes.

Qu'il ne faut au plus que 3 ou 4 ſeintes entre les ordinaires, parce qu'il y auroit trop de difficultè [remarque ajoutée après coup].

Qu'il n'importe pas qu'on faſſe les tons egaux, parce que l'intervalle d'un ton majeur ou mineur auſſi bien n'eſtoient pas conſonants. vide diatonicum diatonon Ptolemei [7]).

En marge: accord ♭7 m5 s♯4 ♯l ♭l bonne ſuite.

♭s♯ et M♭V♯ ſont des conſonances de 7 a 4. VF♯ conſonance de 7 a 5 [8]).

La 5te devient tant ſoit peu meilleure [dans le „nouveau temperament"] que dans l'autre temperament [le „temperament veritable", autrement dit celui „du ton moyen"]. Cela ſemble eſtre bien. parce que tant que les conſonances ſont plus parfaites, tant moins elles peuvent ſouffrir d'alteration. Ainſi l'octave ne ſouffre rien. la 5te moins que la tierce majeure.

Commoditè des logarithmes et neceſſitè [9]).

Cyclus Harmonicus. περικυκλωσις.

Que ſans doute les diviſions de 3 a 2, 4 a 3, 5 a 4, 6 a 5 donnent les conſonances les meilleures qu'elles puiſſent eſtre. contre Stevin.

L'octave en 31 parties que donne Merſenne prop. 10 des Genres de muſique n'eſt pas la noſtre. et ne ſont ſes parties aucunement egales [10]).

---

7) Voyez la note 22 de la p. 92 qui précède.

8) Les f. 24 et 25 du portef. „Musica" que nous ne reproduisons pas sont remplies de calculs et contiennent en outre plusieurs conclusions qu'on en peut tirer. On y lit e. a.: Ratio VF♯ à ratione ad 5 deficit $\frac{1}{12}$ commatis circiter . . . Ratio tritoni VF♯ vulgaris temperamenti deficit à ratione 7 ad 5, $\frac{1}{7}$ commatis. Ergo VF♯ nostri temperamenti multo melior, et poteſt pro conſonantia haberi. Comparez le § 5 de la Pièce E qui précède.

9) Voyez e. a. la Partie „Musique et mathématique" par laquelle le présent Tome débute.

10) Nous avons cité ces deux alinéas aux p. 141—142 qui précèdent. Voyez sur les „parties aucunement egales" de Mersenne l'Appendice II qui suit.

La quinte peu agreable parce qu'elle n'a pas de tierce entredeux. ni ne permet pas de fuppleer la 3e contre la baffe.

Chofes a rechercher. pourquoy 2 quintes de fuite font defagreables. et fi elles le font toufjours [11]).

Methode pour faire des beaux chants [12]).

Qu'il n'y a que 2 tons a les confiderer feuls, mais plufieurs par raport de l'un a l'autre. les 2 font celuy ou la 5[te] d'en bas a la tierce majeure en bas, et l'autre qui dans cette quinte a la tierce mineure en bas. U, M, S, U, R. F. L. R. mais les tons qui font differents par raport font comme U, M, S, U. R, F♯, L, R. qui confiderez a part font tout a fait les mefmes [13]).

De la caufe des tons [ajouté dans l'interligne: chordes] des tuyaux d'orgue [14]), flutes, trompettes &c.

Voyez fur les tons de la flute la p. 104 qui précède. Il eft vrai qu'il n'y eft encore queftion que de l'enregiftrement de données expérimentales, non pas d'un effort pour „fcire per causas". Comparez fur la valeur attribuée par Chr. Huygens à l'empirie les premières lignes de la p. 18 qui précède; et voyez fur le défir de la famille Huygens de „fcire per caufas" le dernier alinéa de la p. 565 du T. II (lettre de Conftantyn Huygens père à Merfenne).

---

[11]) Voyez les p. 110 et 129 (note 119) qui précèdent.

[12]) Voyez sur cet alinéa les p. 66—67 qui précèdent.

[13]) Nous avons déjà cité cet alinéa dans la note 4 de la p. 70 qui précède.

[14]) Voyez fur les tuyaux d'orgue la p. 374 du T. XIX.

APPENDICE II

AUX PIÈCES SUR LE CYCLE HARMONIQUE: TABLEAU COMPARATIF DE 11 [1]) OU 30 MOYENNES PROPORTIONNELLES D'APRÈS DIFFÉRENTS CALCULATEURS.

A. 11 moyennes proportionnelles (divifion de l'octave en 12 intervalles égaux).

	Nombres véritables	D'après Stevin [2])	D'après Merfenne [3])	D'après Beaugrand [4])	D'après Boulliau [5])	D'après Gallé [6])	Nombres véritables
1	10000	10000	1000	10000	10000	10000	10000
2	9439	9440	941	9438,55	9431	9438,7431198	9438,74
3	8909	8911	891	8908,6	8905	8909,1418365	8908,99
4	8409	8408	842	8408,95	8410	8408,9641454	8408,96
5	7937	7937	794	7937,05	7922	7937,0052622	7937,01
6	7492	7493	750	7491,5	7481	7491,5353818	7491,54
7	7071	7071	708	7071,1	7069	7071,0678109	7071,07
8	6674	6675	668	6674,05	6670	6674,1992715	6674,20
9	6300	6301	630	6299,65	6300	6299,6052457	6299,61
10	5946	5945	599	5946,05	5940	5946,0355690	5946,04
11	5612	5612	562	5612,3	5620	5612,3102370	5612,31
12	5297	5298	532	5297,3	5300	5297,3154575	5297,32
13	5000	5000	500	5000	5000	5000	5000

---

[1]) Zarlino, dans le Cap. XXX du Livre IV de ses „Sopplimenti Musicali" de 1588 („Come si possa dirittamente diuidere la Diapason in Dodici parti ò Semituoni equali & proportionali") parle de la construction de „Dodici parti proportionali, assegnando ò ritrouando Vndeci linee mezane proportionali"; il renvoye aussi à ses „Istituzioni" II, Cap. 25 et à ses „Dimostrazioni" III, Prop. II; mais il ne donne pas de table numérique.

[2]) „Vande Spiegeling der Singconst", éd. D. Bierens de Haan, 1884, p. 29.

[3]) „Harmonie Universelle", Premiere Preface generale au lecteur.

[4]) Cité par Mersenne; voyez la p. 34 qui précède (note). Nous avons divisé les nombres de Beaugrand par 20. On voit que ces nombres, encore meilleurs que ceux de Stevin, présentent cependant (voyez le 2ième, le 3ième et le 8ième) de petits écarts, qui font penser qu'ils n'ont pas été calculés à l'aide de logarithmes.

Voyez encore sur Mersenne et les logarithmes les p. 199 etc. qui suivent.

[5]) Cité par Mersenne; voyez la p. 34 qui précède (note). Nous avons réduit au système décimal

B. 30 moyennes proportionnelles (division de l'octave en 31 intervalles égaux) d'après Huygens; et 30 moyennes non proportionnelles (division de l'espace 14000—7200 en 31 intervalles) d'après Mersenne.

	Nombres corrects de Huygens	Division de l'espace 14000—7200 en 31 intervalles égaux	Division de l'espace 14000—7200 en 31 intervalles d'après Mersenne [7])
1	100000	14000	14000
2	97789	13703	13824
3	Etc.	13412	13500
4		13127	12960
5		12849	12300 [8])
6	Voyez les tables des p. 148—150 qui précèdent.	12576	12288 [9])
7		12309	12150
8		12048	12000
9		11792	11664
10		11542	11520
11		11297	11059,2
12		11057	10930
13		10823	10800
14		10593	10368
15		10368	10240
16		10148	10125
17		9933	10000
18		9722	9710
19		9516	9600
20		9314	9216
21		9116	9110,5
22		8932	9000
23		8733	8793
24		8548	8640
25		8367	8294,4
26		8189	8192
27		8015	8100
28		7845	8000
29		7679	7776
30		7516	7680
31		7356	7372,2
32	50000	7200	7200

les nombres du système sexagésimal de Boulliau; ils se sont montrés moins exacts que Mersenne ne les croyait. Boulliau ne s'est certainement pas servi de logarithmes.

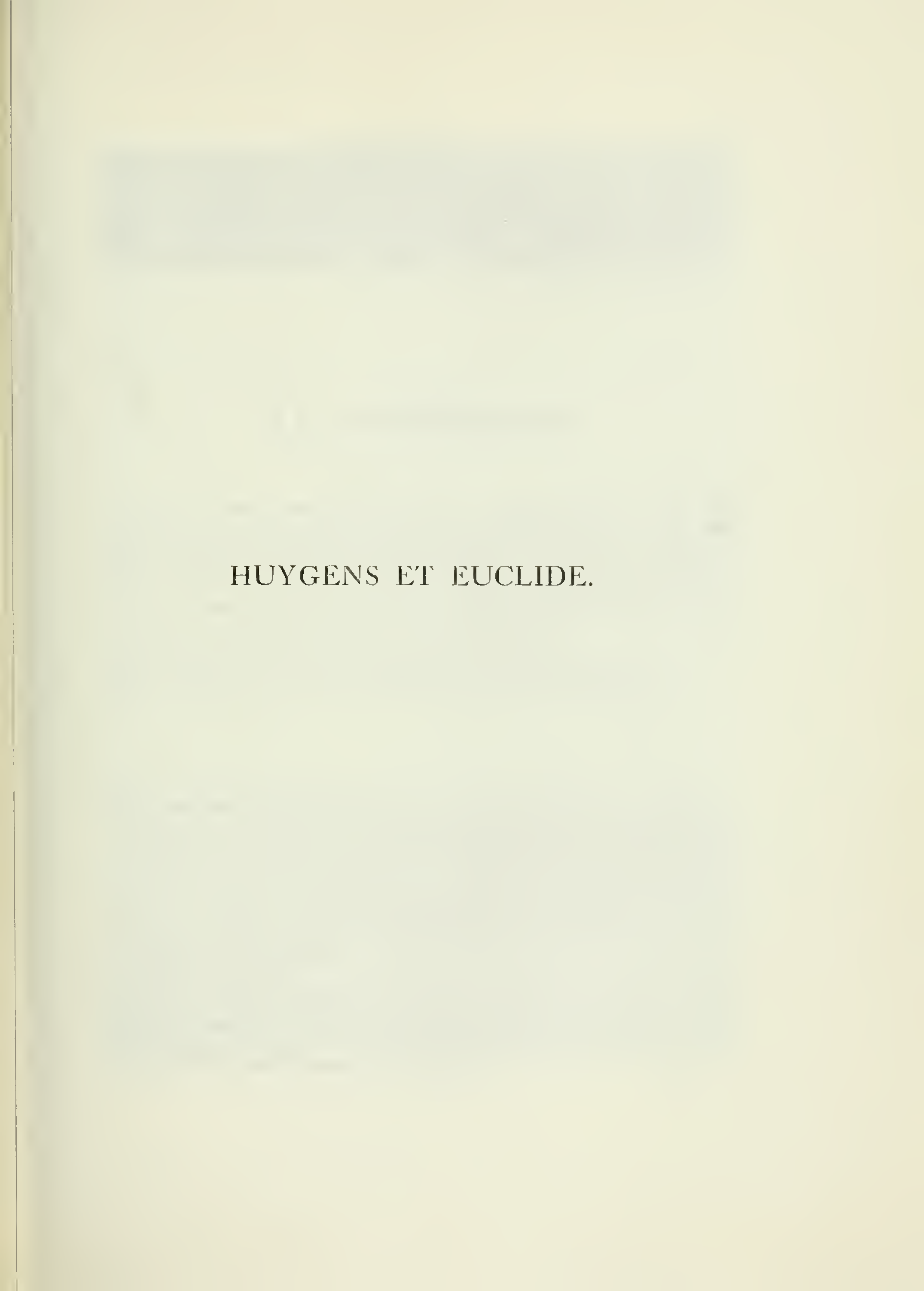
6) Cité par Mersenne (même endroit). D'après C. Lepaige „Notes pour servir à l'histoire des

mathématiques dans l'ancien pays de Liège" (Bulletin de l'Institut archéologique liégeois, T. XXI, 1889), p. 502 et suiv. Jean Gallé publia en 1616 à Liège son „Nouveau Epitome d'arithmetique", où, sans décrire sa méthode, il se vante de „revoquer l'Arithmetique en sa premiere simplicité.... par dix petits bastons etc." Ce sont, peut-on dire, les baguettes de Neper. „D'autres", dit l'auteur (sans nommer Neper) „en ont voulu faire le coup d'essai... Ie l'ay seul mis en sa derniere perfection". Un deuxième livre, intitulé „Nouvelle invention d'apprendre l'arithmétique par le moyen de dix petits batons, avec l'unzième servant à l'extraction des racines quarrées et cubes, par le seigneur J. Gallé, mathématicien Liégeois" parut à Paris en 1635. Il paraît donc que Gallé (architecte ou ingénieur, que Mersenne cite sous le nom de Galeus dans sa „Ballistica" de 1644) ne s'est pas servi de logarithmes, mais a trouvé la douzième racine de 2 par l'extraction de racines carrées et cubiques. Il a certainement pris trop de décimales: tandis que le quotient de ses deux premiers nombres est 0,94387431198, celui des deux derniers est 0,94387431523. Dans le troisième nombre il a apparemment fait une faute de calcul.

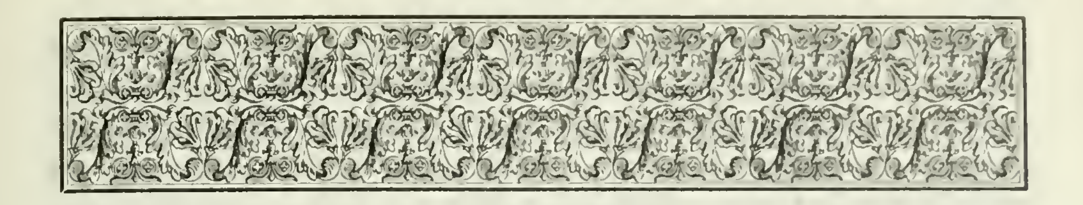
7) Voyez la p. 142 qui précède.

8) Nous avons corrigé le nombre 11300 en 12300.

9) Nous avons corrigé le nombre 10288 en 12288. Il s'agit évidemment ici de fautes d'impression. Il peut y en avoir d'autres moins apparentes; mais il nous semble néanmoins abondamment prouvé que Mersenne — nous l'avons déjà dit à la p. 142 — n'a pas voulu donner une table de 30 moyennes correspondant à des intervalles égaux. Il mérite aussi d'être remarqué qu'il ne divise pas l'„octave" 14000—7000, mais l'intervalle 14000—7200.



HUYGENS ET EUCLIDE.



Avertiſſement.

Les vers de Théocrite par leſquels débute ce Tome montrent l'intérêt de Huygens non ſeulement pour les règles de l'art muſical — leſquelles formèrent, de même que celles de l'optique [1]), un ſujet d'études pour Euclide [2]) — mais plus généralement pour la conſidération objective, tant artiſtique que ſcientifique, de la nature. Nous ne croyons pas méfaire en reproduiſant ici à ce propos un de ſes deſſins repréſentant une ferme, non pas ſicilienne ſans doute, mais néerlandaiſe [3]).

Ce qui domine chez Théocrite, tel que le font connaître les endroits cités, c'eſt aſſurément la *ἰδέα τῆς ἁρμονίας* laquelle diſtingue les grecs des barbares [4]).

[1]) Voyez la l. 9 de la p. 791 du T. XIII.

[2]) Voyez cependant la note 1 de la p. 12 qui précède. L'observation de Tannery se rapporte tant à la Εἰσαγωγὴ ἁρμονική qu'à la Κατατομὴ κανόνος (cette dernière étant jugée authentique par J. L. Heiberg, p. 53 de ses „Litterargeschichtliche Studien über Euklid", Leipzig, Teubner, 1882; et aussi par R. C. Archibald, article cité à la p. 7 qui précède). C'est depuis longtemps qu'on a douté de l'authenticité des deux traités: voyez la „Praefatio" des „Euclidis quae supersunt omnia", ex recensione Davidis Gregorii, Oxoniae, E Theatro Sheldoniano, 1703. Le début de notre Avertissement de la p. 5 met du moins hors de doute qu' Euclide s'intéressait aux écrits des musicologues. En somme ce problème historique — on a également émis des doutes sur l'authenticité des écrits optiques — nous importe fort peu pour le moment, puisque Huygens ne paraît pas s'y intéresser.

[3]) Le dessin est emprunté au Manuscrit 14 comme celui de Schéveningue (datant de la même année 1658) publié dans le T. XVII. Il doit s'agir d'une ferme située près de la Haye. Les mots buyten 't bosch peuvent signifier „hors du bois" (sens probable) ou „hors de la ville; le bois".

[4]) Théon de Smyrne s'exprime comme suit (p. 73 de l'ouvrage cité dans la note 19 qui suit): *ἐν λόγῳ μὲν ἀλήθεια, ἐν βίῳ δὲ εὐδαιμονία, ἐν δὲ τῇ φύσει ἁρμονία.*

L'hellénifme qui a eu fur Huygens l'influence la plus directe eft, nous femble-t-il, celui de l'époque claffique à laquelle appartiennent Euclide, Théocrite et fon compatriote et contemporain cadet Archimède. Nous n'entendons évidemment nullement affirmer que la conception du monde — f'il eft permis d'employer le fingulier — des grands hommes de cette époque claffique foit abfolument conforme à celle de Huygens. N'oublions pas qu'ils étaient partifans du fyftème géocentrique et que (malgré Ariftote qui nie expreffément la mufique des fphères [5]) le poète, géographe, astronome et mathématicien Ératofthène, à qui Archimède dédia fa Méthode, „motu ftellarum fonos muficos edi confentit" [6]). Le fentiment d'Euclide fur ce fujet nous eft inconnu. Nous ne croyons cependant pas nous tromper [7]) en difant que c'eft furtout à une époque postérieure que les favants — Ptolémée était du nombre — s'infpirant d'idées anciennes, en font venus à précifer d'une manière fantaififte les rapports entre la mufique, le monde des aftres, et la vie humaine. Huygens, cherchant en géomètre, aftronome et phyficien les lois générales qui régiffent les phénomènes — en laiffant de côté un phénomène périodique étrange: il n'a jamais parlé de l'influence prépondérante, anciennement découverte [8]), de la lune fur les marées [9]) — n'a nullement fubi comme

On peut en outre consulter p.e. le Chap. XI du T. I — „La musique et les philosophes antiques [chinois et grecs]" — de l'ouvrage de J. Combarieu „Histoire de la Musique des origines au début du XX[e] siècle" (Paris, A. Colin, 1920). Voyez aussi la note 3 de la p. 86 qui précède.

[5]) De coelo (περὶ οὐρανοῦ), lib. II.

[6]) D'après Chalcidius et d'autres. Voyez la p. 39 de „Eratosthenis carminum reliquiae", disposuit et explicavit Ed. Hiller, Lipsiae, Teubner, 1872.

[7]) Chez Archimède, comme chez Euclide et Apollonios, on ne trouve aucune trace d'astrologie. Aucun des trois mathématiciens nommés ne se prononce sur la question de la relation entre la musique et le cours des astres.

[8]) On peut consulter le Chap. XXXV („le problème et la théorie des marées dans l'antiquité") de l' „Histoire des Sciences. Antiquité" de 1935 de P. Brunet et A. Mieli. Dans la Méditerranée le niveau de l'eau varie fort peu, il est donc possible que certains peuples antiques, tels que les Phéniciens, n'aient pas remarqué l'influence de la lune (ni à plus forte raison celle du soleil); d'autre part il paraît presqu' impossible d'admettre que cette influence n'aurait pas été constatée ailleurs depuis les temps les plus reculés.

[9]) Dans un de ses programmes pour l'Académie (T. XIX, p. 271) Huygens mentionne les „aestus maris" sans avoir, paraît-il, l'intention de s'occuper lui-même de ce problème. Voyez les p. 190 du T. IX et 58 du T. X; en ce dernier endroit il est question de l'explication donnée par Descartes. A la p. 538 du T. IX (en 1690) Huygens désapprouve l'explication par attraction. Mais on ne trouve rien sur les marées dans le „Discours de la Pesanteur" ni dans le „Cosmotheoros". Voyez encore sur ce sujet la note 4 de la p. 55 du T. XVII où il est question (en 1655) d'un manuscrit de Galilée. Suivant Galilée les marées proviennent de la rotation de

Plutarque [10]), Kepler [11]) et plusieurs de ses propres contemporains [12]) le charme de ces vues semi-orientales.

Sur l'influence directe ou indirecte [13]) de Démocrite — pour qui, soit dit en passant, la terre était plate — et d'Epicure on peut consulter le T. XIX [14]). Nous rappelons que Démocrite (comme Aristote) est antérieur à Euclide, tandis qu'Epicure est son contemporain.

Pour Huygens ce qui constitue l'univers matériel ce sont en premier lieu les corps, entités bien définies [15]). La géométrie est la science qui traite des „corps, surfaces et lignes" [16]) de formes déterminées, ainsi que des rayons de lumière [17]), possédant tous

---

la terre dont leur existence fournirait une preuve remarquable („Dialogo intorno ai due massimi sistemi del mondo", quatrième journée). Il est certain que Huygens n'a pas été de cet avis puisqu'il considère la diminution de la longueur du pendule à secondes lorsqu'on se rapproche de l'équateur comme le seul effet observable de la rotation du globe terrestre. En effet, il écrit à la p. 316 du Manuscrit F, à propos de l'expédition de 1686--1687 — voyez le troisième alinéa de la p. 514 du T. XVIII —: Te gelyck de Lengden gevonden en een bewijs van 't draeyen der aerde. 'T eenigh waernemelijk effect van dit draeijen. En somme, Huygens ne se prononce en aucune façon sur les marées, si ce n'est pour désapprouver les explications d'autres savants. Il y voit une „summa difficultas" (T. IX, p. 124).

[10]) Voyez le dernier chapitre de la „Musica" (περὶ μουσικῆς) de Plutarque.

[11]) Voyez la p. 356 du T. XIX.

[12]) Boulliau, auteur de l'ouvrage astronomique comprenant e.a. les Tables Philolaiques (1645; T. XIX, p. 261), était astrologue tout en admettant (de même que Kepler) le système copernicain. Voyez sur Boulliau et les horoscopes les p. 524 (lettre de Huygens de 1659) et 530 du T. II. Cassini abandonna l'astrologie déjà dans sa jeunesse.

Mersenne, dans ses „Questions harmoniques etc." de 1633, écrivait (p. 46): „Pour la proportion des Cieux, il suffit qu'il s'y rencontre quelque raison harmonique, soit dans leurs grandeurs, & distances, ou dans leurs mouuemens, afin d'establir une espece d'**harmonie raisonnable**... Et si [les Pythagoriciens et les Platoniciens] n'ont pas eu un fondement assez ferme pour establir leurs pensées, nous pouuons l'asseurer, & l'affermir dauantage, car il est aysé d'ajoûter à leurs inuentions". Notons aussi, pour compléter la note 9 qui précède, que dans ses „Questions inouyes ou recreation des scauans" de la même année Mersenne parle (p. 36) de la difficulté „de trouuer la vraye cause des mouuemens de la mer", disant qu'on doit peut-être attribuer une „vertu de l'aymant" à la lune; mais conformément à son habitude de ne rejeter aucune explication avec légèreté, il admet aussi [avec Galilée] qu'on „establisse le mouuement de la terre pour donner le bransle à la mer".

[13]) S'exerçant à travers les oeuvres de Lucrèce, de Gassendi, de Descartes etc.

[14]) Dans les l. 9—12 de la p. 791 du T. XIII, et ailleurs, Huygens contredit Démocrite et Epicure.

[15]) Voyez p. e. la p. 325 du T. XIX et la l. 15 de la p. 230 du T. XVI.

[16]) Voyez la première ligne de la Pièce I qui suit.

[17]) T. XIII.

une exiſtence objective[18]). Pas plus qu'Euclide ou Archimède il n'a cru devoir, ou pouvoir, formuler une théorie de la connaiſſance. Nous ne voyons pas qu'il ſe ſoit intéreſſé à la publication par Boulliau en 1663[19]) du „Tractatus de judicandi facultate et animi principatu" de Ptolémée[20]), auquel Boulliau avait ajouté un long commentaire et une „nota brevis ad ſubtiliſſimi philoſophi Renati Carteſii de animæ ſpecie intellectui impreſſa opinionem". Nous ne voulons pas dire que pour Huygens le degré d'objectivité de toutes les entités qui ſe préſentent à notre eſprit ſoit le même. Les forces, ainſi que les rayons de lumière, ne ſont pas exiſtantes pour lui au même titre que les figures et les mouvements[21]). La nature des mouvements eux-mêmes dépend du point de vue des ſpectateurs: il n'y a pas d'eſpace abſolu[22]). Mais il ne faut pas chercher chez lui de diſcuſſion générale ſur la nature réelle ou idéelle des entités qu'il conſidère. Il croit avoir une certitude entière de l'infinité de l'eſpace[23]); c'eſt auſſi intuitivement (comparez la note 9 qui précède) qu'il exclut de la nature les „qualitez attractives et expulſives"[24]). Ce ſont bien *les corps*[25]), particules ou aſſemblages[26]) de particules indéformables, ſéparées les unes des autres par le vide (à moins qu'elles ne ſe touchent), qui ſuivant lui méritent en premier lieu notre attention: ils conſtituent la baſe ferme et inébranlable de toute théorie phyſique et géométrique. La géométrie euclidienne a une valeur abſolue. Notons encore qu'il n'y a pas d'ambiguité dans

---

[18]) Comparez la p. 31 du T. XVIII. Voyez auſſi ſur les rayons de lumière la l. 9 d'en bas de la p. 163 du T. VI.

[19]) D'après un manuscrit (ou plutôt deux manuscrits) de la Bibliothèque Royale à Paris. Huygens possédait ce livre suivant le catalogue mentionné à la p. 389 du T. XIX ainsi qu'à la p. 46 qui précède. Notons que Boulliau avait publié en 1644, également d'après un manuscrit et en y ajoutant un commentaire, les remarques de Théon de Smyrne sur l'arithmétique et la musique (Theo Smyrnaeus Platonicus, „Eorum quae in mathematicis ad Platonis lectionem utilia sunt expositio". Nous avons donné le titre grec plus haut dans la note 3 de la p. 11).

[20]) ΚΛΑΥΔΙΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ ΠΕΡΙ ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ ΚΑΙ ΗΓΕΜΟΝΙΑΣ. On peut comparer avec ce traité les opinions générales exprimées par Ptolémée dans ses „Harmonika". Voyez la p. 355 du T. XIX.

[21]) Voyez sur les forces les p. 6—7 du T. XIX, ainsi que les premières lignes de la p. 247 du T. XVI; pour la théorie de la lumière on peut également consulter le T. XIX.

[22]) Voyez la p. 659 du T. XVIII.

[23]) Voyez la l. 6 de la p. 230 du T. XVI. Comparez aussi la note 8 de la p. 191 du même Tome (opinion d'Epicure et de Lucrèce).

[24]) Voyez le dernier alinéa de la p. 642 du T. XIX.

[25]) C'est aux corps qu'il applique le terme „substantiae" dans la l. 17 de la p. 230 du T. XVI. Comparez la fin de la note 4 de la p. 341 du T. XVI et le dernier alinéa de la p. 316 du T. XIX.

[26]) Voyez le T. XIX sur la question de la cohésion.

le concept du temps; Huygens s'en sert sans le discuter [27]): le temps, qu'il considère apparemment (tout aussi bien que l'espace) comme une grandeur continue, est le même pour nous tous [28]).

Or, puisque pour toute série de démonstrations il faut partir de certaines définitions et de certains axiomes [29]), il s'agit de les bien choisir. Ce choix, en effet, est équivoque, et c'est ici que se manifestent le bon sens et l'art du physicien géomètre. Voyez la p. 10 du T. XVI sur le choix des axiomes dans le cas de la collision centrale de sphères dures homogènes; sujet bien important puisque toute la physique d'après Huygens doit finalement reposer sur la collision des corps durs [30]). Quant à la géométrie pure, c'est dans la Pièce I sur Euclide qui suit, datant sans doute de 1672 ou 1673, qu'il nous donne son opinion sur la manière de parvenir au meilleur choix des axiomes, sans toutefois tâcher d'exécuter lui-même le programme qu'il ébauche. Personnellement — quoique partisan d'une certaine rigueur [31]) — il n'a donc pas éprouvé la nécessité de serrer toutes ses pensées dans un étau rigide. Cette Pièce fait voir que pour Huygens nos connaissances géométriques sont empiriques; les propositions d'Euclide expriment des vérités de fait.

---

[27]) Huygens ne dira donc pas avec Aristote (Physica, IV): ὁ χρόνος ἀριθμὸς κινήσεως κατα τὸ πρότερον και ὕστερον. La continuité du temps chez Aristote ressort e.a., outre du livre cité et du liv. VI de la Physique, des paroles suivantes (Meteorologica I): ὅ τε χρόνος οὐχ ὑπολείπει καὶ τὸ ὅλον ἀΐδιον. Comparez la note 2 de la p. 188.

[28]) Voyez sur la question de la continuité du temps la l. 8 d'en bas de la p. 82 du T. XIX.

[29]) T. XIX, p. 81.

[30]) Comparez les notes 2 et 3 de la p. 8 du T. XIX. Provisoirement il fallait sans doute laisser délibérément de côté les phénomènes inabordables: voyez la note 9 de la p. 178 qui précède (question des marées) et ce que nous avons dit à la p. 334 du T. XIX sur les phénomènes capillaires.

[31]) Comparez la fin de la note 2 de la p. 185 et la note 104 de la p. 215. Nous avons publié à la p. 338 du T. XIV sa „description schématique de la méthode de démonstration archimédienne" qui date d'avant 1666, plus précisément de 1659. Au „Lemma" des p. 283—284 du même Tome, ayant pour but d'éviter la considération de l'infiniment petit dans certaines figures géométriques, nous avons donné par hypothèse la date 1657. Le rédacteur de la présente page croit toutefois devoir lui donner la date 1667: voyez la p. 256 qui suit.

Consultez sur l'adoption par Huygens des postulats d'Archimède les p. 237 (note 5) et 255 (note 5) du T. XIV, se rapportant à un écrit de 1657. Ailleurs (p. 337 et note 14 de la p. 191 du même Tome) Huygens admet (en 1659) que, pour éviter les longueurs, il est généralement préférable de ne pas donner une „démonstration formelle", mais seulement „le fondement

Quant aux axiomes additionnels de la géométrie, également euclidienne, d'Archimède, Huygens s'en sert sans les critiquer. A l'instar du prince des géomètres grecs il est d'avis que l'infiniment grand et l'infiniment petit ne doivent pas entrer dans une démonstration formelle [31]).

d'une telle démonstration", „ceux qui s'y connaissent" ne pouvant alors „douter de la possibilité d'une démonstration rigoureuse". Il est question de démonstrations suivant la méthode d'Archimède.

HUYGENS ET EUCLIDE.

I. A PROPOS DE L'OUVRAGE PROJETÉ D'UN MATHÉMATICIEN INCONNU SE PROPOSANT DE CORRIGER LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

II. L'INCOMMENSURABLE.

III. LE CORPS, LA SURFACE, LA LIGNE, LE POINT.

I.

A PROPOS DE L'OUVRAGE PROJETÉ D'UN MATHÉMATICIEN INCONNU SE PROPOSANT DE CORRIGER LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE [1]).

[1672]

Il a de bonnes choses, comme l'ordre de confiderer les corps furfaces et lignes.

Mais ces chofes fe pourraient mettre fous forme de commentaire.

Sur les Regles. Ce qui eft dit dans la 5 de ces regles doit eftre examinè car c'eft la deffus qu'il fonde la neceffitè de toutes ces propofitions du premier livre qui ennuieroient fort le lecteur.

1 definition. Point neceffaire car on scait auffi bien ce que c'eft qu'eftre egal que ce que fignifie plus ou moins.

2 defin. De mefme fuperflue.

5 defin. Superflue. la 6 de mefme.

7 defin. Ce n'eft pas la fignification vulgaire, mais on la peut icy eftablir par definition.

8 defin. Le nombre 2 n'eft il pas partie de 8?

9 et 10 defin. Superflues. De mefme la 12, 13, 14.

15 defin. Bien longue.

19.20 defin. Superflue.

21 defin. Quand la propofition eft un probleme eft ce alors pour examiner?

24 defin. Ne femble pas convenir au probleme.

1 Remarque. Probleme et propofition ne fe difent pas d'une haleine. Je ne voudrois pas mefler les definitions avec les axiomes et poftulats. au moins pas fi difperfez.

Il allegue d'autres premiers Elements, s'ils font neceffaires il faudroit les mettre avec ceux cy.

Je corrigerois s'il y a quelque chose a corriger dans Euclide, la demonftration des proportionnelles par les multiples, et la ferois par les parties aliquotes comme Tacquet [2]). [Ailleurs — „Phyfica varia" f. 34; voyez fur la date de cette feuille la note 1 de la

---

[1]) La pièce est empruntée au revers de la feuille qui nous a fourni l'Appendice II à la Pars Quinta de l' „Horologium oscillatorium" (T. XVIII, p. 438). Or, cet ouvrage parut en avril 1673, et le texte de l'Appendice doit être antérieur à cette date. Il paraît donc probable que la présente Pièce date elle aussi de 1672 ou peut-être de 1673.

p. 333 du T. XIX — Huygens écrit: „E quatuor magnitudinibus prima eſt ad ſecundam ſicut tertia ad quartam, quando prima aut quælibet ejus pars aliquota toties auferri poteſt a ſecunda, quoties tertia aut ejus pars ſimilis aliquota auferri poteſt a quarta".] J'adjouterois la propoſition 2 d'Archimede des Conoides [3]).

Il y a quantitè de choſes dans ces Elemens qu'on n'y trouveroit pas a dire ſi elles n'y eſtoient point, et qu'on cenſurera quand on les y trouuera.

S'il faut que cela paroiſſe comme l'ouvrage de l'Academie, il faudroit ou que la compagnie y travaillaſt, ou que du moins il deferaſt a leur jugemens.

---

[2]) Andreas Tacquet, Societatis Iesu sacerdos & matheseos professor — voyez sur lui les p. 155 et 185 du T. I —, avait publié en 1665 (editio secunda correctior, Antverpiæ, apud Iacobum Meursium) les „Elementa Geometriæ planæ ac solidæ, quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata". Il s'agit d'une édition des Eléments d'Euclide „ad usum studiosæ iuuentutis" (la première édition est de 1654. Voyez la note 3 de la p. 2 du T. III, se rapportant à une lettre de 1660 de Huygens à Tacquet). Dans la Préface Tacquet dit e.a.: „In quinto libro proportionum doctrinam, ut quidem ab Euclide traditur, satis spinosam, efficere planiorem conatus sum. Itaque primùm proportionum elementa, faciliori quadam methodo, multiplicibus ablegatis, traduntur". Au début du Liber V il écrit e.a.: „Difficultas tota in definitione 5. libri 5. vertitur: ubi tradit Euclides, quid sit quatuor magnitudines esse proportionales, siue duas rationes, easdem, similes, æquales esse. Definit igitur duas rationes tum æquales dici seu similes, quando antecedentia quocumque numero æqualiter multiplicata, consequentibus etiam quocunque numero aequaliter multiplicatis, semper vel simul æqualia sunt, vel simul maiora, vel simul minora. Atque ex ea definitione omnes deinde 5. & 6. libri demonstrationes mediatè vel immediatè deducit. Haec doctrinæ Euclideæ summa: quæ multiplicem, ut dixi, difficultatem habet. Nam imprimis certum est eà definitione non naturam æqualium rationum, sed affectionem solummodo aliquam explicari. Deinde illa multiplicium proprietas adducitur, vel tanquam signum infallibile rationum æqualium, ut quandocumque ea demonstrata fuerit de quibusuis rationibus, inferre certò liceat æquales eas esse: vel is sensus illius est, ut per magnitudines eandem rationem habentes nihil aliud intelligi velit, quàm earum multiplices modo iam dicto excedere, vel excedi. Si primum; demonstrare debuerat, eam affectionem omnibus & solis rationibus æqualibus inesse, ut ex eà rationum æqualitas certò possit inferri. Id verò minimè vulgare theorema est, quod neque Euclides, neque alius post Euclidem ullus demonstrauit. Si secundum; securi quidem erimus de veritate theorematum in sensu definitionis acceptorum, minimè tamen ex vi demonstrationum nobis constare poterit de absolutà rationum æqualitate".

La première définition du livre V chez Tacquet (s'accordant, quant au sens, avec celle d'Euclide), est la suivante: „Pars aliquota magnitudinis est, quæ aliquoties repetita magnitudinem metitur, siue adaequat. Pars aliquanta, quæ non metitur".

Dans un exposé de la p. 133 intitulé „Proportionum æqualitas & inæqualitas explicatur" il nous apprend ce qui suit: „Quid porro sit unum antecedens æquè vel magis continere suum consequens, quàm antecedens alterum contineat suum, si proportiones sint rationales, definiri & explicari ulterius potest per numeros, ut si A sit triplum B, & C triplum F, perspicuum erit, quid sit, A æquè seu eodem modo continere B, quo C continet F: vel si I sit triplum L, O verò duplum Q; constabit rursum, quid sit I magis continere L, quam O contineat Q. At si

Les 3 fins des Elements. 1° Eſtablir des principes certains de la ſcience. 2° Servir d'enſeignement a ceux qui veulent l'apprendre. 3° Et contenir un recueil des propoſitions qui s'emploient le plus frequemment dans les ouvrages et demonſtrations de Geometrie afin qu'on ne ſoit pas obligè d'eſtendre a chaque fois les demonſtrations jusqu'aux premieres propoſitions et principes.

Pour effectuer ces 3 choſes, en ſorte qu'il n'y manque rien ni qu'il n'y ait rien de ſuperflu, je crois qu'il faudroit en premier lieu choiſir les Propoſitions principales et plus uſitees dont on conviendroit qu'elles ſeroient neceſſaires ou qu'elles meriteroient d'entrer dans ce Recueil. Et voir en ſuite celles qui devroient leur ſucceder par ordre pour parvenir a leur demonſtration. Et cela juſqu'au premiers principes et axiomes, dont par cette retrogradation on trouveroit tous ceux qui ſont neceſſaires, ſans eſtre en danger d'en poſer de ſuperflus. Et de meſme en ce qui regarde les definitions, dont la ſuperfluitè ne doit pas moins eſtre evitée.

---

proportiones fuerint irrationales, ea res explicari ulterius nec potest, nec debet. Dentur magnitudines incommensurabiles A, B, perspicuum est A non solùm maius esse B, sed etiam certo quodam modo esse maius (A quippe aliter continet B, quàm alia quælibet maior minorue quam A:) neque tamen ulteriùs quaeri, aut explicari debet, quis sit certus ille modus, quo A continet B; quia per nullos numeros explicabilis est. Itaque quemadmodum datis binis incommensurabilibus quantitatibus non debet ulteriùs quæri, quid sit unam certo modo continere alteram, ita neque cum dantur quatuor proportionales incommensurabiles, quaeri debet ulterius, quid sit C eodem modo continere D, quo A continet B. Sicuti enim modus quo A continet B, ulterius est inexplicabilis, ita planè etiam identitas modi, quo A continet B, cum modo, quo C continet D, ulterius inexplicabilis est. Etc."

Rien n'indique que Huygens approuve cette critique de Tacquet de la définition d'Euclide, sur la finesse de laquelle on peut consulter l'édition de 1930 des Eléments citée à la p. 11 qui précède. Heureusement la définition de Huygens que nous insérons entre parenthèses dans le texte et qui, comme il le dit, n'est autre que celle proposée par Tacquet à la p. 136 de son livre (savoir: „Rationes æquales sunt quando & consequentes ipsæ, & consequentium similes partes aliquotæ quæcunque in antecedentibus æquali semper numero continentur") se rapproche en somme beaucoup de celle d'Euclide.

Nous ajoutons encore que dans sa lettre à Tacquet de 1660, citée au début de la présente note, Huygens fait voir à son correspondant qu' Euclide raisonne parfois mieux que lui.

[3]) Huygens avait fait usage de cette proposition d'Archimède dans la Pièce de 1657 que nous avons intitulée: „Réduction suivant la méthode des anciens, de la rectification de la parabole à la quadrature de l'hyperbole" (T. XIV, p. 237 et suiv.) Il s'en sert aussi dans la Pars Secunda de l'„Horologium oscillatorium" (T. XVIII, p. 179). Voyez aussi la p. 377 du T. XVIII. Nous avons cité la proposition dans la note 5 de la p. 251 du T. XIV en remarquant qu'elle porte le numéro 4 dans l'édition moderne de Heiberg des Oeuvres d'Archimède.

II.[1])

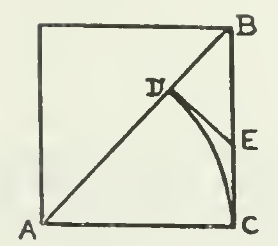
L'INCOMMENSURABLE.

7 Jan. 1675.

Diameter quadrati incommensurabilis est ejusdem lateri.

Sit quadratum cujus latus AC, diameter AB [Fig. 5]. Dico AB, AC incommenſurabiles eſſe. Si enim non, sunto ſi poſſunt commenſurabiles. Erunt ergo ut numerus ad numerum.

[Fig. 5]



Sit AB ad AC ut numerus FG ad FH [Fig. 6] integer uterque.

Les deux derniers mots ont été ajoutés dans l'interligne. Dans le premier alinéa Huygens prenait le mot „numerus" dans le ſens du grec ἀριθμός, nombre entier [2]). Ses „numeri integri" ſont oppoſés aux nombres fractionnaires [2]). Nous n'avons pas trouvé que Huygens parle de nombres incommenſurables [3]). Le „nombre π" date de plus tard [4]). Il est vrai qu'il parle parfois de nombres ſourds [5]) ou irrationnels [6]) — comme on faiſait aſſez généralement longtemps avant lui [7]) — et que déjà en 1661 (voyez la p. 12 qui précède) il accorde le nom de „nombres" aux logarithmes. Voyez encore ſur les nombres ſourds etc. la p. 370 qui ſuit.

Porro centro A radio AC deſcripta circumferentia ſecet diametrum in D, unde

---

[1]) Portef. „Physica varia", f. 11 v.

[2]) C. à d. dans le sens que les *mathématiciens* grecs (antérieurs à Diophante qui admet les nombres fractionnaires) donnent à ce mot; chez Aristote — voyez la note 27 de la p. 181 qui précède — le mot ἀριθμός est appliqué aussi à une quantité qui varie d'une manière continue, le temps.

[3]) Comme on pourrait le croire d'après la l. 2 d'en bas de la p. 245 du T. XII. Voyez les l. 4—5 de la p. 126 du T. XIV (datant de 1675), avec la note 6.

[4]) Comparez la note 3 de la p. 372 du T. XVI.

[5]) L. 12 de la p. 273 du T. VI (dispute avec Gregory sur la question de la quadrature du cercle, 1668).

[6]) Voyez la p. 244 du T. VIII (correspondance avec Leibniz, 1679).

[7]) Ludolf van Ceulen p. e. parle de „irrationale ghetallen" dans son ouvrage „De Arithmetische en Geometrische fondamenten" de 1615: voyez la note 3 de la p. 93 du T. XII.

ducta DE perpendicularis AB occurrat lateri CB in E. Sunt ergo ED, EC æquales quia ab eodem puncto E egredientes circumferentiam CD tangunt. Quia autem AB ponitur ad AC sive ad AD ut numerus GF ad numerum FH. [Fig. 6] erit et AD ad reliquam DB ut numerus FH ad numerum HG. Sed DB est æqualis DE sive EC, et AD æqualis AC sive BC. Ergo et BC ad CE ut numerus FH ad HG. Auferatur ab FH numerus HI æqualis HG. Ergo BC ad CE ut numerus FH ad HI. Et BE ad EC ut numerus FI ad IH. Est autem quadratum BE duplum quadrati BD, propter similes triangulos ABC, EBD [8]. Ergo quadratum BE duplum quoque quadrati EC. Et quadratum numeri FI duplum quadrati ab IH. Apparet ergo, positis numeris integris GF, FH, quorum illius quadratum sit hujus quadrati duplum, dari necessario duos alios minores numeros integros FI, IH quorum unius quadratum sit alterius duplum. Itaque positis FI, IH, alij duo his minores numeri integri dabuntur quorum quadrata similiter duplam proportionem servent. Atque ita in infinitum. Quod est absurdum quia numeri integri descendendo infiniti non sunt. Non sunt ergo AB, AC commensurabiles.

[Fig. 6]

F I H G

Potest et aliter perfici demonstratio: si FG et FH ponantur numeri minimi inter se rationem AB ad AC habentes. Ostendetur enim uti prius numeros existere FI, IH minores quam GF, FH, quorumque eadem inter se ratio quam AB ad AC; quod absurdum, cum positi sint GF, FH minimi eorum qui istam rationem inter se obtinent.

[8]) Le théorème de Pythagore est donc supposé connu, du moins pour le triangle rectangle équilatère.

III.

LE CORPS, LA SURFACE, LA LIGNE, LE POINT.

Dans le Manuſcrit G, ſans doute en 1690 [1]), Huygens donne pluſieurs définitions du point, de la ligne, de la ſurface et du corps. Contrairement à notre habitude nous publions ici les énoncés de Huygens comme ils ſe ſuivent dans le Manuſcrit ſans mettre en avant ceux qu'il déſigna après coup par les chiffres 1, 2, 3, 4.

B. 4 Punctum eſt quod omni extenſione caret, et cujus non niſi poſitus intelligitur.
B. [biffé] Punctum eſt cujus poſitus intelligitur, magnitudo nulla intelligitur.
Linea eſt quod extenſum intelligitur, magnitudo nulla intelligitur.
Superficies eſt quod extenſum undique intelligitur in latitudinem, abſque profunditate.
Corpus eſt quod extenſum intelligitur in omnem partem, ac ſuperficie terminatur.

B. 3 Linea eſt quod tantum in longitudinem extenſum intelligitur.
Linea eſt quod non niſi in longitudinem extenſum intelligitur [phraſe biffée]. Senſu percipi nequit.

Superficies eſt in qua et longitudo et latitudo intelligitur. bonum [mot biffé]. ſphæricæ conoe . . . æ [1]) dele [les deux premiers mots, ainſi que le dernier, ſont en effet biffés] nihil habens corporei.

Superficies eſt in qua ex puncto non plures lineæ excurrere poſſunt [alinéa biffé].
Lineæ terminatæ [mot biffé] neque in ſe redeuntis termini ſunt puncta.
⊖ Superficies finita et quæ corpus non complectitur, linea terminatur.

B. 1 Corpus quatenus in geometria conſideratur eſt magnitudo finita, in qua extenſio in omnem partem intelligitur.
B. 2 Superficies eſt id quo corpus exterius circumdatur [en marge: quo corpus extrinſecus circumdatur] ita ut nihil quicquam intercedat [leçon primitive: interponatur].

---

[1]) Manuscrit G, f. 47 v. La date 1692 se trouve sur la f. 44, mais plus loin on rencontre des dates de 1690.
Voyez encore sur ce sujet les Additions et Corrections.

Huygens avait commencé par écrire: Superficies eſt quod extremum in corpore intelligitur; ce qu'il corrigea d'abord en : Superficies eſt quo corpus exterius amplectitur idque immediate ſeu ut nihil quicquam intercedat.

Superficies nulla eſt niſi in corpore [le B. 2 s'applique peut-être auſſi à cette phrase].

Linea eſt quod extremum in ſuperficie intelligitur [alinéa biffé].

Punctum eſt quod extremum in linea intelligitur [alinéa biffé].

Les nombreuſes ratures font voir de quelle manière héſitante Huygens procédait. Il choiſit en fin de compte, pour chacune des quatre entités, une ſeule définition, qu'il marqua d'un B, probablement une abréviation de „bon" on „bonum".

Comme il apparaît par le numérotage des définitions finalement choiſies, Huygens eſt d'avis qu'il faut commencer par la définition du corps. Il ſemble préférer cet ordre à l'ordre inverſe (point, ligne, ſurface, corps) et y attacher de l'importance; cela reſſort de la première phraſe de la Pièce I qui précède. Toutefois, il n'y a chez lui une relation logique qu'entre les définitions du corps et de la ſurface, tandis que — fait curieux — après cela ſont définis la ligne et le point, indépendamment et ſans rapport logique avec les définitions précédentes. L'ordre dans lequel ſont rangées les définitions n'a pas de ſignification réelle, abſtraction faite de celui des deux premières. Il en eſt autrement lorſque, comme Barrow [2]), après les définitions d'un corps et d'une ſurface comme délimitation d'un corps, on continue ſyſtématiquement à définir la ligne comme la délimitation d'une partie d'une ſurface et le point comme celle d'une partie d'une ligne. Mais une fois qu'on a accepté la définition de la ligne choiſie par Huygens, on ne peut guère, à notre avis, faire une objection fondamentale contre la définition de la ſurface comme quelque choſe ayant longueur et largeur mais non pas épaiſſeur („profunditas", comme Huygens, de même que Barrow, appelle ici la troiſième dimenſion), quelque peu ſatisfaiſantes que ſoient pareilles définitions au point de vue des mathématiques rigoureuſes d'aujourd'hui.

Du temps de Huygens il paraît qu'on avait beaucoup d'intérêt pour de ſemblables queſtions et auſſi pour d'autres qui s'y rattachent, comme celle de ſavoir ſi un point eſt un „ens revera exiſtens" [3]). En 1660 eut lieu à Paris, à l'Académie de Montmort, une réunion [3]) où Deſargues, auteur du „broüillon-project" ſur la coupe des pierres en l'architecture, ſoutenait qu'un point géométrique

[2]) I. Barrow, „Lectiones mathematicæ" de 1664, Lectio IX, p. 135 de l'édition Whewell citée à la p. 372 qui suit: „Corpus vel solida magnitudo præsupponi potest.. Hinc datur solidæ magnitudinis Terminus aliquis secundum profunditatem indivisibilis, is vocetur Superficies.. Pars dicta superficies non est usquam interminata, sed aliquo ambitu seu extremo clauditur.. Terminus.. dicatur Linea.. supponatur dari lineæ Terminus indivisibilis, et hic appelletur Punctum". P. 137: „Non existimo superficies, lineas aut puncta separatam quandam existentiam, aut propriam ex seipsis efficaciam possidere".

[3]) Voyez la p. 182 du T. III. Il semble ressortir de cette page que Lodewijk Huygens connaissait Desargues personnellement. Il se peut donc que Christiaan et Lodewijk aient fait sa connaissance lorsque les deux frères se trouvaient à Paris en 1655. Mais il est également fort possible que Christiaan ne l'ait vu qu'une seule fois de sa vie. On peut aussi consulter sur la soirée chez de Montmort qui eut lieu le 9 novembre 1660, le Journal de voyage 1660—1661.

aurait une exiftence réelle [4]). Il fut attaqué fur cette thèfe par de la Poterie. Une expreffion de Huygens montre que la queftion provoqua ce foir des réactions paffionnées: il parle de la vehemence merveilleufe et ridicule de de la Poterie.

Voyez la p. 504 qui fuit fur un fac-fimilé, publié en cette même année 1940, des définitions de 1690 de Huygens.

---

[4]) Il est possible que dans sa conférence Desargues soit parti de la notion du corps: M. Poudra dans les „Oeuvres de Desargues, réunies et analysées par [lui]" (Paris, Leiber, 1864) cite (T. II, p. 176) l'élève et ami de Desargues Abr. Bosse disant: „Desargues démontrait universellement par les solides, ce qui n'est pas l'usage ordinaire de tous ceux qui se disent géomètres ou mathématiciens".

On pourrait penser devoir constater ici une certaine ressemblance entre la pensée de Desargues et celle de Huygens. En réalité Desargues a eu bien peu d'influence sur lui; voyez toutefois le nom Desargues aux p. 220, 221 et 402 qui suivent. Il nous semble d'ailleurs, malgré Bosse, que Desargues ne partait pas toujours exclusivement de la notion du corps. M. Zacharias dans la préface de sa traduction de 1922 dans la série „Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften" (N°. 197) du „Broüillon-project d'une atteinte aux évenemens du rencontre du cone avec le plan" s'exprime comme suit: „Sind bei den Alten alle Figuren starr und unbeweglich, so setzt die neuere Geometrie die Bestandteile ihrer Gebilde gern in Bewegung; Punkte durchlaufen Linien [il en était ainsi déjà chez Héron d'Alexandrie; Aristote, lui, disait (Physica, VI) que le mouvement continu d'un point mathématique est inconcevable et inexistant; voyez encore sur ce sujet la note 13 de la p. 372 qui suit], gerade Linien drehen sich um feste Punkte oder wälzen sich als bewegliche Tangente um krumme Linien herum, Ebenen drehen sich um feste Achsen . . . [Es] erweist sich Desargues in seinem Broüillon-project als Wegbereiter der neueren Geometrie . . . hinsichtlich der Beweglichkeit der Figuren zeigt sich Desargues als Bahnbrecher der neuen Richtung. So erzeugt er den Kreis und die andern Kegelschnitte durch Bewegung eines Punktes, den Kegel durch Bewegung einer geraden Linie etc". Nous ne nous écartons certes pas de notre sujet en observant en passant que si cette géométrie du mouvement est en général étrangère aux Eléments euclidiens, il est pourtant vrai que dans le livre IX Euclide, se conformant à des prédécesseurs, définit la sphère (Def. XIV) comme le solide contenu dans la surface obtenue par la rotation d'une demi-circonférence de cercle et que dans la Def. XVIII il obtient le cône par la révolution d'un triangle rectangle; ni aussi en remarquant que, pratiquement au moins, Huygens n'a aucune objection contre de pareilles définitions: voyez p. e. les dernières lignes de la p. 309 du T. X. Mais dans ceci il n'est certainement pas question de la moindre influence de Desargues sur Huygens dont les figures — nous ne parlons pas ici des développantes ou d'autres courbes dans la genèse desquelles sont considérés des fils flexibles — sont en général, comme celles d'Euclide, „starr und unbeweglich".

MATHEMATICA VARIA : LES MANUSCRITS.

MATHEMATICA VARIA: LES MANUSCRITS.

Le portefeuille „Varia" contient une douzaine de feuilles, de la main de Huygens, faifant mention de certaines lettres et donnant une férie de titres d'ouvrages qui n'avaient pas vu le jour de fon vivant [1]). Ces feuilles fe trouvaient fans doute au moment de fa mort dans les tiroirs d'un bureau, puifque fur l'une d'elles on lit: „Correspondence avec le Marquis de l'Hofpital dans un tiroir a part" et que fon teftament mentionne certains tiroirs et les papiers y contenus. Dans ces feuilles il eft en outre queftion de la correfpondance de Huygens avec Merfenne, Hudde, Römer, Oldenburg et de Carcavy. Il y en avait fans doute d'autres qui ne nous font pas parvenues: le teftament, mais non pas les feuilles confervées, mentionne la correfpondance avec Leibniz.

La correfpondance avec Hudde p.e. eft mentionnée deux fois dans les feuilles: „Literæ Huddenij. cum nonnullis meis refponfis", ceci avec plufieurs autres fujets, puis fur une feuille à part: „Literæ Huddenij. cum aliquibus refponfis meis. cætera funt in libro adverfariorum".

Cette dernière remarque s'applique, peut-on dire, aux „mathematica" (voir la fuite du texte) en général: les conftructions géométriques et les calculs exécutés par Huygens dans le cours de fa vie ne fe trouvent pas tous dans des lettres ou fur des feuilles féparées, mais auffi, et pour une très grande partie, dans les „libri adverfariorum", c.à.d. dans les Manufcrits reliés A-K [2]) et quelques autres moins volumineux.

Beaucoup de ces „mathematica" (nous prenons ici le mot — avec Huygens, nous femble-t-il — dans fon fens reftreint; voyez fur le fens plus large la p. 264 du T. XIX) ont déjà été publiés, non feulement dans les T. XI, XII et XIV, mais auffi dans les autres Tomes, p.e. dans ceux (X et précéd.) qui contiennent la correspondance. En effet, les lettres échangées avec Leibniz, avec le Marquis de l'Hofpital et d'autres étant de nature mathématique, il était tout naturel, et prefqu'inévitable, d'y joindre fous forme d'appendices ou de notes les calculs et conftructions, ou du moins la partie la plus importante de ceux-ci, auxquels cette correfpondance donna lieu.

Une feuille à part porte le titre: „Mathematica varia mea. pauca alicujus momenti". Sur une autre feuille, portant plufieurs titres, Huygens s'exprime plus fortement

---

[1]) Comparez la Pièce „Anecdota" à la fin du T. XVIII.

[2]) Voyez sur ces Manuscrits la p. 4 du T. XV.

encore: „Mathematica varia mea. in quibus nihil fere alicujus momenti". Nous ignorons — puifque l'arrangement des papiers nous eft inconnu — quelle eft la partie des „mathematica" que Huygens frappait ainfi de fon verdict. Il paraît bien qu'il n'eft queftion ici que de feuilles féparées [3]; et de celles-ci plufieurs peuvent ne pas avoir été confervées. D'autre part il eft certain que la remarque ne s'applique pas à toutes les feuilles mathématiques fans exception, puifque la même feuille du portef. „Varia" qui parle des „Mathematica . . . nihil fere alicujus momenti" contient auffi féparément le titre: „De Problemate Alhazeni de puncto Reflexionis in fpeculo fphærico. Conftructiones Slufij et noftræ, cum literis Oldenburgij". Il faut fans doute auffi tenir compte de la modeftie de l'auteur: voyez ce que nous avons dit à la p. 92 du T. XI fur fa note „vulcano tradenda". Toutefois, nous penfons agir dans fon esprit en ne publiant pas intégralement fes calculs.

Un des tiroirs contenait, outre divers autres papiers, les „Efcrits de Mathematique dont j'ay donnè Copie a l'Academie des Sciences a Paris". Ce font ceux-ci que nous croyons devoir publier en premier lieu [4]). Plufieurs autres Pièces pourront y être ajoutées en guife d'Appendices.

Vu que les deux Appendices à la Pièce I de 1666 ou 1667 („Règle pour trouver les logarithmes") datent [5]) de 1661 (la Règle elle-même eft d'ailleurs en réalité de la même année) c'eft de ces Appendices que nous traitons en premier lieu dans notre Avertiffement aux Communications de Huygens à l'Académie Royale des Sciences fur des fujets de mathématique.

---

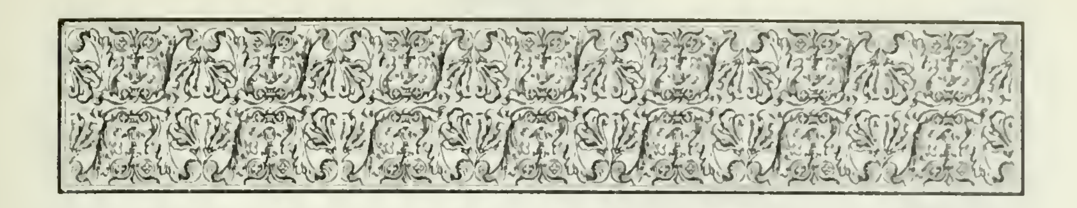
[3]) Les Manuscrits A-K etc. sont mentionnés à part dans le testament.

[4]) Nous suivons en général le texte des Registres de l'Académie. Comparez e.a. la note 1 de la p. 243 qui suit. Nous ignorons si les papiers de Huygens sur ces sujets qui se trouvaient dans le tiroir ont tous été conservés. Notons que nous ne possédons pas de feuilles séparées sur les équations solides (Pièce XII de la p. 286 qui suit).

[5]) Ceci est certain pour le deuxième Appendice. Nous supposons que le premier date également de 1661. Voyez les p. 203—204 qui suivent.

HUYGENS À L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

COMMUNICATIONS SUR DES SUJETS DE MATHÉMATIQUE.



Avertiſſement

Dans ſon „Harmonie Univerſelle" de 1636 Merſenne ne s'était pas ſervi de logarithmes; il eſt permis de croire que, malgré l'étendue de ſes connaiſſances[1]), cette branche des mathématiques — n'en fut-il pas de même pour Deſcartes?[2]) — lui était reſtée étrangère[3]). Toutefois il ne mourut pas avant d'avoir fait leur connaiſſance, d'ailleurs apparemment fort ſuperficielle. Dans un „Monitum" de l'„Univerſæ Geometriæ mixtæque Mathematicæ Synopſis" faiſant partie des „Cogitata phyſico-mathematica" de 1644[4]) il mentionne „Gellibrandus, poſt Neperum & Briggium" diſant: „Qui ſerio Trigonometriæ ſuam operam dare voluerit, adeat Gellibrandi Britannicam Trigonometriam[5]), etc"; et dans une lettre du 2 mai 1648 à Chr.

---

[1]) Voyez la l. 2 d'en bas de la p. 352 du T. XVI (remarque de Constantyn Huygens père sur Mersenne).

[2]) Voyez cependant ce que Paul Tannery écrivit en 1900 dans le T. VII de l'„Intermédiaire des Mathématiciens" („Mémoires Scientifiques", éd. Heiberg et Zeuthen, Toulouse—Paris, 1930, T. X, p. 370—372).

[3]) Si Mersenne avait connu les logarithmes lorsqu'il écrivit l'„Harmonie Universelle", il n'aurait pas eu besoin du secours de Beaugrand (voyez sur lui la note 4 de la p. 171 qui précède) pour calculer onze moyennes proportionnelles.

[4]) Le „Monitum" se trouve à la p. 255 à la fin de la Partie „Euclidis ex traditione Maurolyci Phænomena".

[5]) La „Trigonometria Britannica" (où est adopté pour le degré la division centigrade) contient des logarithmes de Briggs et une préface de Henry Gellibrand (Gouda, Rammaseyn, 1633). Cet ouvrage est mentionné aussi, après ceux de Neper et de Briggs, à la p. 243 du sixième tome de la même année 1644 du „Cours mathematique" d'Hérigone que Mersenne a peut-être pu consulter.

Huygens[6]) il parle, à propos de Grégoire de St. Vincent[7]), d'„un probleme [que celui-ci „ſupoſe"] plus difficile que celuy de la quadrature lequel il ne reſoût point, aſcauoir Eſtant données trois grandeurs rationelles, ou irrationelles et deux de leurs logarithmes eſtant auſſi donnez, trouuer Geometriquement le logarithme de la troiſieſme".

Il n'eſt évidemment pas queſtion ici — Merſenne ne donne aucune définition du logarithme — de ce que nous entendons aujourd'hui par ce mot. Si l'on appelle logarithme du nombre n le nombre l défini par l'équation $b^l = n$, il eſt manifeſte que lorſqu'on donne un ſeul nombre et ſon logarithme, la baſe b [8]) eſt déterminée; de ſorte qu'on peut alors calculer le logarithme correſpondant d'un nombre quelconque. Mais ſi l'on donne arbitrairement encore un deuxième nombre et ſon logarithme, ces données correſpondront en général à une deuxième baſe, et l'on ne peut alors raiſonnablement demander quel ſera, d'après les données du problème, le logarithme d'un troiſième nombre. Cette objection ſubſiſte lorſqu'on définit le logarithme d'un rapport A — voyez la définition de Briggs et de Mercator[9]) — comme le nombre N, c.à.d., par oppoſition à l'expoſant de la première définition, le nombre *entier* N des „ratiunculæ" (la „ratiuncula" étant un rapport fort peu ſupérieur à $\frac{1}{1}$) compriſes dans ce rapport A: un premier nombre donné (ou plutôt le rapport A de ce nombre à l'unité) et ſon logarithme définiſſent (à une petite incertitude près) la grandeur de la „ratiuncula", et ſi l'on donne arbitrairement encore un deuxième nombre et ſon logarithme, il en réſultera en général une „ratiuncula" fort différente, de ſorte qu'on ne pourra conclure logiquement au nombre des „ratiunculæ" correſpondant à un troiſième nombre. Dans le cas du problème de Merſenne il faut apparemment ſe figurer (comparez l'écrit de de Sarasa, cité plus loin) deux ſéries de grandeurs repréſentées par des lignes droites (Euclide, Grégoire de St. Vincent), dont l'une conſtitue une ſérie géométrique, l'autre une ſérie arithmétique. Qu'on établiſſe enſuite une correſpondance entre le n-ième terme de la première et le m-ième terme de la deuxième ſérie,

---

[6]) T. I, p. 89. La lettre date de quatre mois avant la mort de Mersenne. Elle est la réponse à celle du 20 avril 1648 de Huygens (T. II, p. 566) où il dit avoir vu le livre de Grégoire. Voyez sur cette lettre de Huygens la note 18 de la p. 276 du T. XI.

[7]) Dans le présent Tome nous avons mentionné l'„Opus Geometricum, Quadratura Circuli etc." de 1647 de Gregorius à St. Vincentio à la p. 9.

[8]) Le terme „base" est de L. Euler (dix-huitième siècle).

[9]) A la p. 11 qui précède.

de même entre le p-ième de la première et le q-ième de la deuxième (on peut pendre p — n = q — m), appelant „nombres" ou „grandeurs" les termes de la férie géométrique et „logarithmes" les termes correspondants de la férie arithmétique; alors on peut raifonnablement demander à quoi correfpond foit le r-ière terme de la férie géométrique, foit auffi (Sarafa) une longueur intermédiaire entre ce terme et le fuivant. La folution exige en général une interpolation: l'on n'obtiendra en général qu'une folution approchée. Or, pareille folution approchée peut, tout auffi bien qu'une quadrature approchée, être confidérée (c'eft fur cela, nous femble-t-il, que Merfenne veut fixer l'attention) comme n'en étant pas une [10]).

Pareil problème n'avait d'ailleurs pas été „fuppofé" par Grégoire. Le mot „logarithme" ne fe trouve pas dans l'„Opus Geometricum" [11]). Merfenne a cru pouvoir formuler à fa manière un problème équivalent à un (?) de ceux de l'œuvre de Grégoire, mais il ne dit pas lequel et fa trop brève remarque demeure énigmatique [12]). Il avait d'ailleurs déjà formulé dans les mêmes termes cette remarque, ou plutôt cette critique, un an plus tôt, en 1647, dans une page de fon „Novarum Obfervationum Phyfico-mathematicorum Tomus III" [13]). En septembre 1650 F. van Schooten attira l'attention de Huygens fur cette page de Merfenne quoique fans mentionner les logarithmes [14]). Une lettre de Huygens à Grégoire de novembre 1651 [15]) nous apprend qu'il avait fait connaiffance avec le livre de A.A. de Sarasa de 1649 intitulé:

[10]) Il est quelque peu étonnant, nous semble-t-il, qu'à la fin de sa „Logarithmo-technia" Mercator dit simplement: „Patet quoque ex præcedentibus quo pacto problema Mersennianum, si non geometricè saltem in numeris, ad quotvis usque locos solvi possit", sans indiquer que lorsqu'on adopte sa propre définition du logarithme ce problème n'a pas de sens.

[11]) Il n'est donc pas tout-à fait exact de dire, comme cela a été fait à la p. 242 du T. XII, que „Grégoire n'avait pas donné la quadrature proprement dite du cercle mais seulement la réduction de cette quadrature à celle de l'hyperbole *ou aux logarithmes* [nous soulignons]", quoique de Sarasa (ouvrage cité dans le texte) puisse dire (au début de son traité) de certaines parties du livre de Grégoire: „fundamenta doctrinæ quæ Logarithmos complectitur inibi continentur". Voyez ce que Huygens dit sur Grégoire à la p. 264 qui suit.

[12]) Il dit que la recherche de Grégoire „in illud abit necdum solutum Problema".

[13]) Deuxième alinéa de la p. 72, dans le Cap. I „De nouiter Repertis post edita Phænomena". Mersenne y parle du „conatus ingens in inuenienda circuli quadratura", sans mentionner le nom de l'auteur et sans indiquer le titre de l'ouvrage considéré. Mais c'est indubitablement du livre de Grégoire qu'il parle.

[14]) T. I, p. 132. Des 19 lignes de Mersenne van Schooten en cite sept, dont celles sur les logarithmes (voyez la note 16) ne font pas partie. Ce qu'il cite se rapporte aux indivisibles de Cavalieri.

[15]) T. I, p. 156.

„Solutio Problematis a R.P. Marino Merſenno Minimo propoſiti datis tribus quibuſcunque magnitudinibus, rationalibus vel irrationalibus, datiſque duarum ex illis Logarithmis tertiæ Logarithmum Geometricè inuenire [16]), etc." Huygens n'approuvait point les quadratures de Grégoire: ſon 'Εξέτασις de décembre de la même année 1651 [17]) était déjà prête en septembre [18]); néanmoins il parle dans ſa lettre de novembre du „[liber] Patris A. de Saraſa, qui te feliciter à Merſenni cenſura vindicavit". Comme il n'eſt aucunement queſtion de logarithmes dans l' 'Εξέτασις ni par conſéquent d'une interprétation de la critique ſi vague de Merſenne il ne ſemble pas permis de conclure qu'en ce temps Huygens avait déjà conſidéré avec quelqu'attention la théorie des logarithmes. D'ailleurs — ſoit dit en paſſant — nous n'avons pas trouvé qu'il en ait jamais donné une définition nette [19]).

La lettre de Wallis d'août 1656 [20]) ne paraît pas non plus l'avoir amené à s'occuper de la théorie ou de la pratique des logarithmes; dans sa réponſe de ſeptembre [21]) il dit que pour des raiſons de ſanté „a tempore aliquo prorſus perfunctorie in ſtudijs hiſce [les études des ſciences mathématiques] verſor".

Rien, nous ſemble-t-il, ne nous empêche de croire que 1661 eſt bien l'année où il commença à ſe ſervir du calcul des logarithmes [22]) et que ce fut, comme il le dit,

---

16) De Sarasa cite ici littéralement les quatre dernières lignes de l'alinéa de la p. 72 de Mersenne dont il est question dans les deux notes 13 et 14. Il donne d'ailleurs aussi au début de sa brochure la remarque de Mersenne en entier (disant qu'à son avis cette „censura" est „parum Geometricè concepta & expressa").

17) T. XI, p. 315.

18) T. I, p. 145.

19) Voyez à la p. 8 qui précède ce que disait Huygens, et aussi ce que disait van Schooten en la même année 1656, sur les définitions en général.

Citons encore la définition d'Hérigone (Cours III, p. 14; voyez la suite du texte sur son chapitre sur les logarithmes): „Les logarithmes sont les exposans des grandeurs continuellement proportionnelles".

20) T. I, p. 476. Wallis y mentionne les „tabulæ logarithmicæ" de Briggs. Voyez sur l'„Arithmetica Logarithmica" de Briggs, utilisée par Huygens en 1661, la note 7 de la p. 441 et quelques autres endroits du T. XIV.

21) T. I, p. 495. Il est vrai que la réponse conservée est fragmentaire.

22) Nous croyons cependant devoir remarquer que si la note *a* de la p. 517 du T. I date de 1656, Huygens connaissait déjà en cette année le „Directorium Generale Uranometricum" de Cavalieri, traitant e.a. des „Trigonometriæ Logarithmicæ Fundamenta et Regulæ"; et qu'il est certain qu'il avait reçu en 1657 (voyez la p. 210 du T. II) la „Mathesis universalis" de Wallis laquelle contient un court chapitre sur les logarithmes. Il serait d'ailleurs assez évident même dans l'absence de tout document rendant la chose plausible, que, quoique ne se servant pas encore lui-même de logarithmes, Huygens ne pouvait ignorer leur existence.

une queſtion de muſique, la conſidération de la περικύκλωσις [23]) exigeant l'interpolation d'un nombre quelconque de termes en progreſſion géométrique entre deux grandeurs données, qui l'y amena. C'eſt donc auſſi de 1661, penſons-nous, que date la Pièce qui conſtitue le § 7 de notre Appendice I à la p. 294, où il s'agit de la même interpolation, non pas, il eſt vrai, entre deux cordes correſpondant à deux tons muſicaux, mais entre deux capitaux dont le premier doit s'accroître par des intérêts compoſés juſqu'à atteindre le montant du deuxième.

Il eſt vrai que cette dernière application n'a nullement, comme la précédente, le mérite de l'originalité: Huygens connaiſſait au moins depuis 1652 [24]) le „Cours mathematique" de P. Hérigone qui, en traitant des logarithmes dans ſon troiſieme volume, conſacre huit pages à la conſidération de problèmes concernant l'accroiſſement de capitaux „auec les intereſts des intereſts" [25]).

On pourrait objecter que nous avons dit ailleurs [26]) qu'„on trouve dans le Manuſcrit A et dans les Chartæ aſtronomicæ pluſieurs calculs logarithmiques [ſur les couronnes et parhélies, traité achevé vers la fin de 1662 [27])]"; que les feuilles des Chartæ aſtronomicæ, il eſt vrai, ne ſont pas datées; mais que, dans le cas du Manuſcrit A, il s'agit de feuillets découpés qui y faiſaient, ſelon nous, ſuite à la p. 242 [28]) et que cette page et les ſuivantes, et par conſéquent auſſi les feuillets enlevés, datent probablement d'avant 1661, plus préciſément de 1660 [29]). Toutefois, en conſultant le T. XVII on peut conſtater que ce que nous diſions n'eſt pas abſolument correct: les feuillets provenant du Manuſcrit A ſont, par oppoſition aux autres feuilles des Chartæ aſtronomicæ dont il eſt ici queſtion, des feuillets qui ne contiennent pas de calculs *logarithmiques* [30]). Par conſéquent, ces calculs ſur les couronnes et parhélies corroborent notre thèſe, bien loin de l'infirmer.

Ce qui rend auſſi plus ou moins probable que les calculs de Huygens ſur les intérêts

[23]) Voyez sur ce mot les p. 143 et 168—169 qui précèdent.

[24]) T. I, p. 202.

[25]) P. 91—98: „de l'usage des logarithmes aux interests, etc." Voyez le titre complet de l'ouvrage d'Hérigone à la p. 202 du T. I.

[26]) T. XVII, p. 360.

[27]) T. XVII, p. 359.

[28]) T. XVII, p. 360, note 3.

[29]) Comparez la note 1 de la p. 100 du T. XVII.

[30]) D'après la note mentionnée dans la note 28 qui précède, les feuillets découpés (c.à.d. les feuillets découpés conservés) sont devenus les f. 67 et 66 des Chartæ astronomicæ. On les trouve cités dans le T. XVII aux p. 490 (notes 2 et 3), 492 (notes 5 et 6) et 494 (notes 17 et 21).

composés ne soient pas antérieurs à 1661 [31]) c'est que, d'après les données de la note 1 de la p. 291 qui suit, ces calculs ne sont en tout cas pas antérieurs à octobre 1658, qu'ils ne datent donc pas d'une des premières années après l'acquisition (?), en 1652 ou plus tôt (?), du Cours d'Hérigone [32]).

Autre argument: les calculs de Huygens sur les intérêts composés sont rédigés en flamand (ou, si l'on veut, en néerlandais); or, il en est de même pour les petites Tables de Vlacq, contenant des problèmes sur ce sujet (note 5 de la p. 456 qui suit), qui parurent *à la Haye* en 1661.

On pourrait dire aussi que déjà en 1652 — neuf ans avant la rédaction de la Pièce qui occupe les p. 460—471 du T. XIV — Huygens trace une courbe qui n'est autre que la logarithmique [33]). Mais ici — quoique connaissant le Cours d'Hérigone — il ne parle pas encore de logarithmes. Comme dans le cas de la Fig. 24 de la p. 291 qui suit, il s'agit apparemment [34]) d'une représentation graphique des termes d'une série géométrique par des droites ordonnées éloignées l'une de l'autre à des distances a toujours égales entr'elles [35]); or, suivant Huygens, les „linearum proportiones" [36]) d'une courbe convenable — d'une courbe, peut-on dire, qui exprime une loi; comparez la Pièce de Huygens de 1646 „de motu naturaliter accelerato", où il critique Lobkowitz [37]) — doivent jouir des mêmes propriétés quelle que soit l'unité des distances a (dans sa lettre suivante du 7 janvier 1653 à van Schooten Huygens parle de leur „magnitudo arbitraria"); par conséquent parmi les courbes passant par les extrémités des ordonnées considérées une seule, selon lui, est bonne: c'est celle qu'il trace.

À la p. 27 du T. XIV nous [38]) disions déjà — mais sans discuter la date probable des calculs sur les capitaux placés à intérêts composés — qu'avant 1661 on ne trouve pas de calculs logarithmiques dans les manuscrits de Huygens.

[31]) Observons aussi qu'en *mars* 1661, d'après les p. 256—258 du T. III — nous citons cette Pièce de nouveau dans la note 69 de la p. 209 qui suit — Huygens copie un manuscrit de Fermat dans lequel il est question d'insérer par des procédés géométriques un grand nombre, p. e. 10 ou 30, moyennes proportionnelles entre deux quantités données, sans qu'il observe que cette interpolation pourrait être faite au moyen de logarithmes.

[32]) Huygens possédait certainement ce Cours plus tard, puisqu'il est mentionné en 1659 (Libri math. in octavo, 18) dans le Catalogue de vente de ses livres.

[33]) T. I, p. 209. Voyez la note 1 de la p. 210.

[34]) Dans le texte (lettre de Huygens à van Schooten) il n'est question que d'une autre courbe, savoir une courbe de Wallis. Voyez sur cette courbe la p. 373 qui suit.

[35]) Comparez la p. 440 du T. XIV.

[36]) T. I, p. 209, l. 10; les „lineæ" sont les ordonnées.

[37]) T. XI, p. 68. Voyez la note 1 de cette page.

Nous[38]) ajoutions: „tandis qu'alors ce calcul est approché par lui du côté géométrique en connection avec la quadrature de l'hyperbole". Voyez toutefois l'Addition à la p. 555 du T. XIV. Malgré la remarque de 1647 de Mersenne dont nous parlions plus haut, et qui aurait pu amener Huygens déjà en cette année à s'occuper des logarithmes en connexion avec le problème des quadratures, il n'y a pas de raison pour attribuer la priorité à ce calcul-là contrairement à ce que Huygens dit lui-même[39]). On pourrait certes être en doute en regardant la feuille séparée 11 du portef. „Musica": un côté de cette feuille — non numérotée par Huygens — se rapporte au problème musical de l'interpolation[40]), l'autre (Appendice II à la p. 295) à sa règle (Pièce I qui suit) sur le calcul des logarithmes basé sur la quadrature approchée de l'hyperbole. Impossible de dire, en regardant cette feuille, quel est le texte le plus ancien. Mais dans le Manuscrit B[41]) la chose est plus claire: *ses premières pages* contiennent des calculs brouillonnés sur le problème musical; les brouillons sur l'hyperbole etc. n'y commencent qu'à *la p.* 5. C'est par ces calculs de la p. 5 et suiv. que Huygens trouva sa règle qu'il rédigea ensuite aux p. 18 et suiv. sous le titre „Fundamentum regulæ nostræ ad inveniendos logarithmos[42])".

Sans doute, quoiqu'il n'en dise rien en cet endroit[43]), il s'est souvenu en entreprenant les calculs des p. 5 et suiv. que dès 1647 il avait été question de logarithmes en connexion avec l'„Opus Geometricum" de Grégoire de cette année. Mais nous ne pouvons souscrire entièrement à ce que l'exposé suivant de Ch. Hutton dans la partie „Construction of logarithms" de son „Introduction" à la Collection des „Scriptores logarithmici" par Fr. Maseres[44]) dit à propos de Mersenne: „As to the first remarks on the analogy between logarithms and the hyperbolic spaces, it having been shewn by Gregory St. Vincent, in his *Quadratura Circuli & Sectionum Coni*[45]), published at Antwerp in 1647, that if one asymptote be divided into parts in geometrical progression, and from the points of division ordinates be drawn parallel to

---

[38]) Ou plutôt, pour parler clairement, le rédacteur du T. XIV, par opposition à celui du T. XVII et du présent Avertissement.

[39]) P. 12 qui précède.

[40]) Note 1 de la p. 147 qui précède.

[41]) La première date y est août 1661, à la p. 18.

[42]) Pièce publiée aux p. 451—457 du T. XIV.

[43]) Mais voyez son hommage à Grégoire de St. V. à la p. 281 du T. VI (année 1668) et la réponse de J. Wallis (p. 298 du même Tome).

[44]) P. LXXXVI du T. I de cet ouvrage publ. en 1791 chez Davis, London. L'introduction historique de Hutton parut d'abord en 1785 dans sa nouvelle édition de „Sherwin's Mathematical Tables".

[45]) C. à. d. l'„Opus Geometricum".

the other asymptote, they will divide the space between the asymptote and curve into equal portions[46]); from hence it was shewn by Mersennus, that by taking the continual sums of those parts, there would be obtained areas in arithmetical progression, adapted to abscisses in geometrical progression, and which therefore were analogous to a system of logarithms. And the same analogy was remarked and illustrated soon after by Huygens, and many others, who shew how to square the hyperbolic spaces by means of logarithms". Nous ne voyons pas que les paroles de 1647 de Mersenne, qui rapporte des propos d'autrui[47]), impliquent la connaissance de la proposition que Hutton lui attribue et qui est en réalité la Prop. III (ou plutôt le corollaire de cette proposition) de 1649 de de Sarasa[48]).

Pour éviter tout malentendu nous ajoutons que le passage cité de Hutton ne se rapporte pas à la règle de Huygens pour calculer les logarithmes, basée e.a. sur la considération d'un segment d'hyperbole (comme on peut le voir au T. XIV) et que ni Hutton ni Maseres n'ont connue; voyez sur les considérations de Huygens qui s'y rattachent sur la quadrature de l'hyperbole par les logarithmes, ce qui est le sujet dont parle Hutton, les p. 474 et suiv. du T. XIV (pages manuscrites également inconnues à Hutton et Maseres), ou plutôt la p. 221 du T. XVIII appartenant à l'„Horologium oscillatorium" universellement connu au dix-huitième comme au dix-septième siècle.

Nous disons encore quelques mots plus loin[49]) sur la logarithmique, qui fut considérée de nouveau (nous voulons dire, après 1661) par Huygens en 1668, donc à Paris, comme on l'a vu au T. XIX[50]).

Le texte des treize Communications de Huygens à l'Académie qui suivent, dont celle sur la règle pour trouver les logarithmes est la première, est emprunté en majeure partie aux Registres de l'Académie conservés à Paris[51]), mais en tenant compte, lorsqu'il y a lieu, des pièces de la collection-Huygens à Leiden[52]). Ceci s'applique aux Pièces I, II, III, IV, VII, X et XIII. Les Pièces V et VI ne consistent qu'en quelques lignes indiquant les sujets traités par Huygens d'après les Registres; pour la Pièce VI ce sont surtout les

46) „Opus Geometricum", De Hyperbola, Prop. CXXX.

47) P. Tannery (lettre à H. Bosmans du 24 déc. 1902, p. 198 du T. XIII de 1934 des Mémoires Scientifiques, éd. Heiberg et Zeuthen) suppose que „la question plus ou moins bien formulée par Mersenne contre Saint-Vincent" a été inspirée par Roberval.

48) Nous rappelons que Mersenne décéda en 1648.

49) P. 413 et 414.

50) Dans la „Dynamique".

51) Comparez la p. 680 du T. XIX.

52) Voyez les p. 195—196 qui précèdent.

Appendices, empruntés aux manuſcrits de Leiden, qu'il faut conſulter. Il en eſt de même pour la Pièce XII; ſauf que nous empruntons ici quelques lignes au Manuſcrit E, non pas dans un Appendice, mais dans la Pièce elle-même. Exceptionnellement nous avons ajouté à cette Pièce de 1680 un Appendice datant, quoique peu, d'après le départ définitif en 1681 de Huygens de Paris; ceci à cauſe de la liaiſon étroite exiſtant apparemment entre les conſidérations géométriques développées dans ces pages et ce que Huygens a dû propoſer à ſes collègues de l'Académie. La Pièce XI eſt mentionnée dans les Regiſtres mais ils n'en contiennent pas le texte; celui-ci eſt emprunté aux Chartæ mathematicæ; nous l'avons publiée dans le T. XVIII auquel nous renvoyons le lecteur. La Pièce VIII (problème d'Alhazen) eſt empruntée en partie aux Chartæ mathematicæ et en partie aux „Divers ouvrages"[53]) de 1693. D'après une lettre de Huygens à Oldenburg de juin 1669[54]) „nos Meſſieurs ont jugè aſſez heureuſe" ſa conſtruction du problème d'Alhazen que l'on trouve, imprimée par lui-même, vis-à-vis de la p. 462 du T. VI. Il a donc dû la préſenter à l'Académie en cette année quoique les Regiſtres de 1669 n'en faſſent pas mention. Ailleurs[55]) Huygens affirme cependant qu'une conſtruction provenant de lui eſt dans les Regiſtres. C'eſt, penſons-nous, celle, différente de la conſtruction de 1669, qu'on trouve à la p. 336 des „Divers ouvrages"[56]). La Pièce IX enfin (conſtruction d'une hyperbole) eſt également empruntée aux „Divers ouvrages": il eſt poſſible qu'elle ſe trouvait dans un des tomes perdus des Regiſtres (1670-1674), quoique le manuſcrit conſervé de Huygens dont le texte eſt le même porte la date du 30 janvier 1669 et qu'on ne voit donc pas pourquoi il ne l'a pas pas communiquée à l'Académie en cette année[57]).

---

[53]) „Divers ouvrages de mathématique et de physique" par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences.

[54]) T. VI, p. 460.

[55]) T. IX, p. 96.

[56]) Huygens n'a pas envoyé cette construction à d'Alencé en 1687 (T. IX, p. 167); comparez ce qu'il en dit en 1693 à la p. 497 du T. X. Nous ne la trouvons pas dans un des tomes conservés des Registres; de la Hire a donc dû, pensons-nous, la tirer, pour les „Divers ouvrages", d'un des tomes perdus.

Voyez sur ces tomes perdus la p. 179 de notre T. XIX. Nous y parlons de „l'ancienne Académie, fondée en 1666, abolie en 1693". Le lecteur est prié de corriger 1693 en 1793, faute d'impression que nous n'avons pas remarquée en temps utile.

[57]) Huygens envoya la Pièce à d'Alencé en 1687. Quoique de la Hire (lettre de septembre 1686) lui eût fait savoir pu'il pouvait aussi envoyer pour les „Divers ouvrages" des pièces autres que celles qui avaient été présentées à l'Académie, il ne paraît pas l'avoir fait. C'est seulement pour cette Pièce-ci qu'on pourrait être en doute. Voyez sur le manuscrit de Huygens la note 1 de la p. 273.

Pièce I. Après tout ce qui a été dit plus haut et au T. XIV ſur la règle pour trouver les logarithmes [58]) il n'eſt plus néceſſaire d'y revenir.

Pièce II et ſuivantes. La „Demonſtratio regulæ de maximis et minimis", rédigée en latin, n'a certainement pas été lue par Huygens ſous cette forme. D'ailleurs il dit à la p. 264 du T. XIX qu'il vaut mieux que les sujets de „la geometrie pure et arithmetique" — ceci s'applique auſſi à la Pièce I — ſoient traités par écrit, ou, pour le citer littéralement, „que de telles ſpeculations ne ſont pas une affaire d'aſſemblee". Il y eut néanmoins des communications orales, puiſque les Regiſtres diſent que Huygens „*continuera* ſa Methode de Maximis etc." et qu'il note ſur ſon manuſcrit: „*parler* de Hudde" [59]). Nous nous abſtenons de remarques analogues ſur les autres Pièces [60]).

Toutes les communications — à l'exception, peut-on dire, de la première, puiſque Huygens donne ſa règle ſans aucune démonſtration; et auſſi en partie de la cinquième — ſe rapportent à des ſujets de géométrie. Il eſt queſtion p.e. d'„inveſtiganda maxima et minima in *geometricis* quæſtionibus" [61]). C'eſt de géométrie *plane* qu'il s'agit en premier lieu. Ceci eſt évident pour la Pièce III: „Regula ad inveniendas tangentes linearum curvarum". Mais on le remarque auſſi dans la Pièce II. Néanmoins Huygens voit fort bien que la méthode fournit des maxima et des minima d'expreſſions algébriques d'où qu'elles proviennent: dans l'Appendice II de la p. 300, datant de 1669, il l'applique à deux problèmes ſur le cône, ce qui n'eſt plus de la géométrie plane. C'eſt d'ailleurs ce que tout-le-monde voyait depuis longtemps: dès 1644 Hérigone applique la méthode de Fermat à la queſtion „Trouuer le plus grand des cones droicts contenus ſous egales ſuperficies coniques" [62]).

Nous avons déjà dit dans le T. XI [63]) qu'on trouve dans le Manuſcrit 12, apparemment deſtiné en premier lieu à l'uſage perſonnel du jeune Huygens, quelques pages de la main de F. van Schooten le fils intitulées: „De Maximis et Minimis ſive Ratio inveniendi caſum determinationis in Problemate determinato juxta Methodum Dom^{ni}

---

[58]) T. XIV, p. 431 et suiv.
[59]) Voyez sur Hudde la note 3 de la p. 73 du T. XIX.
[60]) On peut consulter là-dessus nos notes à ces Pièces.
[61]) Note 1 de la p. 229 qui suit.
[62]) P. Hérigone, Cours Mathematique, Tome Sixiesme et dernier, p. 63. C'est précisément un des deux problèmes considérés par Huygens en 1669.
[63]) P. 3, 7 et 13.

de Fermat", et que deux des quatre problèmes traités se trouvent (à l'endroit cité) dans le Cours d'Hérigone. Faut-il en conclure que dès son séjour à Leiden Huygens connaissait fort bien ce Cours? Dans ce cas n'est-il pas quelque peu étonnant que ses calculs logarithmiques sur les intérêts composés datent d'après octobre 1658? Il faut répondre à cette question que ce n'était pas uniquement par le volume de 1644 d'Hérigone que van Schooten connaissait la théorie de Fermat [64]). Il suffit de remarquer que le nom de Fermat ne se trouve pas chez Hérigone qui intitule son chapitre simplement „Propos. XXVI. De maximis & minimis" et ne mentionne pas non plus Fermat dans son „Introduction en la Chronologie" ni dans sa „Table . . des Autheurs Mathematiques". Van Schooten avait connu Mersenne à Paris en 1642 et 1643; c'est peut-être celui-ci qui lui a fourni en ce temps les Pièces manuscrites retrouvées par de Waard à Groningue (qui contiennent le premier mais non pas le deuxième des problèmes cités) [65]). D'ailleurs Huygens écrit en 1656 que Mersenne [66]) lui envoyait souvent à lui-même des écrits français „et principalement de Monsieur de Fermat" [67]). Il faut pourtant ajouter, nous semble-t-il, qu'il est possible que Huygens considère ici, brevitatis causa, les écrits envoyés à van Schooten comme adressés à lui-même. Consultez aussi le T. XI [68]) sur une copie d'un manuscrit de Fermat envoyée par Mersenne à Constantyn Huygens père [69]).

64) Publiée seulement en 1679 dans les Oeuvres de Fermat. Descartes avait reçu un petit écrit „De maximis et minimis" de Fermat vers le commencement de 1638, par l'intermédiaire de Mersenne, comme il résulte de la lettre de Descartes à Mersenne de janvier 1638 („Oeuvres", éd. Adam et Tannery, I, p. 486). Dans l'édition moderne des Oeuvres de Fermat par Tannery et Henry — titre complet dans la note 78 de la p. 211 — avec Supplément par C. de Waard, on peut voir que Mersenne avait communiqué des copies d'écrits de Fermat à plusieurs personnes en Italie.

65) Consultez la p. XIX de la préface de de Waard au Supplément, datant de 1922, que nous avons mentionné dans la note 64, ou bien la biographie de F. van Schooten par de Waard dans le „Nieuw Nederlandsch Biographisch Woordenboek" de 1927. Notre T. XI est de 1908.

Voyez aussi la p. 410 de notre T. I où il est question de Carcavy offrant de mettre van Schooten en relation avec Fermat.

66) La correspondance commença en 1646.

67) Lettre à de Carcavy, T. I, p. 428.

68) P. 214.

69) Notons encore qu'en 1659 (T. II, p. 458—462) Huygens copie „un escrit de M. Fermat envoyé par M. de Carcavy", qu'en juin 1660 il reçut un livre de Fermat par l'intermédiaire de Carcavy (T. III, p. 85), et que dans son Journal de Voyage 1660—1661 il écrit à Paris le 9 mars 1661: „Copié du traité de Fermat de constr. probl.", traité qu'il tenait également de Carcavy: voyez ce qu'il annote à la p. 258 du T. III où nous avons publié cette copie. Dans le T. IV on trouve encore d'autres écrits de Fermat envoyés par de Carcavy.

En juin 1659 Huygens peut écrire à Wallis avoir réduit depuis longtemps [70]) la méthode de Fermat sur les maxima et les minima „ad idem hoc compendium quo Huddenius utitur [71])" et avoir mis cela par écrit pour J. de Witt. Nous ne connaissons pas cet écrit dont Huygens parle aussi dans le Manuscrit C [72]). Mais on peut voir dans le T. IV [73]) un écrit de Huygens de 1663 également adressé à de Witt et contenant, celui-ci, la réduction à un „compendium" de la méthode de Fermat [74]) pour tracer des tangentes aux courbes planes données par des équations algébriques entre les deux coördonnées x et y (c. à. d. des équations contenant des puissances entières de x et de y), ce qui est aussi le sujet de la présente Pièce III. Notons que Huygens ne désigne pas ces courbes par l'expression „courbes algébriques", comme d'autres l'ont fait, mais qu'il parle, avec Descartes, de courbes ou lignes *géométriques*: voyez p. e. le premier alinéa de la p. 403 du T. XVIII.

En comparant la Pièce III avec l'écrit adressé à de Witt on voit qu'en 1667 de très grandes parties ont été simplement copiées par Huygens. En 1667 toutefois il commence par énoncer la règle et en donne ensuite la démonstration, tandis qu'en 1663 la règle n'avait été énoncée qu'après la déduction.

Dans la Pièce II [75]) Huygens a interverti l'ordre primitif exactement comme dans la Pièce III. Ou plutôt: il l'a fait pour la Pièce III exactement comme il l'avait fait pour la Pièce II. Seulement dans le cas de la Pièce II l'ordre primitif est celui d'un projet de 1667 du Manuscrit C [76]). L'existence de ce projet nous permet de conclure que dans ce cas Huygens n'a pas copié de grandes parties de l'écrit adressé déjà avant 1659 à de Witt. Cet écrit se rattachait sans doute aux considérations de Huygens de 1652 et d'un peu plus tard qu'on trouve aux p. 60 et suiv. du T. XII [77]).

---

70) Voyez la note 11 de la p. 48 du T. XI.
71) T. II, p. 417.
72) Voyez la note 4 de la p. 233 qui suit.
73) P. 312—317.
74) Voyez aussi la p. 20 du T. XI.
75) Note 4 de la p. 233 qui suit.
76) Note 1 de la p. 229 qui suit.
77) Voyez aussi la p. 418 du T. XIV.

Vers 1864 J. M. C. Duhamel[78]) s'est livré à une discussion assez étendue sur les méthodes de Fermat pour les maxima et minima et pour les tangentes. La lecture de ses conclusions, comprenant douze propositions historiques, suffit pour montrer qu'il s'est surtout intéressé à la question des mérites respectifs de Fermat et de Descartes. Huygens a jugé bon de faire quelques brèves remarques historiques sur la question des tangentes au début de la Pièce III, remarques que Duhamel[79]) cite sans les approuver. Duhamel ne fait aucune observation sur l'affirmation de Huygens — on a vu plus haut qu'elle est exacte — d'avoir composé son compendium sur le problème des tangentes „multo ante istas litteras vulgatas", c.à.d. avant la publication par Clerselier en 1667 du Vol. III des Lettres de Descartes[80]); mais il déclare: 1. „que cette méthode, attribuée à Fermat par Hughens, appartient à Descartes seul", 2. ne pas être de l'avis de Huygens lorsque celui-ci „reconnaît [la méthode de Descartes] comme satisfaisante jusqu'à un certain point, mais cependant moins claire que celle qu'il donne [lui-même]". Après avoir parlé de l'édition de 1679 des „Varia Opera" de Fermat où l'„usus" de la règle pour les tangentes „nec bene expositus est, nec demonstrationem ullam adjectam habet" Huygens avait ajouté: „Cartesium verò in his quæ dixi litteris rationem ejus aliquatenùs assecutum invenio, nec tamen tam perspicue eam explicuisse quam per hæc quæ nunc trademus fiet". Nous nous contentons de signaler la différence d'opinion entre Huygens et Duhamel au sujet du rôle de Descartes, non sans ajouter que Duhamel peut avoir raison. Quant à la clarté de l'exposé de Huygens on voit que Duhamel ne la nie pas. Ailleurs[81]) il avait

---

78) „Mémoire sur la méthode des Maxima et Minima de Fermat, et sur la méthode des tangentes de Fermat et de Descartes", p. 269—330 du T. 32 de 1864 des „Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France". — Dans le T. IV de l'édition moderne des „Oeuvres de Fermat", publ. par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique, avec supplément aux T. I—IV, documents inédits publ. avec notices sur les nouveaux manuscrits par C. de Waard, Paris, Gauthier—Villars, 1912, H. Brocard fait quelques observations critiques sur ce mémoire, dont les conclusions, formulées plus brièvement, s'y trouvent aux p. 143—144.

79) P. 314. Nous parlons des remarques dont le texte latin se trouve dans la note 1 de la p. 243 qui suit.

80) Comparez la p. 448 du T. XIV, où — soit dit en passant — il n'est pas tenu compte, nous semble-t-il, du passage de la lettre de Huygens à de Carcavy que nous avons cité à la p. 209 qui précède (note 67).

81) P. 283.

dit au fujet de la Pièce II (fur les maxima et minima): „Tous les calculs de Huygens font rigoureux: tous ceux de Fermat ne font qu'approchés jufqu'au moment où il remplace *e* [petit accroiffement de la variable] par zéro". En 1672[82]) Huygens dit qu' Hérigone ne montre pas „le vray fondement" de la règle „de Monfieur de Fermat . . . pour les Tangentes . . ." „que j'ay trouuè tout autre".

Pièce IV. Huygens indique cette Pièce par les mots „Dimenfio Paraboloidum"[83]), nous l'avons intitulée „De curvis paraboloidibus et hyperboloidibus".

Pièce V. Le nom Wallis figure déjà maintes fois dans les pages précédentes de ce Tome. En 1667 Huygens ne pouvait encore en aucune façon parler à l'Académie de Wallis muficologue: l'édition des „Harmonica" de Ptolémée eft de 1682[84]). Mais Wallis mathématicien lui était fort connu dès 1652; dans le préfent Avertiffement nous avons déjà fait allufion à fa correfpondance avec van Schooten fur Wallis de cette année[85]). Plufieurs lettres furent échangées entre Huygens et Wallis de 1655 à 1659[86]), et Wallis lui envoya en ce temps quelques-uns des ouvrages que nous citons à la p. 258 qui fuit; une partie d'un de ces ouvrages lui était même dédiée[87]). En 1661 Huygens fit à Londres la connaiffance perfonnelle de Wallis[88]), mais la correfpondance ne fut reprife qu'en 1668, après la communication de Huygens fur Gregory qui conftitue notre Pièce VI[89]).

On peut voir dans les lettres échangées avant 1660 combien l'impreffion que

---

[82]) T. VII, p. 229.

[83]) T. IX, p. 95, lettre à de la Hire du 26 septembre 1686. Huygens ajoute „ou je pourray joindre celle des Hyperboloides" Comparez la note 1 de la p. 256 qui suit.

[84]) Nous ne parlons pas de quelques petits articles de Wallis sur des sujets de musique (d'ailleurs également postérieurs à 1667): Huygens ne les mentionne pas.

[85]) Note 34 de la p. 204.

[86]) Nos T. I et II.

[87]) Voyez sur l'envoi de plusieurs publications de Wallis les p. 192 et 210 du T. II; une partie des „Tractatus duo etc." est dédiée à Huygens.

[88]) T. III, p. 295, lettre de Huygens du 14 juillet 1661. D'après son Journal de Voyage Huygens vit Wallis quatre fois au mois d'avril.

[89]) Il est vrai que cette communication à l'Académie eut lieu en octobre 1668 et que Wallis lui avait écrit déjà en septembre (T. VI, p. 251), mais Huygens ne reçut cette lettre que le 31 octobre (T. VI, p. 278).

Huygens reçut des publications de Wallis était favorable[90]). Il critique cependant les démonſtrations où il eſt fait uſage de l'induction[91]) et dont Wallis défend amplement l'admiſſibilité[92]). Comparez ſur ce ſujet la remarque de 1686 de Huygens à la p. 390 qui ſuit[93]). Le fait que Huygens — autrement que Wallis — exprime pluſieurs fois ſa préférence pour la géométrie par rapport à l'arithmétique et l'algèbre ne conſtitue évidemment pas une critique. Dans ſa lettre du 1 janvier 1659[94]) Wallis montre que Huygens s'était trompé en affirmant[95]) que l'„arithmetica infinitorum" ne pourrait probablement pas ſervir à calculer ce qu'il avait lui-même déterminé géométriquement, ſavoir les aires compriſes entre certaines droites et la ciſſoide. Toutes ces choſes, et beaucoup d'autres, peuvent avoir été expoſées par Huygens en détail à l'Académie.

Pièce VI et Appendices. Pour ne pas trop allonger le préſent Avertiſſement, nous ne nous étendons pas ici ſur la polémique avec J. Gregory ſur la queſtion de la démonſtrabilité de l'impoſſibilité de la quadrature du cercle, diſpute à laquelle Wallis lui auſſi prenait part: voyez ſurtout ſa longue lettre à Brouncker du 14 novembre 1668[96]). Mieux vaudra revenir ſur la recherche de la quadrature du cercle dans un autre Avertiſſement[97]). Il a d'ailleurs déjà été queſtion de ce ſujet dans cet Avertiſſement-ci, puiſque nous avons cité l'„Opus Geometricum" de Grégoire de St. Vincent en mettant en lumière l'influence de cet ouvrage ſur d'autres chercheurs et en particulier ſur Huygens.

Pièce VII. Si d'une part les logarithmes proviennent de la néceſſité d'abréger les calculs trigonométriques des aſtronomes, ſi d'autre part il fut remarqué que la théorie des capitaux croiſſants, ainſi que celle des intervalles muſicaux, préſentent avec celle

---

[90]) Voyez p. e. le début de la lettre du 6 septembre 1658 à la p. 210 du T. II.

[91]) T. I, p. 441, 459.

[92]) T. I, p. 477, lettre du 22 août 1656. Wallis ne se sert pas encore de „l'induction *complète*", consistant à *démontrer* que lorsque, pour une série de formules, la $n^{ième}$ est bonne, la $(n+1)^{ième}$ doit l'être également. Voyez encore sur ce sujet la note 4 de la p. 390.

[93]) A la p. 459 du T. I il appelle les démonstrations algébriques „compendiosas". Voyez aussi la p. 211 du T. II.

[94]) T. II, p. 296.

[95]) Dernières lignes de la p. 212 du T. II.

[96]) T. VI, p. 282—289.

[97]) P. 369 qui suit.

des logarithmes des analogies frappantes de ſorte que les tables de logarithmes peuvent ſervir dans ces deux cas, il n'en eſt pas moins vrai que la recherche des quadratures, telle qu'elle ſe trouve chez Grégoire de St. Vincent, était propre, elle auſſi, à faire réfléchir les mathématiciens ſur des problèmes logarithmiques. Merſenne, tout muciſologue qu'il était, avait été amené vers la fin de ſa vie par les diſputes ſur l'œuvre de Grégoire, et nullement par une queſtion muſicale, à poſer un problème logarithmique qui, on l'a vu plus haut, a aſſez généralement attiré l'attention des ſavants.

Remarquons cependant en paſſant que dans les „Cogitata phyſico-mathematica" de 1644 de Merſenne ſe trouve l'aſſertion „muſicale" que le rapport d'égalité correspond à zéro [98]); ce que Wallis, à la fin de ſon „Tractatus Elencticus" contre Meibomius [99]), dit conſidérer comme pouvant avoir été le point de départ de la théorie des rapports de ce dernier.

Quoique N. Mercator [100]) connût le problème logarithmique de Merſenne, ſa théorie à lui des logarithmes a un caractère plutôt muſical [101]); mais il s'eſt occupé auſſi d'une quadrature, celle de l'hyperbole, et c'eſt à cette quadrature que la „Logarithmo-technia" doit ſa célébrité puiſqu'il s'y agit d'une ſommation de ce qu'on a voulu appeler des „indiviſibles" à l'aide du développement d'une fraction en une ſérie convergente; et, comme l'hyperbole avait déjà été miſe en rapport avec les logarithmes, ceci ſe trouva conduire au développement en ſérie d'un logarithme.

On comprend que Huygens ait tenu à faire immédiatement connaître à Paris la quadrature de l'hyperbole par Mercator, la diſpute avec Gregory ſe trouvant ainſi reléguée dans le paſſé [102]). Les Regiſtres diſent que Huygens, après que Wallis eut expliqué et réformé cette quadrature, „y a adiouſté pluſieurs choſes pour en faciliter

---

98) „Præfatio generalis, De Rationibus atque Proportionibus". On lit dans le n° XIV: „Proportio æqualitatis nihili similitudinem refert: proportio maioris æqualitatis attollitur supra nihilum, & enti adsimilatur: proportio minoris æqualitatis deprimitur infra nihilum, & antienti comparari potest".

99) Déjà cité dans la note 3 de la p. 13 qui précède.

100) Note 10 de la p. 201.

101) Voyez la p. 11 qui précède. Il mérite d'être observé que chez Mercator il n'est nullement question, à propos des „ratiunculæ", de la théorie des capitaux croissants, mais *seulement* de musique.

102) Voyez à la p. 276 du T. VI la fin de la Pièce de Huygens du 12 novembre 1668, plusieurs fois citée dans les Appendices à la Pièce VI (p. 303—327 qui suivent).

l'intelligence". Lorſqu'on compare la verſion de Huygens avec celle de Wallis [103]) on voit que Huygens a en effet le mérite de la ſimplicité et de la clarté qui chez Wallis eſt déjà plus grande que chez Mercator. Il a omis tout ce qui ſe rapporte à la ſérie de Mercator et de Wallis $1 - A + A^2 - A^3$ etc. pour ne conſerver que la ſérie de Wallis $1 + A + A^2 + A^3$ etc. Mais nous ne voyons pas qu'il y ait rien ajouté (du moins dans la Pièce écrite; il peut avoir *parlé* plus longuement).

On ne peut pas en effet conſidérer comme une addition qu'au lieu de ſe ſervir de petites „areolæ" découpées, devant de nouveau être ſommées pour obtenir l'aire totale, il dit, plus correctement que Mercator, prendre de petits *parallélogrammes* qui „ſurpaſſent de quelque choſe l'eſpace" conſidéré; ce qui donne évidemment, lorſque les parallélogrammes, comme les „areolæ", deviennent infiniment minces, la même ſomme. Ceci eſt en effet entièrement dans l'eſprit de Wallis quoiqu'en cette occaſion celui-ci n'indique pas les parallélogrammes dans la figure [104]). Dans la Pièce tirée des Regiſtres (voyez les dernières lignes de cette Pièce) Huygens n'obſerve pas, bien que la choſe dût être évidente pour Mercator, pour Wallis et pour lui-même, que lorſque les tranches ou parallélogrammes correſpondant à une aire limitée deviennent „innumeræ" (Mercator), les „ratiunculæ" — le nombre dix millions (dernière ligne de la p. 11) eſt évidemment arbitraire — ſe rapprochent indéfiniment de la valeur $\frac{1}{1}$ de ſorte que les expoſants des puiſſances de ces „ratiunculæ", c.à.d. les

---

[103]) On peut consulter la note 3 de la p. 261 qui suit.

[104]) Dans la Dédicace de son „De Sectionibus Conicis" de 1655 (dédié à Seth Ward et à L. Rook) Wallis écrit: „Videbitis me, statim ab initio, Cavallerii Methodum Indivisibilium quasi jam à Geometris passim receptam, tam huic quam tractatui sequenti . . . substernere; ut multiplici figurarum inscriptioni & circumscriptioni, quibus in ἀπαγωγαῖς aliàs utendum sæpius esset, supersedere liceat; sed à nobis aliquatenus sive emendatam sive saltem immutatam: pro rectis numero infinitis, totidem substitutis parallelogrammis (altitudinis infinite exiguæ) ut & pro planis, totidem vel prismatis vel cylindrulis; & similiter alibi".

Ailleurs Huygens désigne, conformément à la terminologie de Cavalieri, les parties élémentaires d'une figure plane par les mots „lineæ" ou „rectæ"; voyez p.e. la l. 6 (datant de 1664) de la p. 482 du T. XVI, et la note 6, se rapportant à un calcul de 1693 ou 1694, de la p. 379 du T. XVIII. Il est vrai qu'en ces endroits nous avons affaire, autrement que dans les „Theoremata de quadratura hyperboles etc." de 1651 (T. XI), à des pièces qui n'étaient pas destinées à la publicité; il ne s'agit donc pas dans ces pièces de démonstrations formelles. Voyez encore sur les démonstrations formelles, outre la p. 182 qui précède, les p. 348 du T. XVI et 50 du T. XVIII.

Consultez aussi sur Wallis, Huygens et les indivisibles de Cavalieri la note 1 de la p. 340 du T. XVI.

logarithmes (ſi l'on veut ſ'en tenir à la définition du logarithme de la p. 11), tendent à devenir infiniment grands, ce qui à ſes auditeurs eût pu ſembler une difficulté ſérieuſe. Probablement — il eſt vrai que nous ne connaiſſons pas ſa communication orale — il a cru bien faire de paſſer ce fait ſous ſilence.

Pièce XI. On a vu dans le T. XVIII [105]) que les théorèmes de Huygens de 1678 ſur l'εὔθυνσις [106]) de l'épicycloïde et la quadrature des eſpaces épicycloïdaux ſe rattachent tant à la rectification de la cycloïde — trouvée par Huygens en 1659, après Wren, ſuivant une méthode fort différente — qu'aux conſidérations de Deſcartes et de Vaumeſle ſur les figures roulantes. Depuis une dizaine d'années le problème de la rectification des courbes — que Descartes dans ſa Géométrie de 1637 avait jugé inſoluble [107]) — était à l'ordre du jour [108]).

Quelques mois plus tard de la Hire, devenu membre de l'Académie en cette année 1678, y parla ſur le même ſujet [109]).

En 1675 Römer avait déjà traité à l'Académie de l'uſage de l'épicycloïde dans les engrenages, ſujet auquel de la Hire et Huygens s'intéreſſèrent également, de la Hire peut-être en cette même année 1675 indépendamment de Römer [110]).

Pièces IX et X. Ces Pièces — voyez ſur la Pièce IX ce que nous diſons un peu plus loin en parlant de la Pièce VIII — ſe rapportent aux équations de l'hyperbole et de la circonférence de cercle. C'eſt donc de la géométrie analytique, mais d'une tournure archaïque. Conſtruire l'hyperbole d'après ſon équation s'appelle chez Huygens „conſtructio loci ad hyperbolam" [111]). L'on voit combien le problème de déterminer

---

[105]) P. 52 (A), p. 40—41 (B), p. 400—405. Le troisième livre de l'„Horologium oscillatorium" (T. XVIII) de 1673 traite „de linearum curvarum evolutione et dimensione".

[106]) Expression de Wallis pour désigner la rectification; voyez la p. 285 qui suit.

[107]) Livre Second: „la proportion qui est entre les droites et les courbes n'étant pas connue, et même, je crois, ne le pouvant être par les hommes ..."

[108]) Voyez encore sur le problème historique de la rectification des courbes la note 1 de la p. 210 du T. XVIII.

[109]) T. XVIII, p. 603, note 4 et T. XIX, p. 180, note 7.

[110]) T. XVIII, p. 602—603 et 607—616.

[111]) De Witt (début du Lib. II de l'ouvrage cité dans la note 114) parlait aussi d'un „locus ad lineam rectam" ou „ad curvam". De la Hire — voyez sur lui la suite du présent Avertissement — s'exprime de la même manière.

les éléments d'une conique d'après fon équation — notons que dans l'Appendice de 1682 à la Pièce XII [112]) Huygens parle fimplement de l'„æquatio parabolæ" [113]) — paraiffait encore ardu malgré les travaux de Wallis et de Witt [114]). Les fameux livres d'Apollonios [115]) — nommé dans le titre de la Pièce X, cité auffi dans l'Appendice II à la Pièce VIII, dans celui à la Pièce XII et dans la Pièce XIII —, ne pouvaient être incorporés qu'avec difficulté dans un enfemble logique d'allure moderne [116]). On voit que la conftruction de l'hyperbole de la Pièce IX fe rattache à une conftruction de Florimond de Beaune, et que la Pièce X n'eft guère autre chose que la conftruction d'une circonférence de cercle d'après fon équation [117]). Il faut remarquer que pour Huygens dans fa jeuneffe, comme pour Apollonios, le mathématicien par excellence eft le *géomètre*. Il n'a jamais abandonné cette préférence pour la géométrie: voyez p. e. la l. 5 de la p. 208 où il eft queftion de „geometrie pure et arithmetique" et les l. 4—6 de la p. 213 où nous citons fes obfervations fur les écrits de Wallis. Néanmoins l'étude d'autres auteurs — nous pouvons mentionner Viète (antérieur à Defcartes) qu'il connaiffait depuis longtemps [118]) et dont l'algèbre ou, comme Viète s'exprime, l'„Arithmetica fpeciofa five fymbolica" a eu auffi tant d'influence fur Wallis [119]) — l'ont amené peu à peut à attacher plus d'importance aux équations et même à regarder parfois, comme Girard [120]) et Defcartes, certaines équations comme intéreffantes en elles-mêmes et capables d'être *interprétées* par des figures géométriques.

---

[112]) Dernière ligne de la p. 339 qui suit.

[113]) Nous n'avons pas trouvé que de la Hire se serve où que ce soit de ce génitif qui est aujourd'hui d'un usage général: là où il s'exprime le plus brièvement il parle („Nouveaux Eléments" p. 394) d'„Equations *aux* Sections Coniques".

[114]) Voir pour l'ouvrage de Wallis la note 104 qui précède. Le Lib. II des „Elementa Curvarum" de Johan de Witt (1625—1672), grand-pensionnaire depuis 1653 de la province de Hollande, publiés en 1659 par F. van Schooten dans le T. II de la Collection „Renati Descartes Geometria" — dans sa préface de 1658 de Witt parle de „ea . . . quæ à me *quondam* [nous soulignons] conscripta ac pene in ordinem redacta inveni" — contient une discussion systématique des équations de deux variables (x et y) du premier et du deuxième degré.

[115]) Dont Wallis en 1655 ne connaissait encore que les quatre premiers; voyez p.e. la note 8 de la p. 41 du T. XVIII et les notes 2 et 3 de la p. 298 qui suit.

[116]) Voyez e.a. sur Huygens et Apollonios la note 8 de la p. 41 du T. XVIII.

[117]) Comparez la p. 231 du T. XIV (pièce de 1657).

[118]) Voyez à la p. 10 du T. I le titre des Oeuvres de Viète (1540—1603) telles qu'elles furent publiées en 1646 par F. van Schooten. Huygens les cite e.a. en 1652 (T. I, p. 213).

[119]) Voyez l'„Oratio Inauguralis" de 1649 par laquelle débute le T. I des „Opera Mathematica" de 1695.

[120]) „Qui a commenté Stevin" (T. I, p. 517). Huygens le cite seulement en 1691 (T. X, p. 187, 188); mais voyez aussi sur lui le T. XI, et consultez la p. 363 qui suit.

Pièce VIII. Le célèbre problème d'Alhazen avait d'ailleurs amené Huygens de bonne heure à bien faifir l'utilité de l'algèbre dans la réfolution des problèmes géométriques: en août 1657 [121]) il écrit à de Slufe: „femper miratus fum illum [Alhazen] abfque Algebræ auxilio id conftruere potuiffe". En ce moment de Slufe ne voulut pas encore s'occuper de ce problème; mais lorfqu' Oldenburg lui communiqua en 1670 la folution de Huygens de 1669 [122]), il fe mit lui auffi au travail. Les diverfes folutions, propofées tour à tour par Huygens et par lui en 1671 et 1672, et qu'ils fe faifaient connaître qar l'entremife d'Oldenburg — nous avons déjà parlé de ces lettres à la p. 196 qui précède — font preuve d'une concurrence acharnée entre les deux amis. Oldenburg publia des „Excerpta ex Epiftolis nonnullis, ultrò citróque ab Illuftriffimis Viris, Slufio & Hugenio, ad Editorem fcriptis" dans les „Philofophical Tranfactions" de 1673 [123]). En excerpant la lettre de Huygens du 1 juillet 1672 il omet l'endroit qui caractérife bien ce combat de fineffe: Huygens dit que fur ce problème il lui „femble que nous rafinons de mefme que les deux peintres Grecs fur la diuifion de la ligne".

Nous ne pouvons ici réimprimer les lettres du T. VII. Voyez cependant un morceau qui s'y rattache dans l'Appendice I à la Pièce VIII. Ce qui mérite furtout d'être noté, c'eft que, déjà en 1669, une folution du problème d'Alhazen amena Huygens à confidérer avec attention la forme de l'équation du deuxième degré dans le cas où celle-ci correfpond à une hyperbole. On voit dans le Manufcrit D que c'eft cette confidération qui l'a amené à écrire la Pièce IX dont nous avons déjà parlé plus haut.

Pièce XII. Conformément à ce que nous avons dit à propos des Pièces X et XI, cette Pièce de 1680 eft intitulée: „Sur les *équations* folides". Quoique Huygens débute par le problème „des 2 moyenes proportionelles", pour parler enfuite „de la perpendiculaire a une hyperbole d'un point donnè", il ne défigne le calcul conduifant à la conftruction géométrique de ces moyennes ou de cette perpendiculaire que comme „quelques exemples" de „cette methode", c. à. d. de la méthode confiftant, on le voit auffi dans l'Appendice [124]), dans l'introduction d'une nouvelle variable à l'effet de

[121]) T. II, p. 45.
[122]) T. VII, p. 89, 1 août 1671.
[123]) N°s. 97 et 98, 6 octobre et 17 novembre 1673.
[124]) P. 334 et suiv.

ſubſtituer à l'équation donnée qu'il s'agit de réſoudre un enſemble équivalent de *deux* équations plus maniables.

Or, ce long Appendice — que Huygens eût pu publier, paraît-il, dans le recueil „Divers ouvrages etc." de 1693 [125]) — fait voir en même temps que la nature „tamen uſque recurrit" [126]): c'eſt en fin de compte un géomètre plutôt qu'un amateur de l'algèbre qui a la parole.

Pièce XIII. La dernière Pièce académique ſur les coniques, datant également de 1680, eſt bien de nature géométrique, quoique dans la démonſtration du théorème, ou plutôt dans la première des deux propoſitions faiſant office de lemmes, il ſoit fait uſage — Huygens (ou du moins celui qui a écrit ces pages du Regiſtre) ne fait qu'*indiquer* la démonſtration, mais elle ſe trouve dans le brouillon du Manuſcrit E (voyez l'Appendice) — de certaine propriété d'une équation du quatrième degré („équation quarré quarrée"), de ſorte que cette propoſition „ſe demontre . . . . par Algebre". Cette propoſition ſe rattache d'ailleurs à une propoſition de van Schooten, également démontrée par algèbre (voyez l'Appendice). Plus tard Huygens réuſſit à trouver une preuve purement géométrique (même Appendice).

Nous avons ſignalé à propos de la Pièce VIII — et nous aurions pu le faire auſſi à propos de la Pièce III ſur les tangentes [127]) — la concurrence de Huygens avec René de Sluſe [128]). A propos de la Pièce XII il faut ſignaler la même concurrence et auſſi celle de Huygens avec Philippe de la Hire. Cette dernière concurrence apparaît encore bien plus clairement dans le cas de la Pièce XIII. Les ſolutions de Sluſius du problème déliaque ont fait une grande impreſſion ſur Huygens. On peut conſulter là-deſſus la note 2 de la p. 334 . Quant à de la Hire, nous avons mentionné plus haut à propos de la Pièce XI de 1678-1679 qu'il diſcourut ſur le même ſujet que Huygens peu de temps après lui. Dans l'Appendice de 1682 de la Pièce XII de 1680 Huygens nous

---

[125]) Voyez sur cet Appendice les quatre dernières lignes de la p. 284 du T. VIII et les l. 3—6 de la p. 97 du T. IX (lettre à de la Hire du 26 septembre 1686).

[126]) Naturam expellas furca, tamen usque recurret. (Horace, Epist. lib. 1, ep. X, 24).

[127]) Voyez sur ce sujet, outre le recueil cité dans la note suivante, la note 1 de la p. 243 qui suit.

[128]) On peut consulter le livre dont nous avons déjà parlé brièvement à la p. III de notre T. I, savoir la „Correspondance de René-François de Sluse publiée pour la première fois et précédée d'une Introduction" par M. C. le Paige, Rome, Impr. d. sc. math. et phys., 1885.

apprend (en le défignant par les mots „gallus quidam geometra") que de la Hire f'occupait vers le même temps que lui (il f'agit d'un livre de de la Hire de 1679) du problème déliaque (ou plutôt plus généralement de l'équation du troifième degré). Enfin la Pièce XIII, également de 1680, eft immédiatement fuivie dans les Regiftres par un difcours de de la Hire fur le même fujet, favoir les coniques à axes parallèles ou perpendiculaires fe coupant en quatre points[129]). On peut voir dans notre T. VIII que de la Hire prétendit même dans la féance où parla Huygens d'avoir traité avant lui dans l'Académie du fujet de fa communication ce qui toutefois ne fut pas confirmé par les Regiftres[130]).

Devenu membre de l'Académie en 1678 de la Hire y déployait une grande activité. On peut confulter la lifte — d'ailleurs incomplète — de fes ouvrages dans l'„Hiftoire de l'Académie Royale des Sciences depuis 1666 jufqu'à fon renouvellement en 1699"[131]). Nous avons cité jadis fes „Nouveaux élémens" de 1679, auxquels nous faifions allufion dans l'alinéa précédent[132]), lefquels fe rattachent aux „Elementa" de 1659 de J. de Witt[133]). Il f'était occupé de coniques déjà depuis longtemps — comparez fa biographie dans le T. VIII[134]) — et devait publier en 1685 in folio fes „Sectiones conicæ in novem libros diftributæ"[135]). C'eft auffi, et peut-être furtout, à Defargues qu'il fe rattache, lui et fon maître le peintre et graveur Abr. Boffe. Notons que Huygens connaiffait Boffe — et Defargues[136]) — perfonnellement, et probablement auffi leur grand livre d'architecture et de perfpective[137]), longtemps

---

[129]) Dans ce discours (ou plutôt dans cette pièce, car nous ignorons s'il y eut une communication orale) de la Hire ne se sert pas d'équations en x et y: comparez les notes 135 et 138 qui suivent.

[130]) T. VIII, p. 284.

[131]) Publiée en 1733.

[132]) T. VIII, p. 283: „Nouveaux Elemens des Sections Coniques. Les Lieux Géometriques. La Construction ou Effection des équations".

[133]) „Elementa curvarum linearum", ouvrage cité à la p. 217 qui précède. De la Hire mentionne dans sa Préface cet ouvrage de de Witt, auteur „qui est estimé avec justice le plus excellent de tous ceux qui ont pris ce mesme chemin".

[134]) T. VIII, p. 282, note 1.

[135]) Cet ouvrage se rattache à celui de 1673 (fin de la note 138 qui suit). Il n'y est pas question d'„équations" (note 132): c'est plutôt de la géométrie synthétique que de la géométrie analytique.

[136]) Huygens ne rencontra Desargues, semble-t-il, qu'une seule fois. Voyez sur cette rencontre la p. 188 qui précède.

[137]) D'après la p. 114 du T. VII, Huygens acheta en 1671 à Paris pour son frère Constantyn un grand livre de perspective qui peut fort bien avoir été la „Manière universelle de Desargues, pour pratiquer la perspective par petit pied, comme le géométral, par M. Bosse, Paris, 1648".

avant d'avoir rencontré de la Hire[138]). Les mérites de de la Hire en ce qui concerne l'étude systématique des coniques sont évidemment supérieurs à ceux de Huygens[139]). Huygens, il est vrai, n'avait pas l'ambition — voyez la page citée dans la note 137 — de composer sur la perspective ou les coniques „de si grands livres" de nature didactique. Quant aux relations personnelles des deux savants, en 1683, donc après le départ de Huygens de Paris, de la Hire, opposé en général aux candidatures à l'Académie

[138]) De la Hire n'est mentionné dans la Correspondance qu'à partir de 1680. Quant à Bosse, la lettre de Mylon de 1659 (T. I, p. 334) fait voir que Huygens avait déjà fait sa connaissance avant cette année, donc probablement lors de son séjour à Paris en 1655. La p. 4 du T. II fait voir que van Schooten le connaissait également. Dans son Journal de Voyage de 1660—1661 — nous ne faisons pas mention d'autres endroits — Huygens parle de plusieurs entretiens avec Bosse, et une fois d'une conversation sur un sujet de mathématique: il écrit le 4 janvier 1661: chez Bosse, problème en l'ovale (ovale est le nom que Desargues donne à l'ellipse).

Notons que c'est grâce à une copie de 1679 (retrouvée en 1845) par de la Hire de l'oeuvre principale de Desargues, son „Broüillon project d'une atteinte aux évenemens de rencontres du Cone avec un plan", que cette œuvre a été conservée. Dans l'„Avant-propos" de son ouvrage de 1673, la „Nouvelle methode en geometrie pour les sections des superficies coniques, et cylindriques, qui ont pour bases des cercles, ou des paraboles, des elipses, & des hyperboles", de la Hire cite le „Broüillon projet" de Desargues „qui n'a point esté mis en sa perfection". Outre Desargues il mentionne Apollonios (première ligne de l'„Avant-propos") et, vers la fin, Grégoire de S. Vincent. Comparez sur l'ouvrage de 1673 la note 135 qui précède. De la Hire ne dédaigne point, comme Desargues, la forme classique. Cependant, même dans son ouvrage de 1679 qui se rattache à celui de de Witt, il désigne, en disciple de Desargues, les coördonnées d'un point par les mots „tige" et, „rameau". Nous avons remarqué dans le Manuscrit H, à la p. 103, un endroit où, fort exceptionnellement, Huygens, en 1692, donc longtemps après avoir quitté Paris, désigne les coördonnées par les mots „tige" et „branche".

[139]) Le lecteur hollandais peut consulter sur de la Hire et Desargues l'étude „Desargues" de H. de Vries (dans ses „Historische studiën", Noordhoff, Groningen—Batavia, 1934). Il faut observer qu'il n'est pas tout-à-fait exact de dire avec M. de Vries que Desargues rentra en 1650 pour tout du bon dans sa ville natale de Lyon, puisque Huygens le vit à Paris en 1661, un an avant sa mort.

Nous saisissons cette occasion pour remarquer (comparez la première ligne de la p. 4 du T. XIV) que, si Huygens a rencontré Desargues à Paris en 1661, il n'y a au contraire pas vu Fermat, comme le dit la note 3 de la p. 177 du T. III. Ceci a été signalé par P. Tannery comme une impossibilité — comme étant en contradiction avec le n° 824, lettre de Fermat à Huygens de décembre 1660, quelque peu postérieure à la date de la prétendue rencontre — peu après l'apparition du T. III (1890): dans sa lettre du 30 avril 1891 à Moritz Cantor („Mémoires Scientifiques", T. XIII, 1934, p. 340) Tannery dit que les éditeurs ont dû faire une erreur de lecture dans le déchiffrement du „Reys-verhæl"; et en effet, à l'endroit du Journal de Voyage indiqué dans la note 3 nommée, on ne trouve pas le nom Fermat mais le nom Thevenot. Loin de l'avoir beaucoup fréquenté comme l'auteur de la note incriminée l'assure, Huygens n'a jamais rencontré Fermat († 1665).

de ſavants étrangers, fait preuve d'une certaine animoſité contre Huygens [140]); mais ceci ne fut qu'un incident; Huygens reſta en correſpondance avec lui juſqu'à la fin de ſa vie et dans la Préface de ſon Traité de la Lumière de 1690 il parle du célèbre Monſieur de la Hire.

[140]) Voyez les p. 463—464 du T. VIII, faisant partie d'une lettre du 30 août 1683 de von Tschirnhaus à Huygens. Ce passage est aussi cité par H.L. Brugmans à la p. 95 de son livre de 1935: „Le séjour de Chr. Huygens à Paris et ses relations avec les milieux scientifiques français suivi de son Journal de Voyage à Paris et à Londres".

HUYGENS À L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

COMMUNICATIONS SUR DES SUJETS DE MATHÉMATIQUE.

I. Règle pour trouver les logarithmes (1666 ou 1667).

II. Demonstratio regulæ de maximis et minimis (1667).

III. Regula ad inveniendas tangentes linearum curvarum (1667).

IV. De curvis paraboloidibus et hyperboloidibus (1667).

V. Examen du livre de Wallis „Arithmetica infinitorum" de 1655 (1667).

VI. Insuffisance de la démonstration de Gregory de l'impossibilité de la quadrature du cercle (1668).

VII. Sur la quadrature arithmétique de l'hyperbole par Mercator et sur la méthode qui en résulte pour calculer les logarithmes (1668).

VIII. Problema Alhaseni (1669. 1670?).

IX. Constructio loci ad hyperbolam per asymptotos (1670?).

X. Sur les lieux plans d'Apollonios (1678).

XI. Rectification et quadrature de l'épicycloïde (1678—1679).

XII. Sur les équations solides (1680).

XIII. Théorème sur les points d'intersection des coniques dont les axes sont parallèles ou à angles droits (1680).

Voyez aussi la fin de la note 4 de la p. 335 qui suit.

I.

REGLE POUR TROUUER LES LOGARITHMES [1]).

[1666 ou 1667]

Registres de l'Académie Royale des Sciences, T. II [2]), p. 40—42.
(Voyez fur une rédaction antérieure de cette règle, datant apparemment de 1661, comme celle du Manufcrit B mentionnée dans la note 1, l'Appendice II à la p. 295 qui suit).

Le calcul fuiuant cette regle eft beaucoup plus court que par celle dont on s'eft feruy iufques icy, et pour faire uoir la difference il faut feulement remarquer que pour trouuer par exemple le Logarithme de 2 iufques a 10. chiffres vrais, il falloit extraire enuiron quarante fois la racine quarrée d'un nombre de 64. chiffres, la ou par la prefente regle pour auoir le mefme Logarithme, il ne faut qu'extraire 6. fois la racine quarrée d'un nombre de 28. chiffres, et faire enfuitte trois divifions, et une multiplication.

La Regle eft celle cy.

Il faut auoir une fois pour tout les racines quarrées du nombre 10. extraites confecutiuement iufques a la fixiefme, et chaque racine de 14. chiffres, fi [3]) l'on defire auoir les Logarithmes iufqu'a 10. characteres ueritables, ou iusque la feptieme ou 8e.

---

[1]) Voyez sur cette Règle les p. 431—434 du T. XIV. La Pièce correspondante du Manuscrit C (p. 110—111) — que nous avons déjà mentionnée dans la note 1 de la p. 452 du T. XIV — porte la date du 2 novembre 1666 [2 Nov. 1666. Ex libro B. Le Fundamentum regulæ nostræ ad inveniendos logarithmos du Manuscrit B (p. 17—19) date déjà d'août 1661. Voyez la p. 451 du T. XIV]. Les quelques différences entre cette Pièce et celle des Registres sont absolument insignifiantes (voyez cependant la note 7 de la p. 227). Huygens l'a sans doute copiée, et ce doit être une copie de sa copie qui a été insérée dans les Registres. D'après la place qu'elle occupe dans les Registres cette dernière copie doit dater du commencement de 1667 (ou peut-être de la fin de 1666).

[2]) Voyez sur le T. II, intitulé „Registres de Mathematiques de l'année 1667 et d'une partie de l'année 1668 jusqu'au mois d'Auril," les l. 4—5 de la p. 180 du T. XIX.

[3]) Le copiste avait écrit à tort „et si". Le texte du Manuscrit C est correct.

racine, et dauantage (et quand et quand [4]) de plus de chiffres si l'on les ueut encore plus precifement): et de ces racines l'on n'a qu'a confiderer les deux dernieres. Ainfy

La racine 5e. extraitte de 10 [5]) eft 10746078283213. qui foit appellée a [nous remplaçons les quelques majufcules du texte des Regiftres par des minufcules; Huygens — ou bien plutôt le copifte; voyez les notes 1 et 3 — fe fert indifféremment des deux].

La racine 6e. [6]) eft 10366329284377. qui foit b.

L'unité 10000000000000. qui foit d, c'eft a dire eftant multipliée par 1⑬, comme le font auffy les dites racines pour faire en aller les fractions.

Maintenant il faut trouuer un nombre égal a $\frac{200da}{3d + 3a + 4b} + 40b - 3a - 3d$, lequel nombre eft icy 559661035184532. On le multipliera par $a - d$ dont le produit fera 4175509443116778 &c, dont il fera affés de prendre ces premiers characteres; et il faut noter que ce nombre une fois trouué feruira enfuitte au calcul de tous les Logarithmes.

Soit proposé de trouuer le Logarithme de 2. Il faut auoir femblablement la 5e et 6e racine extraite de 2. en 14. chiffres, comme auparauant du nombre 10.

La 5e. racine de 2. eft 10218971486541. qui foit dite f.

La 6e. racine de 2. eft 10108892860517. qui foit dite g.

Et l'unité comme deuant 10000000000000. foit d.

Il faut apres trouuer un nombre egal a $\frac{200\,df}{3d + 3f + 4g} + 40g - 3f - 3d$, lequel nombre eft icy 545869542830178. On le multipliera par $a - \frac{ad}{f}$, et le produit fera 12569535892606. &c.

Maintenant comme le nombre deffus trouué 41755&c a cettuy cy 12569&c, ainfy fera le Logarithme de 10. a fcavoir 100000&c. au logarithme de 2. qui fera 0,30102999567; ou il y a 10. characteres vrais, et l'unziesme qui furpaffe le vray de l'unité. L'on fcait qu'il faut mettre un zero pour charactériftique a caufe que le nombre 2. eft au deffous de 10.

Or pour trouuer le Logarithme d'un nombre au deffus de 10, il faut tant de fois extraire continuellement la racine quarrée, que la derniere extraite foit moindre que

[4]) Manucrit C: quant et quant.

[5]) C. à. d. $\sqrt[32]{10}$.

[6]) C. à. d. $\sqrt[64]{10}$.

la racine fixiefme extraite de 10. c'eft a dire aux nombres depuis 10. iufqua 100. il faudra extraire 7. fois. Depuis 100. iufqua 10000. huit fois. Depuis 10000 à 100000000 neuf fois. Et en fe feruant des deux racines dernieres, et les appelant *f* et *g* et operant comme deffus, l'on aura le Logarithme de la racine qui eft la 7ᵉ en comptant de la derniere en arriere, et cela auffy precifement que nous auons trouué le Logarithme de 2. c'eft a dire iufqua 10. charactéres vrais. Doublant apres ce logarithme trouué l'on aura celuy du nombre propofé, fi l'on n'a fait que 7. extractions ou doublant encore une fois, fi l'on a fait 8. extractions, et encore une fois fi l'on en a fait 9 [7]).

Regiftres, T. I [8]), p. 246. le 26 Octobre 1667 ... Mr. Auzout prendra la peine de difpofer le trauail de Meffieurs Auoye [9]), Richer, et Niquet pour faire des Logarithmes [10]).

[7]) La Pièce du Manuscrit C — voyez la note 1 de la p. 225 — ajoute: Par exemple, pour trouver le logarithme du nombre premier 7859 il faut avoir la 7ᵉ et 8ᵉ racine de ce nombre, qui foient nommees *n*, *o*, *p*, *q*, *r*, *s*, *f*, *g*, et le logarithme que l'on trouvera fera celuy de la racine *o*, qui eft la 7ᵉ en commencant par la derniere *g*. Et doublant ce logarithme on aura celuy de la racine *n*. Et doublant encore ce dernier logarithme on aura celuy du nombre propofè 7859.

[8]) Voyez l'endroit du T. XIX cité dans la note 2 de la p. 225. Le „T. I." est intitulé „Registre de physique 1667 et une partie de 1668". Sur le dos on lit en outre „1666, 1667. 1668".

[9]) Faut-il lire „de la Voye" (voyez sur lui le T. XVIII)? Dans la brochure de 1938 de M. Harcourt Brown „l'Académie de physique de Caen (1666—1675) d'après les lettres d'André de Graindorge" (Caen, Le Tendre) nous trouvons à la p. 21 le passage suivant d'une lettre de Graindorge du 7 mai 1668: „Notre assemblée physique a été différée à aujourd'hui ... A la dernière, où assistèrent Mr. Vogel [c. à. d. Martin Fogel, médecin d'Hambourg] et autres Allemands avec Mr. Avoye, nous éprouvâmes, etc." M. Brown nous écrit ne pas savoir qui était ce Mr. Avoye.

[10]) Il paraît donc qu'à l'Académie on a calculé des logarithmes suivant la méthode de Huygens.

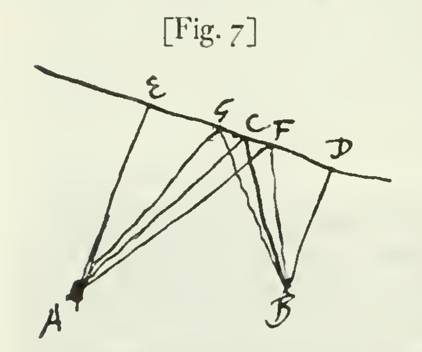
DÉMONSTRATION DE LA RÈGLE DES MAXIMA ET DES MINIMA.

[1667][1].

Fermat eſt le premier homme que je ſache qui ait établi une règle certaine pour déterminer les valeurs naximales et minimales dans les queſtions géométriques. En en recherchant le fondement qu'il n'a pas communiqué, j'ai trouvé en même temps de quelle manière cette règle peut être réduite à une brièveté remarquable, de ſorte qu'elle s'accorde déſormais avec celle donnée plus tard par l'honorable Joh. Hudde comme une partie de ſa règle plus générale et fort élégante qui s'appuie ſur un tout autre principe. Cette dernière a été publiée par Fr. van Schooten dans le recueil qui contient auſſi les livres de Deſcartes ſur la Géométrie. Or, ma méthode d'examiner la règle de Fermat était la ſuivante.

Toutes les fois que dans un problème quelconque il s'agit de déterminer un maximum ou un minimum, il eſt certain qu'il exiſte des valeurs égales de part et d'autre. Par exemple lorſque la droite ED [Fig. 7] eſt donnée en poſition ainſi que les points A et B, et qu'on demande de trouver dans ED un point C tel qu'en tirant CA et CB on obtienne une valeur minimale de $CA^2 + CB^2$, il eſt néceſſaire que de part et d'autre du point C il ſe trouve des points G et F tels que, les droites GA, GB et FA, FB ayant été tirées, on ait $GA^2 + GB^2 = FA^2 + FB^2 > CA^2 + CB^2$.

[Fig. 7]



Pour trouver C de telle manière que $CA^2 + CB^2 =$ minimum, je me figure d'abord que, AE et BD ayant été menées perpendiculairement à ED (je poſe $AE = a$, $BD = b$, $ED = c$), la différence des deux droites EG et EF ſoit égale à une ligne donnée e; et je demande quelle doit être la valeur de EG, que j'appelle x, pour qu'on ait $GA^2 + GB^2 = FA^2 + FB^2$.

II.

DEMONSTRATIO REGULÆ DE MAXIMIS ET MINIMIS.

[1667][1].

Regiſtres, T. II, p. 162. Le 27 Auril [1667]... Mercredy prochain Monsʳ. Hugens continuera ſa Methode de Maximis et minimis.

Regiſtres, T. II, p. 113—123:

Quoties Maximum aut Minimum in problemate aliquo determinandum proponitur, certum eſt utrinque æqualitatis caſum exiſtere: ut ſi data ſit [Fig. 7] poſitione recta ED & puncta A,B, oporteatque invenire in ED punctum C, unde ductis CA, CB, quadrata earum ſimul ſumpta, ſint minima quæ eſſe poſſint; neceſſe eſt ab utraque parte puncti C eſſe puncta G et F a quibus ducendo rectas GA, GB; FA, FB, oriatur ſumma quadratorum GA, GB æqualis ſummæ quadratorum FA, FB, et utraque ſumma major quadratis CA,CB, ſimul ſumptis. Ut igitur inueniam punctum C, unde ductis CA, CB fiat ſumma quadratorum ab ipſis omnium minima, ductis AE, BD, perpendicularibus in ED, quarum AE dicatur a, BD, b, interuallum vero ED, c, ſingo primum GF differentiam duarum EG, EF æqualem datæ lineæ, quæ vocetur e, et quæro quanta futura ſit EG, quam appello x, ut quadrata GA, GB ſimul ſumpta æquentur quadratis FA, FB.

---

[1]) Outre la copie insérée dans les Registres, nous possédons le manuscrit original de Huygens („Chartæ mathematicæ" f. 213—217). Celui-ci est d'ailleurs précédé par le premier projet, portant le même titre, qui occupe les p. 162—168 du Manuscrit C (les p. 152 et 170 de ce Manuscrit portent respectivement les dates du 17 mars et du 12 mai 1667). La Pièce a été publiée en 1693 dans les „Divers Ouvrages de Mathematique et de Physique par Messieurs de l'Academie Royale des Sciences". Sur la première page du manuscrit Huygens a noté au crayon: parler de Hudde. Et en effet dans la publication de 1693 un premier alinéa a été ajouté qui ne se trouve ni dans le manuscrit ni dans les Registres. Ici aussi nous le mettons en tête de notre traduction française de la „Demonstratio". Voici cet alinéa:

Ad inveſtiganda Maxima & Minima in Geometricis quæſtionibus, regulam certam primus, quod ſciam, Fermatius adhibuit: cujus originem ab ipſo non traditam cùm exquirerem, inveni ſimul quo pacto ea ipſa regula ad mirabilem brevitatem perduci poſſet, utque inde eadem illa exiſteret quam poſtea vir ampliſſimus Joh. Huddenius dederat, tanquam partem regulæ ſuæ generalioris atque elegantiſſimæ, quæ ab alio

Puiſque AE = a et EG = x, on aura AG = $a^2 + x^2$. Et puiſque GD = $c - x$ et BD = b, on aura $GB^2 = b^2 + c^2 - 2cx + x^2$, de ſorte que $AG^2 + GB^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2cx + 2x^2$, expreſſion que nous déſignerons par les mots „termes antérieurs". Ceci s'applique également à tout autre problème ſe rapportant à un maximum ou un minimum. D'autre part, lorſqu'on ſubſtitue partout dans l'équation trouvée $x + e$ à x, $(x+e)^2$ à x^2 et ainſi de ſuite s'il s'y trouve quelque puiſſance plus élevée de x, il eſt certain qu'on obtiendra la ſomme $FA^2 + FB^2$. Celle-ci ſera donc

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2cx - 2ce + 2x^2 + 4ex + 2ee.$$

Cette expreſſion ſera appelée „termes poſtérieurs". Il faut l'égaler à $AG^2 + GB^2$. Nous aurons donc l'équation $a^2 + b^2 + c^2 - 2cx + 2x^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2cx - 2ce + 2x^2 + 4ex + 2ee$, d'où ſortira la valeur EG ou x, GF ou e déſignant une ligne de longueur donnée.

Or, en prenant e infiniment petite la même équation donnera la valeur de EG lorſqu'elle eſt égale à EF. De cette façon nous aurons déterminé le point cherché C pour lequel $CA^2 + CB^2$ = minimum. Après avoir ôté d'abord les fractions s'il y en a (mais dans l'exemple conſidéré il n'y en a point), il faut ſupprimer de part et d'autre les termes égaux, leſquels ſont néceſſairement tous ceux qui ne contiennent pas la lettre e: on le comprend aiſément puiſque, comme nous l'avons dit, les termes poſté-

---

prorſus principio pendet. Hæc à Fr. Schotenio edita eſt unà cum Carteſianis de Geometria libris. Fermatianæ autem regulæ examen quod inſtitui eſt hujuſmodi.

Comparez sur les règles de Hudde la note 4 de la p. 233 qui suit.

Nous imprimons ici le texte des Registres. Les très rares différences entre les trois textes que nous possédons sont absolument insignifiantes. Celui de la publication de 1693 a été réimprimé dans les „Opera Varia" de 1724. Comparez la note 7 de la p. 241.

Itaque quia AE ∞ a et AG ∞ x, erit quad. AG ∞ $aa + xx$. Et quia GD ∞ $c - x$ et BD ∞ b, erit quad. GB ∞ $bb + cc - 2cx + xx$, unde quadrata AG, GB simul sumpta fient ∞ $aa + bb + cc - 2cx + 2xx$, qui dicantur termini priores; idque similiter in quouis alio problemate intelligendum, ubi maximum aut minimum inquiritur. Rursus autem quia EF ∞ $x + e$, si ubique in summa quadratorum inuenta substituam $x + e$ pro x, et quadratum ab $x + e$ pro xx, atque ita deinceps, si altior potestas ipsius x reperiatur, certum est exorituram summam quadratorum FA, FB quæ quidem erit $aa + bb + cc - 2cx - 2ce + 2xx + 4ex + 2ec$ æquanda summæ quadratorum, AG, GB; dicantur autem hi termini posteriores.

Itaque erit $aa + bb + cc - 2cx + 2xx \infty aa + bb + cc - 2cx - 2ce + 2xx + 4ex + 2ee$ ex qua æquatione prodibit valor EG siue x, quando GF siue e certæ magnitudinis lineam refert.

Ponendo autem e infinite paruam [2]) apparebit ex eadem æquatione quanta futura sit EG cum ipsi EF æqualis est adeoque habebitur determinatio quæsita puncti C unde ductæ CA, CB faciant summam quadratorum minimam, nempe sublatis primum fractionibus (si quæ sint) quæ in hoc exemplo nullæ sunt, deleantur termini qui utrinque ijdem habentur, quales sunt necessario omnes quibus littera e admixta non est, idque

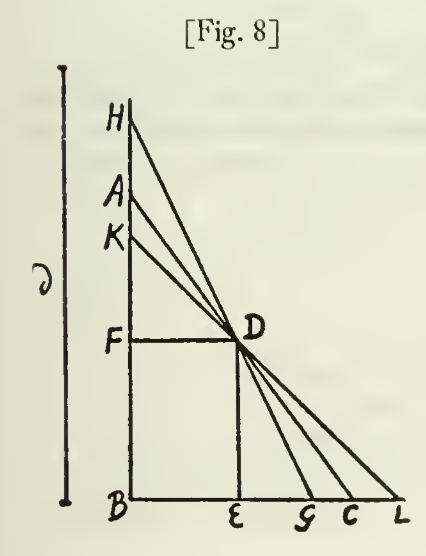
---

[2]) Dans le premier projet du Manuscrit C (voyez la note 1 de la p. 229) Huygens avait écrit: infinite parvam sive nihilo æqualem.

Nous n'indiquons les variantes du premier projet que là où elles ont quelqu'importance. La copie que Huygens en a faite n'est pas tout à fait littérale.

Le premier projet, où il y a beaucoup de ratures, commençait primitivement par la considération d'un autre cas: comparez avec la présente Fig. 8 la Fig. 2 de 1652 à la p. 62 du T. XII, où Huygens traitait la même question. Voici le commencement de ce début biffé:

[Fig. 8]



Certum est cum maximum vel minimum in problemate quopiam determinandum est, utrinque æqualitatis casum existere. Velut, si intra angulum rectum ABC [Fig. 8] dato puncto D, oporteat per illud ducere rectam lineam AC rectis BA, BC terminatam quæ sit omnium brevissima, necesse est utrinque constitui posse rectas HG, KL inter se æquales majoresque ipsa AC.

Ad inveniendum itaque maximum, vel (ut in hoc exemplo) minimum, ita primo instituenda est operatio, tanquam non maximum aut minimum, sed dato æquale quæratur.

Ita hic investigabo quomodo per datum punctum D ducenda sit HG ut datæ lineæ d æquetur.

rieurs ſe tirent des termes antérieurs en ſubſtituant $x + e$ à x dans toutes les puiſſances de cette dernière. Enſuite on diviſe tous les termes par e et on détruit ceux qui, après cette diviſion, contiennent encore cette lettre, puiſqu'ils repréſentent des quantités infiniment petites par rapport à ceux qui ne renferment plus e. C'eſt de ces derniers ſeuls qu'on tire enfin la quantité x ſatisfaiſant au problème propoſé. Telle eſt la méthode de Fermat; en l'abrégeant, j'ai trouvé la méthode ſuivante compoſée de deux parties.

1°. Lorſque les termes dont nous ſuppoſons qu'ils doivent poſſéder un maximum ou un minimum, ne comprennent aucune fraction contenant dans ſon dénominateur la quantité inconnue cherchée, il faut multiplier chaque terme par le nombre des dimenſions que la quantité inconnue a dans ce terme, en négligeant les termes qui ne la contiennent point; et la ſomme de tous ces produits doit être égalée à zéro.

Dans l'exemple propoſé, où les termes antérieurs étaient $a^2 + b^2 + c^2 - 2cx + 2x^2$, ſomme de deux carrés [4bis]) que je veux rendre minimale, il ſuffit donc d'effectuer la multiplication ſuivante

$$\begin{array}{c} a^2 + b^2 + c^2 - 2cx + 2x^2 \\ \hphantom{a^2 + b^2 + c^2 - 2c}1 \hphantom{x + 2}2\hphantom{x^2} \\ \hline \end{array}$$

d'où réſultent les termes dont la ſomme doit être egalée à zéro

$$-2cx + 4x^2 = 0, \text{ et par conſéquent } \tfrac{1}{2}c = x.$$

De même, lorſque les termes antérieurs ſont

$$3ax^3 - bx^3 - \frac{2b^2a^2x}{3c} + a^2b,$$

la multiplication ſera la ſuivante $\quad 3 \quad 3 \quad 1$

d'où réſultent les terme égaux à zéro $9ax^3 - 3bx^3 - \dfrac{2b^2a^2x}{3c} = 0$

$$9ax^2 - 3bx^2 - \frac{2b^2a^2}{3c} = 0.$$

Pour comprendre la raiſon de ce procédé abrégé, il faut remarquer en premier lieu que, puiſque les termes poſtérieurs ſe tirent des termes antérieurs en ſubſtituant partout $x + e$ à x, tous les termes antérieurs ſe retrouvent néceſſairement parmi les

facile eſt intelligere, cum dixerimus poſteriores terminos, ex prioribus deſcribi, ponendo $x + e$ [3]) vel poteſtatem ejus, quoties invenitur x vel poteſtas ejus aliqua in prioribus. Deinde omnes termini per e dividuntur, quibuſque poſt eam diviſionem adhuc unum e aut plura ineſſe inueniuntur, ii delentur, quippe cum quantitates infinite paruas contineant, reſpectu cæterorum terminorum quibus nullum amplius ineſt e. Ex quibus denique ſolis inuenitur quantitas x quæſita in caſu determinationis propoſito; et hæc eſt ratio methodi Fermatianæ, quâ in compendium redactâ, hanc aliam inueni, cuius partes duæ ſunt [4]). nam primo

Quando termini quos Maximum aut Minimum deſignare volumus, nullam fractionem habent, in cuius denominatore quantitas incognita quæſita continetur; multiplicandus eſt terminus quisque per numerum dimenſionum quem in illo habet quantitas incognita, omiſſis terminis ijs in quibus incognita quantitas non reperitur; omniaque producta illa æquanda nihilo.

Ita in exemplo propoſito ubi termini priores inuenti ſunt $aa + bb + cc - 2cx + 2xx$, ſummam quadratorum duorum [4bis]) continentes, quam volo eſſe minimam, tantummodo iſtius modi conſtituenda erit multiplicatio

$$aa + bb + cc \underset{1}{- 2cx} + \underset{2}{2xx}$$

Ex qua orientur termini æquandi nihilo $\quad -2cx + 4xx \infty 0$

Unde ſit $\quad \frac{1}{2}c \infty x$.

Ita quoque ſi priores termini ſint $3ax^3 - bx^3 - \frac{2bba^2x}{3c} + aab$

multiplicatio erit ejuſmodi

$$\underset{3}{9ax^3} - \underset{3}{3bx^3} - \underset{1}{\frac{2bba^2x}{3c}} \infty 0$$

Unde termini æquandi nihilo

$$9axx - 3bxx - \frac{2bba^2}{3c} \infty 0.$$

Hujus compendii ratio ut intelligatur, ſciendum primò, quoniam termini poſteriores ex prioribus deſcribuntur, ponendo tantum ubique $x + e$ pro x, neceſſario omnes

---

[3]) Ici les mots „in poſterioribus" du premier projet — qui d'ailleurs seraient mieux placés après les trois mots suivants du texte — ont été omis, peut-être par mégarde, dans la copie de Huygens.

[4]) Dans le premier projet du Manuscrit C Huygens avait écrit après le mot „redactâ": eædem duæ regulæ oriuntur quas Huddenius habet, in epiſtola 2[da] ad Schotenium, quaſque antequam illa ederetur pridem inveneram demonſtrataſque dederam D. de Wit. Sunt autem regulæ iſtæ. . . . Etc.

Dans sa copie Huygens a changé l'ordre de ce qui suivait dans le Manuscrit C en donnant *d'abord* l'application de la règle (pars prima) dans le cas de l'exemple proposé et seulement *ensuite* la „compendii ratio".

[4bis]) Savoir les carrés des droites AG et GB [Fig. 7].

termes poſtérieurs, de ſorte qu'il eſt inutile de les écrire attendu qu'il ſaudrait immédiatement les ſupprimer, et que par conſéquent il ſuffit d'écrire ceux qui contiennent e une ou pluſieurs fois, comme dans le cas de notre exemple $-2ce + 4ex + 5e^2$, et d'égaler leur ſomme à zéro. Mais il appert en outre que les termes contenant e plus d'une ſeule fois ſeront eux auſſi écrits inutilement, puiſqu'il a été établi qu'après la diviſion par e ils devront être ſupprimés, comme nous l'avons dit un peu plus haut. Il faut donc dès le début écrire comme termes poſtérieurs ceux-là ſeulement qui contiennent e une ſeule fois.

Or, ces termes-là ſe déduiſent facilement des termes antérieurs puiſqu'il paraît que ce ſont les deuxièmes termes des puiſſances de $x + e$, tous les autres termes de ces puiſſances contenant e ou plus d'une fois ou pas du tout. De ſorte que partout où l'on trouve x dans les termes antérieurs il faut écrire $x + e$ [5]) dans les termes poſtérieurs, et où il y a x^2 dans les antérieurs, $2ex$ dans les poſtérieurs; où il ya x^3, $3ex^2$, etc. Mais leſdits deuxièmes termes de chaque puiſſance de $x + e$ ſe tirent facilement de la puiſſance correſpondante de x: il ſuffit de changer une lettre x en e et de mettre devant chaque terme le nombre des dimenſions de x, de ſorte que x^2 ou xx devient $2ex$ et x^3 ſe change en $3ex^2$ etc. Par conſéquent on tire aiſément les termes poſtérieurs dont nous avons dit que la ſomme doit être égalée à zéro des termes antérieurs contenant x (les ſeuls qu'il faille conſidérer, comme nous l'avons fait voir) en multipliant chacun d'eux par le nombre des dimenſions de x. Car il n'eſt pas même néceſſaire de changer une lettre x en e puiſqu'il revient au même de diviſer enſuite par e ou par x. Par ces conſidérations la raiſon de la méthode abrégée de la première partie de la règle eſt devenue évidente. Paſſons maintenant à la deuxième qui eſt la ſuivante[6]).

2°. Lorſque les termes dont nous voulons établir la valeur maximale ou minimale comprennent des fractions, dans le dénominateur deſquelles ſe trouve la quantité inconnue, il faut d'abord ſupprimer les quantités connues, s'il y en a; enſuite, ſi les autres quantités n'ont pas le même dénominateur, il faut les y réduire. Après cela il faut multiplier chacun des termes qui conſtituent le numérateur de la fraction par chaque terme du dénominateur et multiplier chaque produit ainſi obtenu par la différence des dimenſions de la quantité inconnue telle qu'elle ſe trouve reſpectivement dans le terme du numérateur et dans celui du dénominateur, en donnant à chaque produit le ſigne exigé par la règle de la multiplication lorſque le nombre des dimenſions de la quantité inconnue dans le terme du numérateur ſurpaſſe celui du terme du dénominateur, et le ſigne contraire lorſqu'il en eſt autrement; enfin il faut égaler à zéro la ſomme de tous les termes obtenus.

terminos priores etiam in pofterioribus reperiri, ideoque illos nihil opus effe defcribi cum utrobique mox delendi forent, atque adeò illos tantum fcribendos in quibus unum e vel plura infunt, ut in exemplo noftro $- 2ce + 4ex + 2ee$, eofque æquandos nihilo. Sed etiam illos quibus plura quam unum e inerunt, fcribi frustra apparet, cum divifione facta per e delendos poftea conftet, ut paulo ante diximus. Itaque nulli præterea ab initio defcribendi inter terminos pofteriores, quam quibus inerit e fimplex.

Hi autem termini ex terminis prioribus facile deducuntur cum conftet, nihil aliud effe quam fecundos terminos poteftatum ab $x + e$ quia cæteri omnes plura quam unum e, vel nullum habent. Adeo ut ubicumque in prioribus terminis habetur x fcribendum fit in pofterioribus $x + e$ [5]) et ubi habetur xx in prioribus, ponendum $2ex$ in pofterioribus, et ubi x^3 in prioribus, in pofterioribus $3exx$ atque ita deinceps. Dicti autem termini fecundi cujufque poteftatis $x + e$ ex ipfa poteftate x facile defcribuntur, mutando unum x in e, et præponendo numerum dimenfionum ipfius x; ita enim ab xx fit $2ex$ et ab x^3, $3exx$, atque in cæteris pari modo. Itaque ex terminis prioribus in quibus x, quos folos confiderandos effe patuit, facile etiam termini pofteriores ii quos nihilo adaequandos diximus, defcribuntur, multiplicando tantum fingulos in numerum dimenfionum quas in ipfis habet x. Nam mutare unum x in e ne quidum opus eft, cum eodem redeat, fiue omnes poftea per e aut per x dividantur. Ex his quidem aperta eft ratio compendii ad primam partem regulæ pertinentis. nunc ad aliam veniamus quæ eft eiufmodi [6]).

Si terminis quos Maximum aut Minimum defignare volumus fractiones habeant, in quarum denominatore occurrat quantitas incognita, delendæ primum funt quantitates cognitæ, fi quæ adfint; deinde fi reliquæ quantitates non habeant eundem denominatorem, eo reducendæ funt. Tum termini finguli numeratorem fractionis conftituentes ducendi in terminos fingulos denominatoris, productaque fingula multipla fumenda fecundum numerum quo dimenfiones quantitatis incognitæ in termino numeratoris differunt a dimenfionibus ejusdem incognitæ quantitatis in termino denominatoris. Signa autem affectionis productis fingulis præponenda qualia lex multiplicationis exigit, quoties dimenfiones quantitatis incognitæ plures funt in termino numeratoris, quam in termino denominatoris, at quoties contra evenit contraria quoque figna productis præponenda, quæ denique omnia æquanda nihilo.

---

[5]) Il faut lire e au lieu de $x + e$. L'erreur se trouve tant dans le premier projet que dans le manufcrit et les publications de 1693 et de 1724.

[6]) Contrairement à l'interversion dont il est question dans la note 4 de la p. 233, Huygens commence, dans le cas de la „pars alia" de la règle, par exposer la théorie, et l'applique ensuite à un exemple; tandis que dans le premier projet il commençait par l'exemple. Il est évident que ceci a amené ici aussi de grands changements dans le texte.

Suppofons par exemple qu'on ait trouvé comme termes antérieurs que nous voulons faire acquérir une valeur maximale les fuivants

$$\frac{bx^3 - c^2x^2 - 2bc^2x}{bc^2 + x^3},$$

où il n'y a pas de quantité connue. Suivant la règle je multiplie tous les termes du numérateur d'abord par bc^2, et du premier produit obtenu, celui de bx^3 par bc^2, je prends le triple parce que bx^3 a trois dimenfions de la quantité inconnue x tandis que bc^2 n'en a aucune; du deuxième produit, celui de $-c^2x^2$ par bc^2, j'écris le double puifque dans $-c^2x^2$ il y a deux dimenfions de x et aucune dans bc^2; quant au troifième produit, celui de $-2bc^2x$ par bc^2, je l'écris fimplement puisque dans $-2bc^2x$ et bc^2 la différence des dimenfions de x eft l'unité. Et je donne à ces trois produits leurs vrais fignes puifque les dimenfions de x dans les termes du numérateur furpaffent celles du terme bc^2 qui font nulles. De forte que ces trois produits font

$$3b^2c^2x^3 - 2bc^4x^2 - 2b^2c^4x.$$

Enfuite je multiplie tous les mêmes termes du numérateur par x^3, fecond terme du dénominateur. Or, je néglige le premier produit, celui de bx^3 par x^3, en d'autres termes je le multiplie par zéro, parce que les dimenfions de x font les mêmes de part et d'autre et que leur différence eft donc nulle. Quant au deuxième produit de $-c^2x^2$ par x^3, je l'écris fimplement parce que pour ces termes-là la différence des dimenfions de x eft l'unité; et j'écris doublement le troifième produit, celui de $-2bc^2x$ par x^3, puifque la différence des dimenfions de x y eft 2. Je donne à ces deux derniers produits des fignes contraires à ceux qu'exigerait la loi de la multiplication parce que dans les deux cas les dimenfions de x font moindres dans les termes du numérateur que celles de x^3, terme du dénominateur.

Les deux produits feront donc $+c^2x^5 + 4bc^2x^4$. En les ajoutant aux trois précédents $+3b^2c^2x^3 - 2bc^4x^2 - 2b^2c^4x$ on obtient la fomme qu'il faut égaler à zéro:

$$c^2x^5 + 4bc^2x^4 + 3b^2c^2x^3 - 2bc^4x^2 - 2b^2c^4x = 0.$$

Divifant cette équation par $c^2bx + c^2x^2$ on trouve $x^3 + 3bx^2 - 2bc^2 = 0$.

Ici auffi nous expliquerons à l'aide d'un feul exemple comment la règle a été obtenue: on comprendra qu'il en eft de même dans tous les autres cas. Confidérons donc les termes antérieurs propofés tantôt, favoir $\frac{bx^3 - c^2x^2 - 2bc^2x}{bc^2 + x^3}$. Si j'en veux tirer, comme cela a été fait précédemment, en fubftituant $x + e$ à x, d'autres termes auxquels je pourrai les comparer, je conftate d'abord que parmi les termes poftérieurs l'on peut négliger ceux qui contiennent plus d'une feule lettre e parce qu'il en réfultera toujours des quantités contenant elles auffi plus d'une feule e et devant par conféquent être finalement fupprimées pour la raifon expofée plus haut. L'égalité des termes antérieurs et poftérieurs fera donc exprimée par l'équation fuivante:

$$\frac{bx^3 - c^2x^2 - 2bc^2x}{bc^2 + x^3} = \frac{bx^3 - c^2x^2 - 2bc^2x + 3bex^2 - 2c^2ex - 2bc^2e}{bc^2 + 3ex^2 + x^3}.$$

Sint exempli gratia inventi termini priores quos maximum defignare velimus ifti $\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3}$ ubi nulla eft quantitas cognita. Hic ergo fecundum regulam multiplico terminos omnes numeratoris primum per bcc, priorifque producti ex bx^3 in bcc fcribo triplum, quia bx^3 habet tres dimenfiones quantitatis incognitæ x, bcc vero nullam, fecundi producti ex $-ccxx$ in bcc, fcribo duplum, propterea quod in $-ccxx$ duae funt dimenfiones x et in bcc nullæ; tertium vero productum ex $-2bccx$ in bcc, fcribo fimplex quia in $-2bccx$ et bcc differentia dimenfionum x eft unitas. Tribus autem hifce productis vera figna affectionis adfcribo, quoniam dimenfiones x in terminis numeratoris excedunt eas quæ in termino bcc, quippe quæ nullæ funt, ita ut tria hæc producta fint

$$3bbccx^3 - 2bc^4xx - 2bbc^4x.$$

Iam porro terminos omnes eofdem numeratoris duco in x^3 terminum alterum denominatoris primumque productum ex bx^3 in x^3 fcribere omitto, fiue per o multiplico, quoniam eædem dimenfiones utrobique funt ipfius x, ideoque differentia nulla. Secundum autem productum ex $-ccxx$ in x^3 fcribo fimplex, quia in his terminis differentia dimenfionum x eft unitas; at tertium productum ex $-2bccx$ in x^3 fcribo duplum quia differentia dimenfionum x in his eft 2. Signa vero affectionis productis hifce duobus adfcribo contraria ijs quæ requireret lex multiplicationis, eo quod dimenfiones x pauciores funt utrobique in terminis numeratoris quam in x^3 termino denominatoris.

Itaque producta bina erunt hæc $+ccx^5 + 4bccx^4$. quæ addita tribus præcedentibus $+ 3bbccx^3 - 2bc^4xx - 2bbc^4x$ faciunt fummam æquandam nihilo

$$ccx^5 + 4bccx^4 + 3bbccx^3 - 2bc^4xx - 2bbc^4x \infty 0$$

qua æquatione divifa per $ccbx + ccxx$ fit $x^3 + 3bxx - 2bcc \infty 0$.

Quomodo autem ad hæc perventum fit, uno exemplo rurfus explicabimus, ex quo eandem in omnibus cæteris rationem effe intelligetur. Videamus igitur priores terminos quos modo propofueram, nempe $\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3}$ ex quibus fi alios quibuscum eos comparem, ut initio factum eft, defcribere velim, ponendo ubique $x + e$ ubi eft x, video quidem primo omnes illos in pofterioribus terminis poffe negligi in quibus plura quam unum e inerit, quia femper ex ijs quantitates orientur, in quibus plura uno e inerunt, quæque proinde delendæ tandem erunt, ob caufam in fuperioribus traditam. Itaque erunt termini priores æquandi pofterioribus

$$\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3} \infty \frac{bx^3 - ccxx - 2bccx + 3bexx - 2ccex - 2bcce}{bcc + 3exx + x^3}$$

qui nempe ex prioribus hac lege defcripti funt, ut ubicunque eft x vel poteftas eius in prioribus ibi ponatur $x + e$, vel poteftatis $x + e$ duo priores termini; quoniam fcimus in cæteris plura quam unum e contineri.

Les termes poſtérieurs y ſont tirés des termes antérieurs en ſubſtituant partout à x ou ſes puiſſances $x+e$ ou les deux premiers termes des puiſſances de $x+e$, puiſque nous ſavons que dans les termes ultérieurs il y a plus d'une ſeule lettre e.

Or, comme les termes ſans e dans les numérateurs des termes antérieurs et poſtérieurs ſont abſolument les mêmes, il appert que de part et d'autre les multiplications des termes ſans e des dénominateurs avec les termes ſans e des numérateurs peuvent être omiſes, parce qu'il en réſulterait de part et d'autre des quantités égales qui ſe détruiraient. C'eſt pourquoi il ſuffiſait d'écrire dès le commencement comme termes poſtérieurs ceux-là ſeulement qui contiennent une ſeule lettre e en négligeant tous les autres; de ſorte que l'équation devient

$$\frac{bx^3 - c^2x^2 - 2bc^2x}{bc^2 + x^3} = \frac{3bex^2 - 2c^2ex - 2bc^2e}{3ex^2}.$$

Maintenant il faudrait donc faire les multiplications croiſées pour ſe débarraſſer des fractions. Mais en examinant avec quelqu'attention quels ſeront les réſultats de ces multiplications, nous trouverons encore un nouvel abrègement: nous découvrirons qu'il n'eſt point du tout néceſſaire d'écrire les termes poſtérieurs. En effet, comme ils découlent des termes antérieurs par le changement d'une lettre x en e et l'addition d'un facteur égal au nombre des dimenſions de x, il n'eſt pas difficile de conclure des termes antérieurs ſeulement quels ſeront tous ces produits.

Par exemple la préſence de $-c^2x^2$ dans les termes antérieurs donnant lieu à celle de $-2c^2ex$ dans les termes poſtérieurs, et celle de x^3 dans le premier dénominateur à celle de $4ex^2$ dans le ſecond, on voit aiſément que les deux produits, celui de $-c^2x^2$ par $3ex^2$, et celui de $-2c^2ex$ par x^3, qui ſont $-3c^2ex^4$ et $-2c^2ex^4$, ſeront compoſés des mêmes lettres, mais que les facteurs 3 et 2 ſeront différents, et que cette dernière différence réſulte du fait que x dans le terme c^2x^2 a une dimenſion de moins que dans le terme x^3. Supprimant enſuite $-2c^2ex^4$ dans les deux membres de l'équation, il appert qu'il reſtera $-c^2ex^4$ du côté des termes antérieurs. C'eſt ce qu'on peut donc obtenir de ſuite en multipliant ſimplement dans les termes antérieurs le $-c^2x^2$ du numérateur avec le x^3 du dénominateur, en changeant dans le produit une lettre x en e, et en écrivant le produit ſimplement puiſque dans ces deux termes la différence des dimenſions de x eſt l'unité.

De la même manière les produits de $-2bc^2x$ par $3ex^2$ et de $-2bc^2e$ par x^3, leſquels ont les mêmes lettres, étant $-6bc^2ex^3$ et $-2bc^2ex^3$, auront des facteurs numériques différents parce que dans $-2bc^2x$ il n'y a qu'une ſeule dimenſion de x, tandis qu'il y en a trois dans x^3; ſouſtrayant $-2bc^2ex^3$ de part et d'autre de l'équation, je conſtate qu'il reſte $-4bc^2ex^3$ du côté des termes antérieurs, ce qui pouvait de nouveau être aperçu dès le début puiſque la même quantité provient de la multiplication du terme $-2bc^2x$ du premier numérateur par le terme x^3 du dénominateur lorſque dans le produit on remplace une lettre x par e et qu'on y ajoute le facteur 2 qui exprime la différence des dimenſions de x dans les termes $-2bc^2x$ et x^3.

Mais comme dans les termes bx^3 et x^3 la dimenſion de x eſt la même, il s'enſuit que

Iam vero porro quia termini in quibus nullum e in numeratore ac denominatore priorum ac posteriorum terminorum ijdem plane reperiuntur, patet multiplicationes alternas eorum terminorum denominatoris in terminos numeratoris partis alterius e carentes omitti posse, cum quantitates inde ortæ, eædem utrinque essent futuræ, ideoque delendæ. Quare in terminis posterioribus tantum ij ab initio scribendi erant, in quibus unum e, omissis omnibus reliquis; ut æquatio hic futura sit ista

$$\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3} \propto \frac{3bexx - 2ccex - 2bcce}{3exx}.$$

Hic jam multiplicationes alternæ per denominatores instituendæ essent ad tollendas fractiones, verum examinando diligentius quænam futura sint earum multiplicationum producta, aliud adhuc compendium inueniemus, et nec scribendos quidem omnino esse terminos posteriores; quia enim describuntur ex prioribus mutato x in e, præpositoque numero dimensionum ipsius x, non difficile est colligere ex solis terminis prioribus quænam futura sint omnia ista producta.

Ita quoniam propter $-ccxx$ in prioribus habetur $-2ccex$ in posterioribus, et propter x^3 in denominatore priorum, in posteriorum denominatore est $3exx$, facile perspicitur utraque producta ex $-ccxx$ in $3exx$ et ex $-2ccex$ in x^3 quæ sunt $-3ccex^4$ et $-2ccex^4$, easdem literas habitura, sed diversos numeros præpositos 3 & 2; idque inde fieri quod in termino $ccxx$ unam dimensionem minus habeat x quam in termino x^3. Itaque et auferendo postea ex utraque parte æquationis $-2ccex^4$, apparet superfuturum $-ccex^4$ a parte terminorum priorum. Quare ab initio hoc sciri potest, multiplicando tantum in terminis prioribus $-ccxx$ numeratoris in x^3 denominatoris, unumque x in e mutando, ac productum simplex scribendo quia differentia dimensionum x in istis duobus terminis est unitas.

Eadem ratione producta ex $-2bccx$ in $3exx$ et ex $-2bcce$ in x^3 quæ easdem litteras habent, sunt enim $-6bccex^3$ et $-2bccex^3$, habebunt numeros præpositos diversos, propterea quod in $-2bccx$ una tantum est dimensio x, at in x^3 tres, unde ablato ex utraque parte æquationis $-2bccex^3$, scio superfuturum a parte terminorum priorum $-4bccex^3$, quod rursus ab initio cognosci potuit quia eadem quantitas oritur multiplicando $-2bccx$ numeratoris terminorum priorum in x^3 denominatoris, mutandoque unum x in e et productum multiplicando per 2 quæ est differentia dimensionum x in terminis $-2bccx$ et x^3.

At quoniam in bx^3 et in x^3 eadem est dimensio x, sequetur producta ex bx^3 in $3exx$ et ex $3bexx$ in x^3 tum literas easdem, tum eosdem numeros præpositos habitura, ideoque sese mutuo sublatura, ut proinde multiplicatio illa possit omitti.

Atque eiusmodi animadversionibus inuentum quod in regula præcipitur, terminos singulos numeratoris in singulos denominatoris terminos esse ducendos, productaque quælibet multipla sumenda secundum differentiam dimensionum quantitatis incognitæ, in terminis binis, qui in se mutuo ducuntur. Nam quod non præcipitur unum x in e mutandum, id hanc rationem habet, quod non referat utrum postea per e an per x termini dividantur.

les produits de bx^3 par $3ex^2$ et de $3bex^2$ par x^3 auront non seulement les mêmes lettres, mais aussi les mêmes facteurs numériques et que par conséquent ils se détruiront, de sorte que cette multiplication peut être omise.

C'est par des remarques de cette sorte qu'a été trouvé ce qui est prescrit dans la règle, savoir que les différents termes du numérateur doivent être multipliés par ceux du dénominateur, et que chaque produit doit être multiplié par un facteur résultant de la différence des dimensions de l'inconnue dans les deux termes qui forment le produit. Il n'y est pas dit qu'il faut changer une lettre x en e; en effet, il n'importe que la division qui doit suivre soit faite par e ou bien par x.

Quant au précepte suivant lequel il faut donner à chaque produit le vrai signe toutes les fois que les dimensions de x dans le numérateur sont supérieures en quantité à celles de x dans le dénominateur, ceci aussi pourra être compris d'après ce que nous avons dit; et par conséquent aussi qu'il faut donner les signes contraires lorsque le contraire est vrai pour les nombres des dimensions. Ici par exemple le produit de bx^3 par bc^2 doit être écrit avec le signe — et le facteur 3, de sorte qu'il vient $-3b^2c^2x^3$; en effet, à cause de bx^3 nous savons que nous aurons $3bcx^2$ dans les termes postérieurs, ce qui multiplié par bc^2 fera $+3b^2c^2ex^2$, mais transporté dans la partie antérieure de l'équation, ceci deviendra $-3b^2c^2ex^2$, ou bien, si l'on ne change pas x en e, $-3b^2c^2x^3$ [8]).

Enfin, l'exemple suivant fera voir que la règle enseigne à bon droit que toutes les fois qu'il y a des termes connus parmi les termes antérieurs avant leur réduction à un dénominateur commun, il faut commencer par les supprimer [9]). Supposons qu'on ait trouvé les termes antérieurs suivants devant avoir une valeur maximale ou minimale

$$\frac{x^3}{2a-x} - 2vx + x^2 + v^2,$$

où v^2 désigne une quantité connue. Pour qu'il apparaisse que v^2 doit être supprimé, voyons ce qui se passera si l'on ne supprime point ce terme, auquel cas, pour le réduire au dénominateur commun, il faudra le multiplier par $2a-x$, de sorte qu'il viendra $\frac{2av^2-xv^2}{2a-x}$ dans les termes antérieurs. Pour lesquels il faudra, suivant l'explication donnée plus haut, écrire dans les termes postérieurs $\frac{-ev^2}{-e}$; par conséquent dans la multiplication croisée il faudra multiplier $2a-x$ par $-ev^2$ d'un côté, et de l'autre $-e$ par $2av^2-xv^2$; or, les mêmes termes résulteront nécessairement des deux multiplications, puisque des deux côtés on multiplie continuellement les mêmes facteurs $2a-x$, $-e$, et v^2. Ces termes se détruiraient donc et seraient par conséquent écrits inutilement: il en résulte qu'on peut en toute sécurité supprimer directement la quantité v^2. Et, en examinant diligemment la chose, on apercevra clairement qu'il doit en être de même dans tous les autres cas.

Quod vero ſigna [7]) affectionis vera productis ſingulis præponenda dicuntur quoties dimenſiones x plures ſunt in numeratore quam in denominatore; id quoque ex jam dictis intelligetur; uti conſequenter etiam hoc, quod contraria ſigna ſunt apponenda quoties dimenſionum numerus contra ſe habet. Velut hic productum ex bx^3 in bcc ſcribendum eſt cum ſigno — propoſito numero 3 ut fiat $-3bbccx^3$ [8]), quia nempe propter bx^3 ſcimus in poſterioribus terminis fore $3bcxx$, quod ductum in bcc faciet $+3bbccexx$ ſed tranſlatum in partem priorem æquationis fiet $-3bbccexx$, ſive, non mutato x in e, $-3bbccx^3$ [8]).

Quod denique in Regula habetur, quoties in prioribus terminis priuſquam ad eundem denominatorem reducantur, quantitates cognitæ occurrunt, eas primum omnium delendas; id ex ſequenti exemplo intelligetur recte præcipi [9]). Sint enim reperti termini priores, quos maximum aut minimum deſignare oporteat, iſti $\frac{x^3}{2a-x}-2vx+xx+vv$, ubi vv quantitatem cognitam ſignificet. Id igitur delendum eſſe ut appareat, videamus quid futurum ſit, ſi non deleatur, nempe ut ad eundem denominatorem cum cæteris omnibus reducatur, ducendum vv in $2a-x$, fietque inde $\frac{2avv-xvv}{2a-x}$ in terminis prioribus. Propter quos in terminis poſterioribus, ſecundum ſuperius explicata, ſcribetur $\frac{-evv}{-e}$ adeoque multiplicatione, alternatim utrinque per denominatores inſtituta, ducendum erit hinc $2a-x$ in $-evv$, inde $-e$ in $2avv-xvv$, ex quibus multiplicationibus eoſdem utrinque terminos oriri neceſſe eſt, cum utrobique eadem haec tria in ſe mutuo ducantur $2a-x$ in $-e$ in vv, qui proinde termini ſeſe mutuo ſublaturi eſſent, eoque fruſtra ſcriberentur; ac proinde liquet tuto deleri poſſe ab initio quantitatem vv. Idemque quod in hoc exemplo accidit, neceſſario quoque in quibuslibet alijs contingere diligenter intuenti manifeſtum erit.

---

7) La publication de 1693 (voyez le note 1 de la p. 229) a par erreur: „Quod vero si signa ...“ La même faute d'impression se trouve dans les „Opera Varia“ où, comme nous l'avons dit plusieurs fois (voyez p.e. la p. II du T. I), il n'est tenu aucun compte des manuscrits (ni, ajoutons-nous, des Registres de l'Académie).

8) Suivant la règle générale de la page 235 qui suppose qu'on égale à zéro la somme de tous les termes trouvés, il faudrait au contraire écrire $+3bbcx^3$, les „dimensiones x in numeratore“ etant „plures ... quam in denominatore“, et le „signum verum“ (première ligne du présent alinéa) étant +. Mais dans le présent alinéa Huygens suppose tacitement qu'une partie des termes soit égalée à une autre partie.

Il semble avoir remarqué plus tard cette incongruité puisque dans le premier projet il a corrigé le mot „plures“ du présent alinéa en „pauciores“; mais en adoptant cette leçon il faudrait aussi changer le texte de la règle de la page 235.

9) N'eût-il pas été plus simple d'établir directement à l'aide d'une figure que lorsque la fonction considérée de x, pour employer ce terme, a une valeur maximale ou minimale, il en est nécessairement de même pour une autre fonction dont la différence avec la première est constante?

RÈGLE POUR TROUVER LES TANGENTES DES LIGNES COURBES.

1667.

Le même Fermat cherchait les tangentes aux lignes courbes par une règle à lui, dont Descartes soupçonnait qu'il ne comprenait pas suffisamment lui-même les fondements, comme cela appert par les lettres de Descartes sur ce sujet. Il est vrai que dans les oeuvres posthumes de Fermat l'application de la règle n'est pas bien exposée et que toute démonstration y fait défaut. Or, je trouve que dans les lettres mentionnées Descartes montre avoir plus ou moins compris la raison de cette règle, mais qu'il ne l'explique pourtant pas aussi clairement que cela sera fait dans ce que nous proposerons ici; il s'agit d'ailleurs ici d'un écrit que nous avons composé longtemps avant que les lettres de Descartes aient été rendues publiques.

En ce temps abréger la règle de Fermat était pour moi une chose importante. L'ayant rendue aussi brève que je pouvais, je constatai qu'elle devient identique avec les belles règles de Hudde et de Sluse dont ces deux messieurs m'avaient fait part presque simultanément. J'ignore encore s'ils y sont parvenus de la même manière que moi ou bien d'une autre.

III.

REGULA AD INVENIENDAS TANGENTES LINEARUM CURVARUM.

1667 [1].

Regiſtres, T. II, p. 161: Ce 13 d'Auril [1667] Mr. Hugens a preſenté a la Compagnie une regle pour trouuer les tangentes des lignes courbes.

La Pièce elle-même occupe, avec la Pièce IV qui ſuit, les p. 123—142 du T. II des Regiſtres.

Nous obſervons — voyez le premier alinéa qui ſuit, ou bien le premier alinéa de la p. — qu'il n'eſt nullement beſoin de ſuppoſer que l'angle des coördonnées (ou, ſi l'on veut, celui des axes) ſoit un angle *droit*.

Sit data linea curua ut BC [Fig. 9] quæ relationem habeat [2]) ad rectam aliquam poſitione datam AF, ac proinde applicata è puncto qualibet curuæ, ut B, recta BF in dato angulo BFA; datoque in recta puncto A; certa æquatione relatio quæ eſt inter AF et FB expreſſa habeatur. Exempli gratia appellando AF, x, FB, y, ſit æquatio $x^3 \infty xya - y^3$ ubi a lineam quandam ſignificare cenſenda eſt.

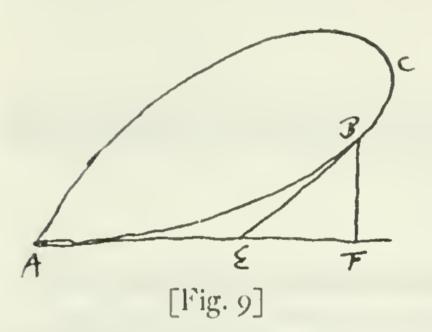
---

[1]) De même que dans le cas de la Pièce précédente (note 1 de la p. 225) nous imprimons ici le texte des Registres, quoique nous possédions également le manuscrit original de Huygens lequel porte la date 13 Apr. 1667 („Chartæ mathematicæ", f. 121—124). Comme la Pièce précédente la présente Pièce aussi a été publiée en 1693 à Paris dans les „Divers Ouvrages". Sur la première page du manuscrit Huygens a noté au crayon: parler de Fermat, de Hudde et Sluſius. Et en effet, dans la publication de 1693 — et par conséquent aussi dans les „Opera Varia" de 1724 — on trouve au début les deux alinéas suivants (que nous mettons en tête de notre traduction française):

Idem Fermatius linearum curvarum Tangentes regulâ ſibi peculiari inquirebat, quam Carteſius ſuspicabatur non ſatis ipſum intelligere quo fundamento niteretur, ut ex epiſtolis ejus hac de re apparet. Sanè in Fermatii operibus poſt mortem editis, nec bene expoſitus eſt regulæ uſus, nec demonſtrationem ullam adjectam habet. Carteſium verô in his quas dixi literis, rationem ejus aliquatenus aſſecutum invenio, nec tamen tam perſpicuè eam explicuiſſe quàm per hæc quæ nunc trademus ſiet, quæ jam olim, multò ante iſtas literas vulgatas conſcripſimus.

Præcipuum verò operæ pretium tunc fuit compendiosa hujuſce regulæ contractio, quam, quoad potui, proſecutus, tandem in ipſas illas inſignes Huddenii, Sluſiique regulas deſinere inveni, quas mihi Viri hi Clariſſimi uterque fere eodem tempore exhibuerant: an vero hac eadem viâ an aliâ in illas inciderint nondum mihi compertum.

Soit donnée une courbe telle que BC [Fig. 9] ayant une relation connue avec une droite AF donnée également en pofition. Par conféquent l'ordonnée partant d'un point quelconque B de la courbe eft la droite BF la quelle rencontre la droite AF fous un angle donné BFA, et un point A dans la droite AF étant donné, la relation entre AF et FB eft exprimée par une certaine équation. Suppofons par exemple, en pofant AF $= x$ et FB $= y$, que ce foit l'équation



[Fig. 9]

$$x^3 = xya - y^3$$

où a défigne une certaine longueur.

S'il faut mener au point B une tangente BE qui rencontre la droite AF en E et qu'on pofe FE $= z$, la longueur de cette dernière d'après cette règle — la règle de Fermat abrégée — fera tirée uniquement de l'équation donnée.

Transportons tous les termes de l'équation donnée dans le premier membre qui devient donc alors égal à zéro. Multiplions d'abord chacun des termes dans lefquels fe trouve y par le nombre des dimenfions que cette lettre a dans le terme confidéré: leur fomme fera notre numérateur. Multiplions enfuite de la même manière chaque terme contenant x par le nombre des dimenfions de cette dernière et divifons chacun de ces termes par x: la fomme obtenue fera notre dénominateur. En formant la fraction de ce dénominateur avec le numérateur trouvé plus haut nous aurons la quantité égale à z ou FE. Quant aux fignes $+$ et $-$, il faut les garder partout comme ils font. Même fi par hafard la quantité du dénominateur ou du numérateur, ou l'une auffi bien que l'autre, eft négative, il faut pourtant les confidérer comme fi elles étaient pofitives, en obfervant feulement que lorfque l'une des deux eft pofitive et l'autre négative, FE doit être prife vers le point A; mais qu'elle doit être prife en fens contraire lorfque les deux quantités font ou bien pofitives ou bien négatives.

Dans le cas de la courbe propofée dont l'équation eft $x^3 + y^3 - axy = 0$ le numérateur deviendra d'après cette règle $3y^3 - axy$ et le dénominateur $3x^2 - ay$. Partant $z = \dfrac{3y^3 - axy}{3xx - ay}$. C'eft une longueur connue, x, y et a étant données.

Confidérons de même une autre courbe ABH [Fig. 10] à équation

$$ax^2 - x^3 - q^2y = 0,$$

a et q étant des lignes données, tandis que AF $= x$ et FB $= y$. Soit BE la tangente et appelons FE z comme auparavant.

Le numérateur deviendra ici $-q^2y$ fuivant la règle. Et le dénominateur $2ax - 3x^2$.

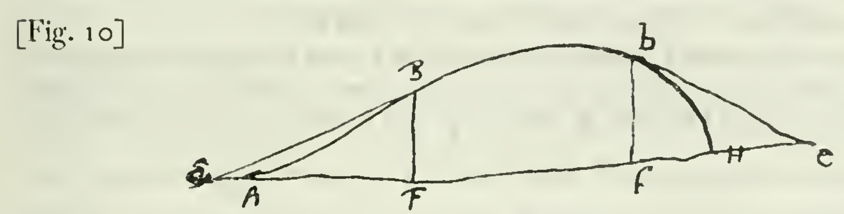
Quod ſi jam ad punctum B tangens ducenda ſit BE, quae occurrat rectæ AF in E voceturque FE, z, ejus longitudo per hanc regulam [3]) inuenietur ex ſola æquatione data.

Tranſlatis omnibus terminis æquationis datæ ad unam æquationis partem, qui proinde æquales ſiunt nihilo [4]); multiplicentur primo termini ſinguli in quibus reperitur y, per numerum dimenſionum quas in ipſis habet y, atque ea erit quantitas dividenda. Deinde ſimiliter termini ſinguli in quibus x, multiplicentur per numerum dimenſionum quas in ipſis habet x, et è ſingulis una x tollatur; atque hæc quantitas pro diviſore erit, ſubſcribenda quantitati dividendæ jam inuentæ, quo facto habebitur quantitas æqualis z ſiue FE. Signa autem + & — eadem ubique retinenda ſunt, atque etiamſi forte quantitas diviſoris, vel dividenda, vel utraque minor nihilo ſiue negata ſit, tamen tanquam adſirmatæ ſunt conſiderandæ: hoc tantum obſervando, ut cum altera adſirmata eſt, altera negata, tunc FE ſumatur verſus punctum A; cum vero utraque vel adſirmata eſt, vel negata, ut tunc ſumatur FE in partem contrariam.

In curua propoſita cuius æquatio $x^3 + y^3 - axy \infty 0$ fiet ſecundum hanc regulam dividenda quantitas $3y^3 - axy$; diviſor vero $3xx - ay$ ideoque $z \infty \frac{3y^3 - axy}{3xx - ay}$ quæ eſt longitudo cognita, cum dentur x, y et a.

Eſto item alia curua ABH [Fig. 10], cujus æquatio $axx - x^3 - qqy \infty 0$ poſito ſcilicet a et q eſſe lineas datas, AF vero ∞x, FB ∞y. Sit BE tangens et FE dicatur

[Fig. 10]



ut ante z. Hic fiet, ſecundum regulam, dividenda quantitas $- qqy$. Diviſor autem

Les différences entre les textes — nous ne mentionnons pas les différences minimes — ne sont pas toutes insignifiantes: Huygens a ajouté quelques bouts de phrases au texte de son manuscrit: voyez les notes ſuivantes.

[2]) Le manuscrit de Huygens a: quæ cognitam relationem habeat; il en eſt de même dans les publications de 1693 et de 1724.

[3]) Le manuscrit de Huygens ajoute en marge: Fermatianæ regulæ compendiarium. On trouve ces mots aussi dans les publications de 1693 et de 1724 (qui écrivent cependant „compendiariam").

[4]) Le manuscrit de Huygens ajoute dans l'interligne: et neglectis ijs in quibus nec x nec y ineſt.

D'où $z = \frac{-q^2y}{2ax - 3x^2}$. Or, comme le numérateur eſt négatif, il faudra, lorſqu'il en eſt de même du dénominateur, c.à.d. lorſque $2a < 3x$, prendre z ou FE du côté oppoſé à celui où ſe trouve A; mais lorſque $2a > 3x$, il faudra prendre FE du côté de A ſuivant le précepte de la règle.

Pour expliquer la raiſon en même temps que l'origine de la règle ſimplifiée par nous, conſidérons de nouveau une courbe BC [Fig. 11] à laquelle on demande de mener une tangente au point B.

[Fig. 11]

Prenons d'abord une droite EBD qui ne touche pas la courbe en B mais qui la coupe tant en ce point qu'en un autre D fort proche de B. Puiſſe cette ſécante rencontrer la droite AG en E, et menons des deux points B, D à la droite AG les deux ordonnées inclinées ſous le même angle BF et DG. Soit AF $= x$ et FB $= y$ comme auparavant. Suppoſons en outre que FG ſoit une longueur donnée e et cherchons FE $= z$.

On a donc EF : FB, c.à.d. $z : y =$ EG (ou $z + e$) : GD, d'où GD $= y + \frac{ey}{z}$.
Il eſt évident que ceci eſt vrai pour une courbe quelconque.

Conſidérons maintenant l'équation exprimant la nature de la courbe; que ce ſoit par exemple celle propoſée plus haut $x^3 + y^3 - xya = 0$, dans laquelle a déſignait une longueur connue (AH). Or, il eſt évident que lorſque le point D eſt ſitué ſur la courbe, les deux longueurs AG et GD, c.à.d. $x + e$ et $y + \frac{ey}{z}$, doivent avoir entr'elles la même relation que AF et FB, c.à.d. x et y. En d'autres termes, lorſque dans l'équation propoſée on ſubſtitue partout $x + e$ à x et $y + \frac{ey}{z}$ à y, l'équation réſultante aura de nouveau zéro dans le ſecond membre. On aura donc

$$x^3 + \boxed{3ex^2} + 3e^2x + e^3 + y^3 + \boxed{\frac{3ey^3}{z}} + \frac{3e^2y^3}{z^2} + \frac{e^3y^3}{z^3} - axy - \boxed{aey} - \boxed{\frac{aeyx}{z}} - \frac{ae^2y}{z} = 0.$$

Il eſt certain que cette équation doit contenir les termes de l'équation précédente qui a ſervi à ſa formation, ſavoir $x^3 + y^3 - axy$. Et comme l'enſemble de ces termes eſt nul d'après la propriété de la courbe, il eſt par conſéquent néceſſaire que, ces termes ayant été ſupprimés, le reſte auſſi ſoit égal à zéro. Or, il eſt manifeſte que dans tous les termes qui ſont reſtés on trouve une ou pluſieurs lettres e, et que par conſéquent ils peuvent tous être diviſés par cette longueur; et je ſais qu'il faut égaler à zéro, en

$2ax - 3xx$, unde $z \infty \frac{-qqy}{2ax - 3xx}$, ubi cum dividenda quantitas ſit negata, ſi fuerit etiam diviſor minor nihilo, hoc eſt ſi $2a$ minor quam $3x$; erit z ſiue FE ſumenda in partem ab A averſam, ſi vero $2a$ major quam $3x$ ſumenda erit FE verſus A ex præcepto regulæ.

Horum vero rationem, ipſiuſque regulæ [5]) originem ut explicemus, proponatur ut ante curua BC [Fig. 11] ad cuius punctum B tangens ducenda ſit.

Intelligatur primum recta EBD, quæ non tangat curuam in B ſed eam ſecet, atque item in alio puncto D, ipſi B proximo. rectæ autem AG occurrat in E et ab utriſque punctis B,D, ducantur ad rectam AG, ijsdem angulis inclinatæ, BF, DG, et ſit AF ∞ x, FB ∞ y ſicut antea; ponatur etiam FG data eſſe quæ ſit e quæraturque FE ∞ z.

Eſt itaque ſicut EF ad FB, hoc eſt ſicut z ad y; ita EG, hoc eſt $z + e$ ad GD quæ erit $y + \frac{ey}{z}$, et hoc quidem in qualibet curua ita ſe habere manifeſtum eſt.

Nunc porro conſideretur æquatio naturam curuæ continens, exempli gratia illa ſuperius propoſita $x^3 + y^3 - xya \infty 0$, ubi a rectam longitudine datam, velut AH ſignificabat. Et patet cum punctum D in curua ponatur debere eodem modo duas AG, GD, hoc eſt $x + e$ et $y + \frac{ey}{z}$ ad ſe mutuo referri atque AF, FB, hoc eſt x et y. Nempe ſi in æquatione propoſita pro x ſubſtituatur ubique $x + e$ et pro y, ubique $y + \frac{ey}{z}$, debebit æquatio hinc formata terminos omnes habere æquales nihilo, hoc eſt

$$x^3 + \boxed{3exx} + 3eex + e^3 + y^3 + \boxed{\frac{3ey^3}{z}} + \frac{3eey^3}{zz} + \frac{e^3y^3}{z^3} - axy - \boxed{aey} - \boxed{\frac{aeyx}{z}} - \frac{aeey}{z} \infty 0.$$

In hac autem æquatione conſtat neceſſario terminos prioris æquationis ex qua formata eſt contineri debere, nempe $x^3 + y^3 - axy$, qui cum ſint æquales nihilo ex proprietate curuæ, idcirco his in æquatione deletis, neceſſe eſt etiam reliquos æquari nihilo. In quibus ſingulis manifeſtum quoque eſt vel unum e vel plura reperiri; ideoque omnes per e dividi poſſe. qui autem post hanc diviſionem non amplius habebunt e, eos, neglectis reliquis, ſcio nihilo æquari debere, quantitatemque lineæ z ſiue FE oſtenſuros; ſi nempe BE tanquam tangens conſideretur, ideoque FG ſeu e infinite parua.

---

[5]) Le Manuscrit de Huygens intercale: et compendii quo reducta eſt. Ces mots ont été reproduits dans les publications de 1693 et 1724.

négligeant les autres, tous ceux qui, après cette division, ne contiendront plus e. L'équation ainsi obtenue donnera la droite z ou FE, bien entendu dans le cas où BE est considérée comme une tangente de sorte que FE ou e est infiniment petite. Car les termes dans lesquels e est restée représenteront alors des quantités infiniment petites ou entièrement évanouissantes.

Jusqu'ici nous avons expliqué l'origine et la raison de la règle de Fermat. Voyons maintenant de quelle manière elle a été amenée à une si grande concision.

Je constate que de la dernière équation écrite plus haut il suffit de conserver les termes qui contiennent e une seule fois. On a donc ici $3ex^2 + \frac{3ey^3}{z} - aey - \frac{aeyx}{z} = 0$. Il s'agit d'expliquer comment ces termes se déduisent avec facilité de ceux de l'équation donnée $x^3 + y^3 - axy = 0$. Il apparaît d'abord que $3ex^2$ et $\frac{3ey^3}{z}$ ne sont rien d'autre que les deuxièmes termes des cubes de $x + e$ et de $y + \frac{ey}{z}$ et qu'ils se trouvent ici parce que dans l'équation donnée il y avait x^3 et y^3. Quant à tous les autres termes de ces cubes, de même que les termes correspondants d'autres puissances quelconques de $x + e$ et de $y + \frac{ey}{z}$, ils contiennent e soit plusieurs fois soit point du tout; comme nous l'avons déjà dit, on les écrirait donc inutilement. Par conséquent, s'il y avait d'autres puissances de x et de y dans l'équation proposée, il faudrait écrire dans la seconde équation seulement les deuxièmes termes des mêmes puissances de $x + e$ et de $y + \frac{ey}{z}$, en remarquant que ces deuxièmes termes se déduisent des puissances données de x et de y d'après une méthode fixe, savoir, pour une puissance quelconque de x, en changeant une lettre x en e et en ajoutant un facteur numérique égal au nombre des dimensions de x. De cette façon on trouve ici $3ex^2$. D'autre part chaque puissance d'y doit être multipliée par $\frac{e}{z}$, le facteur numérique égal au nombre des dimensions y étant de plus ajouté. Ainsi notre terme y^3 donne $\frac{3y^3e}{z}$. La raison ressort immédiatement du mode de formation des puissances.

Il apparaît en outre facilement ce qu'il faut écrire dans la seconde équation à cause de la présence de xy dans le terme $-axy$ de l'équation donnée. En effet, comme il faut substituer à xy le produit de $x + e$ par $y + \frac{ey}{z}$ en écrivant seulement les termes qui contiennent e une seule fois, nous ne multiplions par y que le second des termes x et e, et par x seulement le second des termes y et $\frac{ey}{z}$. Nous obtiendrons ainsi $ey +$

Nam termini in quibus adhuc e ſupereſt etiam quantitates infinite paruas ſiue omnino euaneſcentes continebunt [6].

Video itaque ex æquatione [7] tantum eos terminos ſcribi neceſſe eſſe quibus ineſt e ſimplex, velut hic $3exx + \frac{3ey^3}{z} - aey - \frac{aeyx}{z} \infty 0$, qui termini quomodo facili negotio ex datis æquationis terminis $x^3 + y^3 - axy \infty 0$ deſcribi poſſint deinceps explicandum. Et primo quidem apparet $3exx + \frac{3ey^3}{z}$ nihil aliud eſſe quam ſecundos terminos cuborum ab $x + e$ et ab $y + \frac{ey}{z}$ ideo ſcriptos, quia in æquatione habentur cubi ab x et y, nam reliqui omnes termini cuborum, ut et quarumuis aliarum poteſtatum ab $x + e$ et ab $y + \frac{ey}{z}$, vel plura quam unum e habent, vel nullum; ideoque uti jam diximus fruſtra ſcriberentur. Eadem itaque ratione, ſi aliæ poteſtates ab x vel y eſſent in æquatione propoſitæ [liſez plutôt: propoſit*a* [8]], ſcribendi forent in æquatione altera, termini ſecundi tantum ſimilium poteſtatum ab $x + e$ et ab $y + \frac{ey}{z}$ notandumque ſecundos hoſce terminos ex ipſis datis poteſtatibus ab x et y certa ratione confici, nempe ex poteſtate quauis x, velut x^3, mutando unum x in e et præponendo numerum dimenſionum ipſius x. Ita hic ſit $3exx$. Ex poteſtate y vero ducendo eam in $\frac{e}{z}$ præponendoque ſimiliter numerum dimenſionum ipſius y. Ita hic ab y^3 fit $\frac{3y^3e}{z}$ quorum quidem rationem ex poteſtatum formatione intelligere facillimum.

Porro propter xy in termino æquationis $- axy$, facile quoque apparet quid in æquatione ſecunda ſcribendum ſit. cum enim ſubſtituendum ſit pro xy productum ab $x + e$ in $y + \frac{ey}{z}$, ſed ea tantum ſcribenda in quibus unum e, ideo de duobus $x + e$ tantum e ducemus in y et tantum x in $\frac{ey}{z}$ adeoque fient $ey + \frac{exy}{z}$ quibus in a ductis, præpoſitoque ſigno —, quia habetur $- axy$, exiſtet $- aey - \frac{aexy}{z}$ ſicut ſupra.

---

[6] Le manuscrit de Huygens intercale: Et his quidem hactenus Fermatianæ Regulæ origo ac ratio declaratur. Nunc porro oſtendemus quo pacto eadem ad tantam brevitatem perducta ſit. Cette phrase se trouve aussi (avec „quomodo" au lieu de „quo pacto") dans les publications de 1693 et de 1724.

[7] Publications de 1693 et de 1724: æquatione totâ novissimâ. Le manuscrit avait d'abord: æquatione tota; Huygens y ajouta après coup le mot noviſſima.

[8] Conformément au texte de l'écrit de Huygens de 1663 pour J. de Witt (l. 15 de la p. 316 du T. IV).

$\frac{exy}{z}$ et en les multipliant par $-a$, puisqu'il y avait $-axy$, il viendra $-aey - \frac{aexy}{z}$ comme ci-dessus.

De la même manière, s'il y avait x^2y^3 dans l'équation proposée, je prendrais à cause de x^2 les deux premiers termes du carré de $x + e$, savoir $x^2 + 2ex$; et à cause de y^3 les deux premiers termes du cube de $y + \frac{ey}{z}$, savoir $y^3 + \frac{3ey^3}{z}$; leur produit doit être substitué à x^2y^3. Mais ici aussi il suffit de multiplier seulement le premier des deux termes x^2 et $2ex$ par $\frac{3ey^3}{z}$, et le deuxième seulement par y^3, car les autres produits partiels contiendraient e plusieurs fois ou pas du tout. Il vient donc $\frac{3ex^2y^3}{z} + 2exy^3$.

Il appert par ces considérations que l'un et l'autre des deux termes requis peut toujours être déduit du terme donné, qui est ici x^2y^3; savoir l'un en changeant une lettre x en e et en y ajoutant comme facteur numérique le nombre des dimensions de x; c'est ainsi en effet qu'on trouve $2exy^3$; l'autre en multipliant le terme donné par $\frac{e}{z}$ et en y ajoutant de même comme facteur le nombre des dimensions d'y; c'est ainsi qu'on obtient le terme $\frac{3ex^2y^3}{z}$. Or, comme il a été montré un peu plus haut que les termes de la seconde équation proviennent des deuxièmes termes des puissances de $x + e$ et de $y + \frac{ey}{z}$ correspondant aux puissances de x et de y dans l'équation donnée, il est à présent manifeste que les différents termes de l'équation donnée contenant x ou une de ses puissances, donnent lieu dans la seconde équation à un nombre égal de termes ne contenant pas z, tandis que les différents termes contenant y ou une de ses puissances engendrent de la manière susdite un nombre égal de termes fractionnaires ayant z pour dénominateur, sans que cette lettre apparaisse ailleurs.

Ceci étant connu, c.à.d. sachant comment de l'équation quelconque proposée, comme ici $x^3 + y^3 - axy = 0$, on en tire une autre, comme ici $3ex^2 + \frac{3ey^3}{z} - aey - \frac{aeyx}{z} = 0$, j'observe ensuite que lorsque les termes ayant z pour dénominateur sont transportés dans l'autre membre et que tous les termes sont multipliés par z, et qu'on divise ensuite par la somme des termes qui primitivement ne contenaient pas cette lettre, on trouve la quantité z toute seule d'un côté de l'équation. De cette façon on obtient ici $z = \frac{-3ey^3 + aexy}{3ex^2 - aey}$. J'en conclus que pour calculer la quantité z il suffit d'écrire les termes de la seconde équation qui proviennent de ceux des termes de la première qui contiennent y, en supprimant le dénominateur z et en invertissant les signes + et —, et de diviser ensuite ces termes par ceux provenant des

Sic quoque ſi in æquatione propoſita haberetur xxy^3 ſumerem propter xx duos priores terminos quadrati ab $x + e$, nempe $xx + 2ex$; et propter y^3 duos priores terminos cubi ab $y + \frac{ey}{z}$ nempe $y^3 + \frac{3ey^3}{z}$ quorum productum pro xxy^3 ſurrogandum. ſed etiam hic de duobus $xx + 2ex$ tantum xx ducendum in $\frac{3ey^3}{z}$ tantumque $2ex$ in y^3 (nam cætera vel plura quam unum e vel nullum haberent) adeo ut ſiat $\frac{3exxy^3}{z} + 2exy^3$.

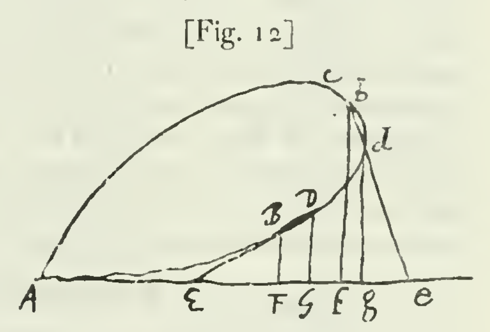
Atque ex his animadvertere licet, ſemper utrumque eorum terminorum deſcribi poſſe ex dato termino, qui hic xxy^3, alterum quidem mutato uno x in e et præponendo numerum dimenſionum ipſius x: ita enim ſit $2exy^3$: alterum vero ducendo datum terminum in $\frac{e}{z}$, præponendoque ſimiliter numerum dimenſionum ipſius y; ita enim ſit $\frac{3exxy^2}{z}$. cumque hac eadem immutatione, paulo ante etiam ſecundos terminos poteſtatum ab $x + e$ et ab $y + \frac{ey}{z}$ ex poteſtatibus x et y æquationis datæ deſcribi oſtenſum ſit, manifeſtum jam eſt a ſingulis terminis æquationis datæ, in quibus x vel poteſtas eius, deſcribi prædicta methodo, in ſecunda æquatione, totidem terminos in quibus non eſt z, a ſingulis vero in quibus y vel poteſtas eius, deſcribi totidem terminos, dicta etiam methodo, quarum fractionis denominator ſit z, nec alibi hanc litteram in ſecunda æquatione repertum iri.

Hoc igitur cognito quo pacto ex æquatione quauis propoſita, velut hic $x^3 + y^3 - axy \infty 0$ alia deſcribenda ſit, ut hic $3exx + \frac{3ey^3}{z} - aey - \frac{aeyx}{z} \infty 0$, animadverto porro ſi termini diviſi per z, ad alteram partem æquationis transferantur, ductiſque omnibus in z, diviſio deinde fiat per terminos in quibus initio non erat z, exiſtere tunc ipſam quantitatem z ab una æquationis parte, uti hic fiet $z \infty \frac{-3ey^3 + aexy}{3exx - aey}$. Atque hinc intelligo ad conſequendam quantitatem z ponendos tantum eos terminos æquationis qui deſcripti ſunt ex terminis æquationis primæ in quibus y, ſublato tantum denominatore z mutatiſque ſignis + & —. deinde dividendos iſtos terminos per eos

termes contenant x de la première équation. il paraît en outre que tous les termes tant du numérateur que du dénominateur peuvent être divifés par e; de forte que dans notre exemple on trouve $x = \frac{-3y^3 + ayx}{3x^2 - ay}$. On fupprime donc $\frac{e}{z}$ dans les termes provenant de ceux qui contiennent y. En effet, nous avons dit plus haut qu'ils fe dérivaient des termes donnés en multipliant ceux-ci par $\frac{e}{z}$ et en y ajoutant le facteur numérique indiquant les dimenfions d'y. On voit donc que pour obtenir ces termes néceffaires pour la détermination de z il n'y a d'autre changement à apporter aux termes contenant y de l'équation donnée, que celui d'y ajouter comme facteur le nombre des dimenfions d'y et d'intervertir les fignes + et —. De cette façon $y^3 - axy$ donne $-3y^3 + axy$. Quant aux termes provenant de ceux de la première équation qui renferment x, comme il s'eft montré qu'il faut feulement y fupprimer la lettre e, et comme nous avons dit antérieurement qu'ils font déduits de telle manière qu'une lettre x a été changée en e et que de plus on y a ajouté comme facteur le nombre des dimenfions de x, il appert que déformais, pour conftituer le dénominateur requis, il fuffit d'ajouter comme facteur à chacun des termes contenant x de la première équation le nombre indiquant les dimenfions de x, et de fupprimer enfuite une feule lettre x dans chaque terme. C'eft ainfi que de $x^3 - axy$ proviendra $3x^3 - axy$ et enfuite, en divifant par x, $3x^2 - ay$. Par ces raifonnements la règle énoncée au début eft maintenant démontrée. Il eft vrai que nous avons dit à préfent qu'il faut changer les fignes + et — dans les termes qui proviennent de ceux contenant y, tandis que dans la règle nous difions qu'il ne faut rien changer dans les fignes, mais il eft évident que ceci revient au même puifque nous difions auffi qu'il faut confidérer chaque quantité négative [numérateur ou dénominateur] comme fi elle était pofitive. Mais pour qu'on comprenne la raifon de la remarque ajoutée à la règle fur le fens de la ligne FE, nous répéterons ici la figure confidérée plus haut dans laquelle nous avons vu que AG = $x + e$ et EG = $z + e$, d'où fe concluait GD = $y + \frac{ey}{z}$. Si toutefois la tangente tombe de l'autre côté de la ligne BF [Fig. 12], comme ici be, et qu'elle eft d'abord, comme l'autre, cenfée couper la courbe, favoir en d, et qu'on tire dg parallèle à bf, il arrivera qu'en pofant de nouveau fg = e et fe = z, Ag devient égale à $x + e$, mais eg à $z - e$, d'où réfulte gd = $y - \frac{ey}{z}$. Il eft facile d'en conclure que la feconde équation réfultant de l'équation propofée $x^3 + y^3 - axy = 0$ fera dans ce cas $3ex^2 - \frac{3ey^3}{z} - aey + \frac{aeyx}{z} = 0$. C.à.d. les termes à dénominateur z y ont des fignes contraires à ceux qu'ils avaient dans l'équation antérieurement déduite qui était $3ex^2 + \frac{3ey^3}{z} - aey - \frac{aeyx}{z} = 0$. Il réfulte de cette dernière que lorfque la quantité $3ex^2 - aey$ ou plutôt $3x^2 - ay$ (qui conftitue le dénominateur fuivant la règle) eft inférieure à zéro ou négative,

qui descripti sunt ex terminis æquationis primæ, in quibus x. Porro ex omnibus tam divisis quam dividentibus, patet rejici posse e; adeo ut in hoc exemplo fiat $a \infty \frac{-3y^3 + ayx}{3xx - ay}$. Itaque rejicitur $\frac{e}{z}$ ex terminis qui descripti sunt ab ijs qui habent y. Sic autem descriptos eos superius diximus, ut ducerentur in idem $\frac{e}{z}$, præponereturque numerus dimensionum y. Itaque nihil requiri apparet ad terminos hosce (quatenus ad definiendam quantitatem z hic adhibentur) ex terminis æquationis primæ in quibus y describendos, quam ut præponamus tantum ijs numerum dimensionum quas in ipsis habet y, signaque + & — invertamus, sic nempe ab $y^3 - axy$, describetur $-3y^3 + axy$. A terminis vero qui descripti sunt a terminis æquationis primæ in quibus x, cum tantum e, hic rejiciendum patuerit; cumque eos ita prius descriptos dixerimus, ut unum x mutaretur in e, præponereturque numerus dimensionum ipsius x; apparet eos quatenus hic adhibentur ad constituendum divisorem, sic tantum describi opus esse ex terminis propositæ æquationis in quibus x, ut præponatur ijs numerus dimensionum ipsius x, ac deinde unum x auferatur; sic nempe ab $x^3 - axy$ describetur $3x^3 - axy$ & dempto ubique x uno fiet $3xx - ay$; atque ex his ratio regulæ ab initio positæ manifesta est. nam quod signa + & — in terminis qui describuntur ab ijs in quibus y, hic immutanda diximus, in regula vero nulla omnino immutanda, id eodem redire liquet, cum quantitatem negatam siue minorem nihilo, tanquam affirmatam considerandam ibi dixerimus. Ut autem ratio obſervationis ibidem adjectæ, in utram partem linea FE accipienda sit intelligatur, repetemus figuram in principio positam ubi vidimus AG esse $x + e$. EG vero $z + e$, unde fiebat GD ∞ $y + \frac{ey}{z}$. Si autem [Fig. 12] tangens ab altera parte lineæ BF cadere intelligatur, velut be, atque hæc primum curuam secare fingatur, ut ibi factum est in d, ducaturque dg parallela bf, fiet ponendo rursus fg ∞ e, et fe ∞ z, ut Ag quidem fiat $x + e$, sed eg erit $z - e$, unde gd ∞ $y - \frac{ey}{z}$. atque hinc porro facile est perspicere, æquationem secundam quæ ex proposita æquatione $x^3 + y^3 - axy \infty 0$ describitur, hoc casu fore $3exx - \frac{3ey^3}{z} - aey + \frac{aeyx}{z} \infty 0$. ut nempe termini qui per z dividuntur, habeant signa contraria ijs quæ habebant in æquatione descripta casu priori, quæ erat $3exx + \frac{3ey^3}{z} - aey - \frac{aeyx}{z}$. Ex hac vero [9]) sequitur,

[Fig. 12]



[9]) Corrigé par Huygens en: Ex hac vero priori. De même dans les publications de 1693 et de 1724.

la quantité reſtante $\frac{3ey^3}{z} - \frac{aeyx}{z}$, ou auſſi la quantité $3y^3 - ayx$ (qui, ſuivant la règle, conſtitue le numérateur) eſt poſitive; que lorſqu'au contraire celle-là eſt poſitive, celle-ci eſt négative, puiſque la ſomme totale de tous les termes eſt nulle. Mais il en eſt autrement dans le cas de l'équation $3ex^2 - \frac{3ey^3}{z} - aey + \frac{aeyx}{z} = 0$. De celle-ci il réſulte que lorſque la quantité $3ex^2 - aey$, ou plutôt $3x^2 - ay$, eſt négative, la partie reſtante $\frac{-3ey^3}{z} + \frac{aeyx}{z}$ ou auſſi la quantité $-3y^3 + ayx$, eſt poſitive, et par conſéquent $3y^3 - ayx$ négative; tandis que, lorſque $3x^2 - ay$ eſt une quantité poſitive, $-3y^3 + ayx$ doit être négative, et par conſéquent l'expreſſion $3y^3 - ayx$ poſitive.

Ceci fait voir que des quantités trouvées par la règle et contenues dans l'équation $\frac{3y^3 - ayx}{3xx - ay} = z$, on peut inférer auquel des deux cas appartient la conſtruction de la tangente: d'une différence de ſigne entre le dénominateur et le numérateur on peut conclure qu'on ſe trouve dans le premier cas, c.à.d. que z ou FE doit être priſe vers A, tandis que dans le cas de l'égalité des ſignes c'eſt dans la direction oppoſée qu'il faut la prendre.

Or, la quantité z ou FE trouvée d'après la règle peut parfois être réduite à des termes plus ſimples au moyen de l'équation donnée exprimant la nature de la courbe. Il en eſt ainſi par exemple dans la préſente courbe AC [Fig. 13] poſſédant l'axe AD et le ſommet A et dont la nature eſt telle que ſi de ſon point C on mène l'ordonnée CD le produit de BD^3 (B étant un point donné ſur l'axe en dehors de la courbe) par DA^2 eſt égal à DC^5. En d'autres termes poſant $BA = a$, $BD = x$, $DC = y$ l'équation exprimant la nature de la courbe deviendra $x^5 - 2ax^4 + a^2x^3 - y^5 = 0$, CG étant une tangente qui rencontre l'axe en G, et poſant $DG = z$, on obtient d'après la règle $z = \frac{5y^5}{5x^4 - 8ax^3 + 3a^2x^2}$. Mais comme d'après l'équation donnée $y^5 = x^5 - 2ax^4 + a^2x^3$, on trouve, en ſubſtituant à $5y^5$ ſa valeur,

$$z = \frac{5x^5 - 10ax^4 + 5a^2x^3}{5x^4 - 8ax^3 + 3a^2x^2},$$

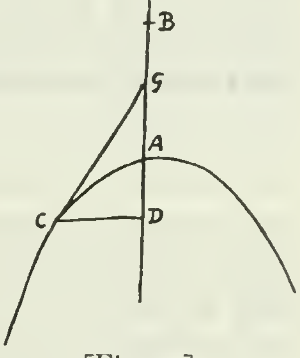
ou bien, en diviſant par x^2, $$z = \frac{5x^3 - 10ax^2 + 5a^2x}{5x^2 - 8ax + 3a^2}.$$

Et en diviſant de nouveau par $x - a$ on aura $z = \frac{5x^2 - 5ax}{5x - 3a}$, ce qui ſignifie que lorſqu'on prend le rapport BD: DG égal à 5BD — 3BA (ou 2BA + 5AD): 5AD, GC touchera la courbe AC en C.

quando quantitas $3exx - aey$ siue quando $3xx - ay$ (quæ divisorem constituit secundum regulam) fuerit minor nihilo, siue negata, tunc quantitatem reliquam $\frac{3ey^3}{z} - \frac{aeyx}{z}$ siue etiam $3y^3 - ayx$ (quæ quantitatem dividendam secundum regulam constituit) esse affirmatam; aut cum illa est affirmata, hanc esse negatam; quia omnes simul æquationis termini æquantur nihilo. At contra ex illa æquatione $3exx - \frac{3ey^3}{z} - aey + \frac{aeyx}{z} \infty 0$ sequitur quando quantitas $3exx - aey$, siue $3xx - ay$, fuerit negata tunc reliquam $- \frac{3ey^3}{z} + \frac{aeyx}{z}$, siue etiam $- 3y^3 + ayx$ esse affirmatam, ac proinde $3y^3 - ayx$ esse negatam: aut quando $3xx - ay$ fuerit affirmata, tunc $-3y^3 + ayx$ esse negatam, ac proinde $3y^3 - ayx$ esse affirmatam.

Per haec itaque apparet ex quantitatibus per regulam inuentis, quae erant $\frac{3y^3 - ayx}{3xx - ay} \infty z$, judicari posse ad utrum casum constructio tangentis pertineat, nempe ex comperta dissimilitudine affectionis in divisore et dividendo, sequi ad priorem casum eam pertinere, hoc est z siue FE accipiendam esse versus A. Ex similitudine vero eorum affectionis sequi ad contrariam partem sumendam.

Potest autem quantitas z siue FE, per regulam inuenta, nonnunquam ad simpliciores terminos reduci ope æquationis datæ quæ naturam curuæ continet, velut in hac curua AC [Fig. 13] axem habente AD verticem A, cujusque ea est proprietas ut si a puncto C in ea sumpto applicetur ordinatim CD, fiat productum ex cubo BD in quadratum DA æquale cubo quadrato DC. Siue ponendo BA ∞ a, BD ∞ x, DC ∞ y, fiat æquatio naturam curuæ continens, $x^5 - 2ax^4 + aax^3 - y^5 \infty 0$. Hic ponendo CG esse tangentem, quæ occurrat axi in G,



[Fig. 13]

vocandoque DG, z. fit secundum regulam $z \infty \frac{5y^5}{5x^4 - 8ax^3 + 3aaxx}$. quia autem ex data æquatione est $y^5 \infty x^5 - 2ax^4 + aax^3$ restituendo pro $5y^5$ id quod ipsi æquale est fiet $z \infty \frac{5x^5 - 10ax^4 + 5aax^3}{5x^4 - 8ax^3 + 3aaxx}$ siue dividendo per xx erit $z \infty \frac{5x^3 - 10axx + 5aax}{5xx - 8ax + 3aa}$.
Et rursus dividendo hanc fractionem per $x - a$ habebitur $z \infty \frac{5xx - 5ax}{5x - 3a}$, quod significat faciendum ut sicut BD quinquies sumpta, minus BA ter, siue ut BA bis, una cum AD quinquies, ad AD quinquies, ita BD ad DG, atque ita GC tacturam in C curuam AC.

IV.

DE CURVIS PARABOLOIDIBUS ET HYPERBOLOIDIBUS.

1667 [1].

Dans le T. II des Regiſtres le texte de cette Pièce ſuit celui de la Pièce III.

LEMMA.

Si differentia linearum FL, KL, quæ eſt KF dividatur in quotcunque partes æquales punctis T, S, G, ratio .... etc.

C'eſt à d'inſignifiantes différences près (p.e. „quotcunque partes" au lieu de „partes quotcunque"), le Lemma qui occupe les p. 283—284 du T. XIV. Ce Lemma nous ſemble dater de 1667, et non pas de 1657 comme le dit le T. XIV où il eſt emprunté à une feuille ſéparée [2]). En effet, la première rédaction du Lemma — les ratures indiquent que c'eſt bien la première — ſe trouve à la p. 188 du Manuſcrit C, laquelle date de juillet 1667.

Le Lemma dans la communication eſt ſuivi par le

THEOREMA.

Si a puncto in paraboloide recta ad axem ordinatim applicetur .... etc., exactement comme dans les feuilles détachées qui ont fourni le texte des p. 284—287 du T. XIV auxquelles nous renvoyons le lecteur. La remarque de Huygens dans la note finale 5 de la p. 287 „Convenit .... ad BQ" fait auſſi partie du texte des Regiſtres, et l'on y trouve en cet endroit la „figure entièrement analogue à la Fig. 6 de la p. 279" dont il eſt queſtion dans la note nommée.

Ce Theorema date apparemment auſſi de 1667 puiſque dans le Manuſcrit C il fait ſuite au Lemma. Il en eſt de même du Theorema ſuivant (p. 285 du T. XIV) qui correſpond à celui de la page antérieure 186 du Manuſcrit C [3]). A la p. 185 du Manuſcrit C Huygens commençait ſa

---

[1]) Dans les Regiſtres la Pièce fait corps avec la précédente et n'a donc pas de titre. Dans ſa lettre de ſeptembre 1686 à de la Hire — citée auſſi dans la note 83 de la p. 212 ainſi que dans la note 125 de la p. 219 qui précèdent — Huygens l'appelle „Dimenſio Paraboloidum, ou je pourray joindre celle des Hyperboloides".

[2]) Il faut lire à la p. 283, l. 3 du T. XIV „Ratio FL ad LK", non pas „ad LT", et à la p. 284, l. 2 „rationem FL" au lieu de „ratione FL". Nous avons remarqué dans la note 7 de la p. 283 que, par suite d'une inadvertance, Huygens ne s'est pas exprimé correctement. Ceci s'applique au texte de la communication à l'Académie comme à celui du T. XIV.

[3]) La démonstration n'y est pas achevée et s'arrête au milieu d'une phrase.

Pièce par les mots: Paraboloides voco curvas in quibus ordinatim applicatæ ad axem vel earum poteſtates quædam ſunt inter ſe ut interceptæ inter eaſdem applicatas et verticem, vel aliquæ earum poteſtates. Etc.

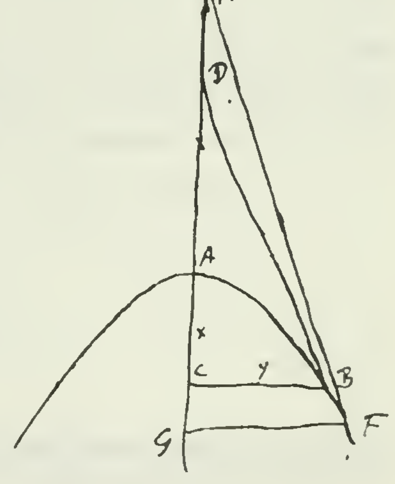
D'après la note 5 déjà mentionnée de la p. 287 du T. XIV Huygens ajouta encore au crayon à la feuille ſéparée conſidérée en cet endroit la remarque Addenda quadratura Hyperboloidum ce qui correſpond à ce qu'il a écrit dans la lettre de 1686 citée dans la note 1. Il nous ſemble que le texte de l'Appendice II (p. 288 et ſuiv.) du T. XIV, emprunté à la même feuille ſéparée, doit dater également de 1667 et non pas de 1657: à la p. 190 du Manuſcrit C, datant de 1667, on trouve des remarques analogues — quoique non pas identiques — ſur les „hyperboloides" ou hyperboles de divers degrés. La publication du texte de cette page du Manuſcrit C nous ſemble ſuperflue.

Outre les parties déjà publiées la communication comprend encore un théorème final que voici. Il correſpond en grande partie au texte de la p. 185 du Manuſcrit C. Le fait qu'il s'agit ici de la conſtruction d'une tangente d'après la méthode de la Pièce III explique que dans les Regiſtres les Pièces III et VI aient été ſoudées l'une à l'autre de manière à former en quelque ſorte une ſeule Pièce.

THEOREMA.

Si Paraboloidem tangens recta linea cum axe conuenit, et a puncto contactus recta ad axem ordinatim applicetur; erit pars axis inter applicatam et tangentem intercepta, ad partem ejuſdem axis inter applicatam et verticem, ut exponens poteſtatis quæ in ea paraboloide conſideratur in ordinatim applicatis, ad exponentem poteſtatis quæ conſideratur in partibus axis, abſciſſis ad verticem.

Ut ſi ſit Paraboloides AF [Fig. 14] cuius axis AG vertex A, rectaque eam tangens in puncto B conueniat cum axe in D, ſit autem Paraboloides eius naturæ ut applicatarum ordinatim BC, FG, quadrato cubi ſint inter ſe ſicut quadrata CA, GA, hic quia in ordinatim applicatis conſideratur poteſtas quinta, in abſciſſis vero ad verticem poteſtas ſecunda, dico fore DC ad CA, ut 5 ad 2. Hoc facile oſtenditur ex Methodo tangentium. Quod ſi vero alia item tangens ducatur FH manifeſtum eſt ut DA ad AC, et ut AH ad AG, ita eſſe HD ad CG.



[Fig. 14]

V.

EXAMEN DU LIVRE DE WALLIS „ARITHMETICA INFINITORUM" DE 1655.

1667.

Regiſtres, T. II, p. 164: Ce 24 d'Aouſt [1667] M. Hugens a continué l'examen du livre de Wallis.

Il doit s'agir, penſons nous, de l'œuvre principale de Wallis, l'„Arithmetica infinitorum ſive nova methodus inquirendi in curvilineorum quadraturam aliaque difficiliora matheſeos problemata" de 1655. Huygens a évidemment pu parler auſſi des autres ouvrages du même auteur dont les principaux étaient l'„Arithmetica univerſalis" et le „Tractatus de ſectionibus conicis nova methodo expoſitis" datant l'un et l'autre également de 1655, la „Matheſis univerſalis ſive arithmeticum opus integrum" de 1657 et les „Tractatus duo.. de cycloide.. de ciſſoide.. et de curvarum tum linearum εὐθύνσει tum ſuperficierum πλατυσμῷ" de 1659 [1]). Peut-être a-t-il auſſi fait mention de la réfutation de la prétendue quadrature géométrique du cercle par Hobbes, la „Hobbiani Puncti Diſpunctio" de 1657 [2]).

[1]) Voyez sur le dernier ouvrage, dédié à Huygens, la p. 518 de notre T. II.

[2]) Consultez sur Huygens, Hobbes et Wallis la p. 380 qui suit, appartenant à la Pièce „Les trois grands problèmes de l'antiquité".

VI.

INSUFFISANCE DE LA DÉMONSTRATION DE GREGORY DE L'IMPOSSIBILITÉ DE LA QUADRATURE DU CERCLE.

1668.

Regiſtres, T. I. p. 258—259: Le 4. d'Auril [1668]... Mr. Hugens a lû a la Compagnie l'examen qu'il a fait d'un livre nouveau de Gregorius... de verâ circuli et hyperbolæ quadraturâ.

Mr. Hugens fait voir qu'il demonſtre mal cette impoſſibilité [ſavoir l'impoſſibilité de la quadrature].

Les obſervations de Huygens n'ayant pas été publiées dans les Regiſtres, mais (ſous la forme d'une lettre à l'éditeur Gallois) dans le Journal des Scavans du 2 juillet 1668, nous renvoyons le lecteur au T. VI, où l'on trouve cette lettre (No. 1647) ainſi que la première réponse de Gregory du 23 juillet 1668 tirée des Philoſoph. Tranſactions (No. 1653) et les autres Pièces qui s'y rapportent parmi leſquelles quelques-unes de Wallis (No. 1659, 1669, pièce du 12 novembre 1668 de Huygens dans le Journal des Scavans, No. 1670, 1671, 1672, 1675, 1676, 1682, 1683, 1684, 1685, 1708, 1709, 1718, 1720, 1721, 1722). Voyez auſſi les Appendices I—V aux p. 303—327 qui ſuivent.

Consultez ſurtout l'article de F. Schuh — cité (déjà avant ſon apparition) à la p. 174 du T. XII de 1910, et auſſi à la p. 39 du T. XVIII de 1934 — qui fut compoſé „à la ſuite de la préparation de l'écrit bien connu de Huygens *De circuli magnitudine inventa*, pour les *Œuvres complètes*". Cet article eſt intitulé „Sur quelques formules approximatives pour la circonférence du cercle et ſur la cyclométrie de Huygens"; il occupe les p. 1—177 et 229—323 du T. III de 1914 de la Série IIIA des „Archives Néerlandaiſes des Sciences exactes et naturelles" (Nijhoff, la Haye). L'auteur y considère e.a. les propoſitions de Gregory et le § 31 eſt intitulé „Critique de Huygens de la démonſtration de Gregory".

Voyez auſſi ſur cet article les notes 2 de la p. 369 et 27 de la p. 374 qui ſuivent.

VII.

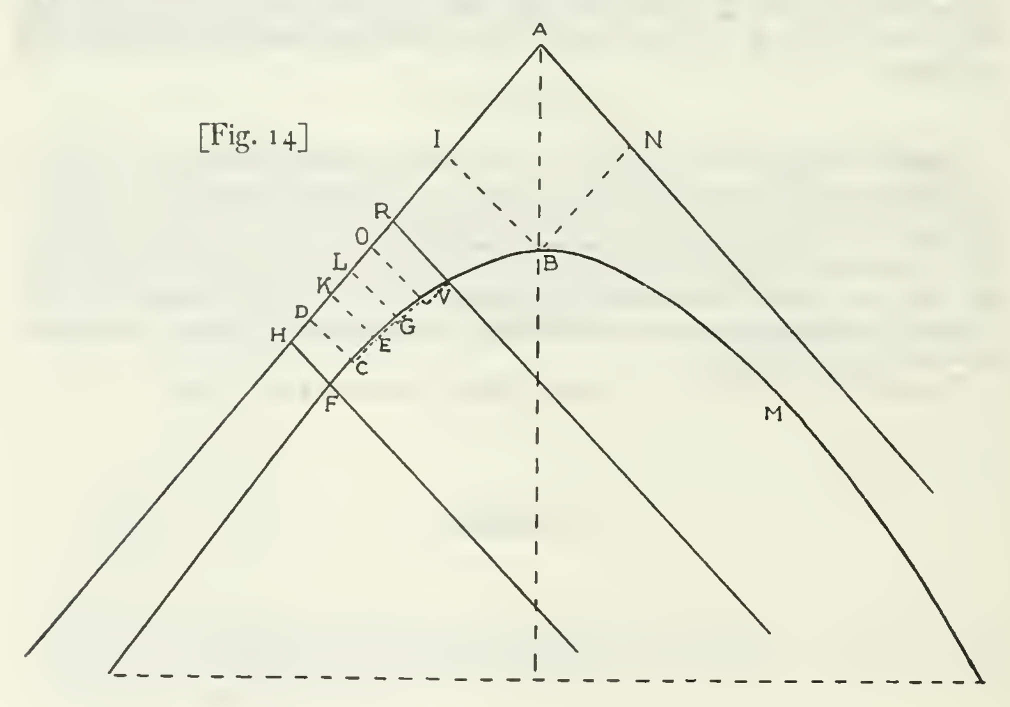
SUR LA QUADRATURE ARITHMÉTIQUE DE L'HYPERBOLE PAR MERCATOR ET SUR LA MÉTHODE QUI EN RÉSULTE POUR CALCULER LES LOGARITHMES.

1668.

Regiſtres, T. III [1]), p. 138—143: Le mercredy 17e jour du mois d'Octobre 1668 la compagnie eſtant aſſemblée Mr. Hugens a parlé de la quadrature arithmetique de l'hyperbole de Mr. Mercator qui eſt inſerée dans un Journal d'Angleterre [2]).

M. Mercator a eſté le premier qui a propoſé cette quadrature. Mr. Wallis l'a depuis expliquée et reformée [2]); et Mr. Hugens y a adiouſté pluſieurs choſes pour en faciliter l'intelligence. Voicy la maniere dont il l'a propoſée [3]).

Soit l'hyperbole MBF [Fig. 14], dont les aſymptotes AH, AN faſſent un angle droict ou autrement; et ſoit AIBN le quarré ou le rhombe de l'hyperbole c'eſt a dire dont le diamètre AB ſoit la moitié de l'axe tranſuerſe.



[Fig. 14]

Qu'il y ait maintenant quelque efpace hyperbolique FVRH, compris d'une portion de la courbe FV, des deux paralleles a l'afymptote AN, et de la partie qu'elles enferment de l'autre afymptote favoir HR, dont on veüille trouuer le contenu c'eft a dire fa proportion au quarré ou rhombe AB; et il n'importe que VR tombe entre BI, FH ou entre BI, NA, quoyque la fupputation fe fera d'autant plus facilement que HR fera plus petite a raifon de HA, comme il paroiftra cy apres.

La methode pour paruenir a la mefure de l'efpace VRHF, confifte premierement a concevoir des petits rectangles ou parallelogrammes circonfcrits a tout cet efpace comme CH, ED, GK, &c, dont les coftez foient paralleles à l'afymptote AN, et leurs largeurs fur l'autre afymptote toutes égales. Et quoyque ces parallelogrammes furpaffent de quelque chofe l'efpace VRHF, toutes fois en confiderant comme fait l'auteur qu'il y en a un nombre infini l'on peut dire qu'ils egalent parfaitement ledit efpace et il ne refte qu'a trouuer la grandeur de tous ces parallelogrammes mis en une fomme.

On fuppofe pour cela AH égale a l'unité ou 1. HR égale a A; IA egale a b. et chafque largeur des petits parallelogrammes comme HD, DK, égale a a. Il eft conftant maintenant par la proprieté cogneüe de l'hyperbole que comme AH ou 1 eft a AI ou b, ainfy AI a FH qui fera $\frac{bb}{1}$ ou bb. Et par la mefme raifon parce que AD eft $1 - a$, DC fera $\frac{bb}{1-a}$, KE $+ \frac{bb}{1-2a}$, LG $+ \frac{bb}{1-3a}$ et ainfy des autres hauteurs des petits parallelogrammes.

Mais en faifant la diuifion de bb par $1 - a$, on trouuera que $\frac{bb}{1-a}$ c'eft a dire CD eft egale à $bb + bba + bbaa + bba^3 + bba^4$ &c. a l'infini, c'eft a dire à bb multiplié par $1 + a + a^2 + a^3 + a^4$ &c. Et partant en multipliant cette hauteur CD par a le parallelogramme CH fera egal à $1 + a + a^2 + a^3$ &c. in abb. De mefme en divifant bb par $1 - 2a$ on trouvera que $\frac{bb}{1-2a}$ c'eft a dire EK eft egale a bb in $1 + 2a +$

[1]) Le T. III eft intitulé: „Regiftre de Mathematique. 1668".

[2]) La „Logarithmo-Technia" de 1667 de Nic. Mercator, déjà citée à la p. 11 qui précède — voyez sur l'auteur la note 8 de la p. 300 du T. I — parut d'abord dans les „Philosophical Transactions" de 1668 (17 Août, No. 38), ensuite avec un autre traité (voyez la note 2 de la p. 302 qui suit) sous forme de livre (Londres 1668), comme l'indique la note 5 de la p. 276 du T. VI. Cette note parle d'une réimpression en 1674. La „Logarithmo-Technia" fe trouve auffi dans les „Scriptores logarithmici" de Fr. Maseres de 1791. Dans le même n° des Philos. Transactions J. Wallis traite de cette quadrature. Immédiatement après Mercator publia un deuxième article: „Some illustrations of the Logarithmo-technia" (Phil. Trans. n. 38, 1668).

[3]) Le brouillon de la conférence qui occupe les p. 82—85 du Manuscrit D commence par l'alinéa suivant: Pour expliquer la quadrature de l'hyperbole de Mercator, reformee par M. Wallis, je n'auray qu'a repeter l'abbregè que le dernier en a donnè, en efclairciffant les difficultez qui y pourroient refter.

$4aa + 8a^3 + 16a^4$ &c. Et partant le parallelogramme ED ſera $1 + 2a + 4aa + 8a^3 + 16a^4$ &c. in abb. Et ainſy en examinant tous les autres petits parallelogrammes on verra facilement qu'ils ſont ainſy

$$\left.\begin{array}{l} CH + 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 \text{ \&c.} \\ ED + 1 + 2a + 4a^2 + 8a^3 + 16a^4 \text{ \&c.} \\ GK + 1 + 3a + 9a^2 + 27a^3 + 84a^4 \text{ \&c.} \end{array}\right\} \text{in } abb$$

et ainſy conſecutivement juſqu'au plus grand VO $+ 1 + A + A^2 + A^3 + A^4$ &c. donc la ſomme de tous c'eſt a dire l'eſpace VRHF ſera

$$A + \tfrac{1}{2}A^2 + \tfrac{1}{3}A^3 + \tfrac{1}{4}A^4 + \tfrac{1}{5}A^5 \text{ \&c. in } bb.$$

On a dict que le plus grand des parallelogrammes VO eſt egal a $1 + A + A^2 + A^3$ &c. in bb, parce qu'en diuiſant bb par $1 - A$, l'on trouue que $\frac{bb}{1 - A}$, c'eſt a dire VR, eſt egale à cette progreſſion multipliée par bb. Et par conſéquent en multipliant de plus par RO ou a le parallelogramme VO doit eſtre $1 + A + A^2 + A^3$ &c. in abb.

Mais pour ce qui eſt de la conſequence par laquelle la ſomme de tous les parallelogrammes eſt egalle a $A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3$ &c in bb, elle eſt fondée ſur des Theoremes aſſez connus des progreſſions des puiſſances. Car en conſiderant les colonnes deſcendantes des quantites eſcrites cy deſſus on void que la premiere colonne eſt faite d'unitez multipliées par abb qui ſont des parallelogrammes egaux entre eulx, dont la ſomme par conſequent ſera egalle au dernier abb pris autant de fois qu'il y a des particules egales en la ligne HR ou A faiſant les largeurs deſdits parallelogrammes. C'eſt a dire ſi on met n pour ce nombre infini des parties la ſomme de tous les parallelogrammes ſera $nabb$, mais na, c'eſt a dire une des parties multipliée par le nombre des parties eſt egale a la ligne HR ou A, donc toute la premiere colonne continuée a l'infiny eſt egale a Abb, comme elle a eſté miſe.

Pareillement la ſeconde colonne eſtant $a + 2a + 3a + 4a$ &c. multipliez par abb qui eſt une ſuitte de parallelogrammes qui ſont comme les nombres depuis l'unité, il eſt certain que leur ſomme eſt egale a la moitié du plus grand A in abb, multipliée par n, c'eſt a dire priſe autant de fois qu'il y a des petites parties en HR ou A. Cette ſomme ſera donc $\frac{1}{2}Aanbb$, ou parce que na eſt egale a A ce ſera $\frac{1}{2}AAbb$ comme elle a eſté miſe.

De meſme la troiſième colonne eſtant $aa + 4aa + 9aa$ &c. multipliez par abb qui eſt une ſuite de parallelogrammes qui ſont entre eux comme les quarrez des nombres depuis l'unité: leur ſomme ſera egalle a $\frac{1}{3}$ du plus grand multiplié par A c'eſt a dire a $\frac{1}{3}AAnabb$ ou parce que na eſt egal a A ce ſera $\frac{1}{3}A^3bb$; et ainſy du reſte.

Suppoſant maintenant quelque nombre pour la longueur de A ou HR qui ſoit moindre que l'unité (car HA eſt ſuppoſé $+ 1$) et de meſme pour b ou AI, la ſomme ſuſdite $A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 + \frac{1}{4}A^4$ &c. in bb exprimée en nombre ſera le contenu de l'eſpace hyperbolique HFVR. Et quoyqu'il puiſſe ſembler d'abord qu'on cherchera en vain cette ſomme, parce qu'il y a une multitude infinie de quantitez a adiouter, cependant puiſque A eſt une fraction moindre que l'unité, il s'enſuit que les puis-

fances de A deviennent d'autant moindres que l'unité qu'elles font plus hautes, en forte que les dernieres peuuent eftre negligées comme il paroiftra par cet exemple. Soit AH ∞ 1; $b \infty \frac{1}{10}$ que l'on efcrira ainsy 0,1; et par conféquent $bb \infty \frac{1}{100}$ ou 0,01; HR ou $A \infty \frac{21}{100}$ ou 0,21.

L'on aura donc $A \infty$ 0,21.

A ∞	0,21.
$\frac{1}{2}A^2$	0,02205.
$\frac{1}{3}A^3$	0,003087.
$\frac{1}{4}A^4$	0,000486203.
$\frac{1}{5}A^5$	0,000081682.
$\frac{1}{6}A^6$	0,000014294.
$\frac{1}{7}A^7$	0,000002573.
$\frac{1}{8}A^8$	0,000000473.
$\frac{1}{9}A^9$	0,000000088.
$\frac{1}{10}A^{10}$	0,000000017.
$\frac{1}{11}A^{11}$	0,000000003.

Et leur fomme ∞ 0,235722333.
Qui eftant multipliée
par bb ∞ 0.01
faict 0,00235722333

pour le contenu de l'efpace hyperbolique FHRV en parties dont le quarré ou Rhombe AB en contient 0,01. Ceft a dire que l'efpace FHRV fera au quarré ou Rhombe AB

comme $\frac{23572233}{100000000}$ a 1 [4]).

---

[4]) Dans le brouillon du Manuscrit D (note 3 de la p. 261) Huygens fait encore un calcul du même genre pour A = 0,5.

Par la maniere de cette operation il eſt facile de comprendre la raiſon de ce qui a eſté dict au commencement ſcavoir que le calcul ſera d'autant plus aiſé que HR aura moindre raiſon a HA et d'autant plus long que cette raiſon ſera plus grande, car ſuiuant cela les puiſſances de A ou HR diminueront plus ou moins viſte pour pouuoir eſtre negligées ainsy que dans l'exemple propoſé l'on voit que les Caractères ſignifiant des puiſſances de A ſe retirent aſſez viſte vers la main droite. Ce qui n'arriveroit pas de meſme ſi A eſtoit 0,7 ou 0,8, mais il faudroit continuer l'operation plus auant pour auoir le meſme nombre de veritables caracteres pour le contenu de l'eſpace hyperbolique.

Or cette dimenſion de l'hyperbole ſert auſſy a trouver les logarithmes avec facilité parce que ces eſpaces hyperboliques comme VRHF, BIHF ſont touſiours entre eulx comme la raiſon de VR a FH [5]) eſt a la raiſon de BI a FH [5]) ce que Gregorius de Sancto Vincentio a monſtré le premier [5]). C'eſt a dire ſi l'on pose des nombres pour BI, VR, FH alors comme l'eſpace VRHF eſt a BIHF ainſy ſera la difference des logarithmes des nombres VR, FH a la difference des logarithmes de BI, FH. La proportion desquelles differences eſtant connue et ſuppoſant enſuitte comme dans les tables 0 pour logarithme de l'unité et 1,0000000000 [6]) pour celuy de 10, l'on trouue facilement les logarithmes de chaque nombre tels qu'ils ſont dans les meſmes tables.

---

[5]) Voyez sur la proposition de Grégoire de Saint-Vincent la note 3 de la p. 452 du T. XIV.

Sous l'expression assez étrange dans sa brièveté „raison de VR à FH" il faut entendre ici le „numerus ratiuncularum" (Mercator) qui correspond au rapport VR : FH; même remarque pour la „raison de BI a FH". Gr. de S. Vincent qui ne connaît pas les „ratiunculæ" ni le mot logarithme — voyez la note citée du T. XIV — s'exprimait autrement que Huygens le fait ici; pour lui un rapport de deux longueurs *est compris* dans un autre rapport, ou bien en *contient* un autre, un certain nombre de fois (ou „nombre" ne désigne pas généralement, comme dans l'expression „numerus ratiuncularum" un nombre entier). Dans le brouillon mentionné dans la note 3 de la p. 261 les mots „ce que Greg. a S^to Vinc. a montré le premier" ont été *ajoutés dans l'interligne*, ce qui explique que Huygens n'insiste aucunement sur la non-identité des logarithmes de Mercator et des logarithmes — pour employer ce mot — de Grégoire.

[6]) Apparemment il ne s'agit pas ici du nombre 1, mais de dix mille millions (d'ailleurs c'est le copiste, pensons-nous, qui a ajouté trois zéros; dans le brouillon Huygens n'en écrit que sept): Mercator lui aussi écrit 1,0000000 pour désigner 10 millions (Mercator se sert ailleurs, il est vrai, d'un certain signe décimal, mais ce signe n'est pas la virgule).

Huygens ne parle pas ici, comme il aurait pu et peut-être dû le faire, de „numeri ratiuncularum" infiniment grands; un „numerus ratiuncularum" fini ne correspondra pas *exactement* à tout rapport VR : FH ou BI : FH; voyez ce que nous disons sur ce sujet aux p. 215—216 qui précèdent. Chez Mercator l'„intervalle-atome" dont nous avons parlé dans la note 2 de la p. 155, finit par céder le pas à l'intervalle infiniment petit ou, si l'on veut, à la continuité.

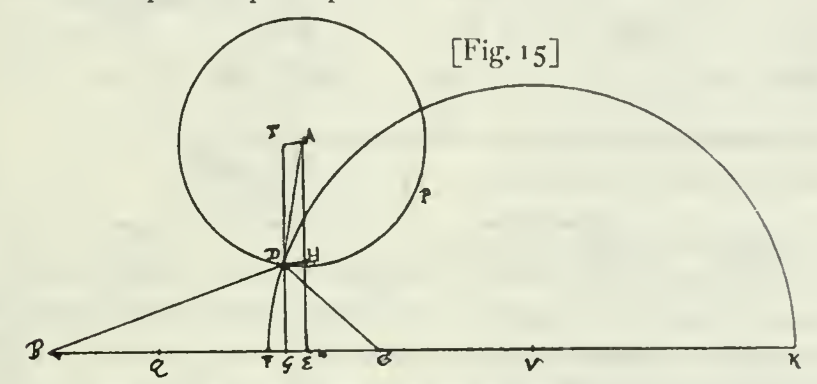
VIII.

PROBLEMA ALHASENI.

[1669. 1670?]

1669

A[1]). Dato ſpeculo ſphærico convexo aut cavo, datisque punčto viſus et punčto rei viſæ, invenire in ſuperficie ſpeculi punčtum reflexionis.



[Fig. 15]

Dučto plano per ſpeculi centrum A [Fig. 15], et per punčta B, C, oculi et rei viſæ, fiat ſečtio in ſpeculi ſphaera circulus DP. Junčtâque BC ſit in eam perpendicularis AE. Et poſito punčto reflexionis D, ſit etiam DG perpendicularis in BC, et DH perpendicularis in AE. et ducatur rečta ADE, quæ ſecabit neceſſario angulum BDC bifariam, ideoque erit ut BD ad DC ita BF ad FC. quare ſumta FQ ∞ FC (quam pono minorem duarum BF , FC) fačtoque ut BQ ad BF ita FC ad FV, neceſſario circum-

[1]) „Chartæ Mathematicæ" f. 145. Les Fig. 15, 16 et 17 correspondent exačtement à des figures des p. 119 et 124 du Manuscrit D qui contient en cet endroit les calculs primitifs, datant apparemment de janvier 1669, puisque la p. 145 porte la date 1 Fevr. 1669. La Fig. 16 correspond aussi à celle de la page, imprimée par Huygens lui-même d'après son procédé spécial, qui est reproduite dans notre T. VI (planche vis-à-vis de la p. 462); le texte de cette page correspond — à quelques variantes près — avec celui de la „Constručtio" de la présente Pièce (et aussi avec le texte de la p. 124 du Manuscrit D). La première partie de la présente Pièce motive cette constručtion ou du moins fournit les données qui permettent de la vérifier.

ferentia descripta centro V radio VF transibit per punctum D, ut aliunde constat [2]).

Sint jam AE ∞ a. EB ∞ b. EC ∞ c. radius AD ∞ d. AH ∞ x. HD ∞ y. Ergo FE ∞ $\frac{ay}{x}$.

AH HE AD

$$x \;\top\; a - x \;——\; d \;/\; \frac{ad - dx}{x} \text{ DF}$$

s. BF $b - \frac{ay}{x}$, FC $c + \frac{ay}{x}$

FG $\top$ FD
sive HD $\top$ DA —— FD

$$y \;\top\; d \;——\; \frac{ad - dx}{x} \;/\; \frac{add - ddx}{yx} \text{ FK [3])}$$

$$\text{BQ } b - c - \frac{2ay}{x} \qquad \text{Sit } b - c \infty e \qquad \text{Ergo } \frac{add - ddx}{2yx} \text{ FV}$$

BQ BF FC FV

$$e - \frac{2ay}{x} \;\top\; b - \frac{ay}{x} \;——\; c + \frac{ay}{x} \;——\; \frac{add - ddx}{2yx}$$

$$ex - 2ay \;\top\; bx - ay \;——\; cx + ay \;\top\; \frac{add - ddx}{2y} \qquad b - c \infty e$$

$$\frac{eaddx - eddxx - 2aaddy + 2addxy}{2y} \infty bcxx + bayx - acyx - aayy$$

$$eaddx - eddxx - 2aaddy + 2addxy \infty 2bcxxy + 2eaxyy - 2aay^3 \qquad yy \infty dd - xx$$

$$\text{Div. per } x \quad 2eaxx - eadd - eddx \infty 2bcxy + 2aaxy - 2addy$$

$$xx \infty \frac{2bcyx + 2aayx + eddx + eadd - 2addy}{2ae}$$

Completo igitur rectangulo AHDT, positaque AT ∞ y erit TD ∞ x, punctumque D erit ad hyperbolam ut constat ex æquatione. Sed et ad circumferentiam DP quia

---

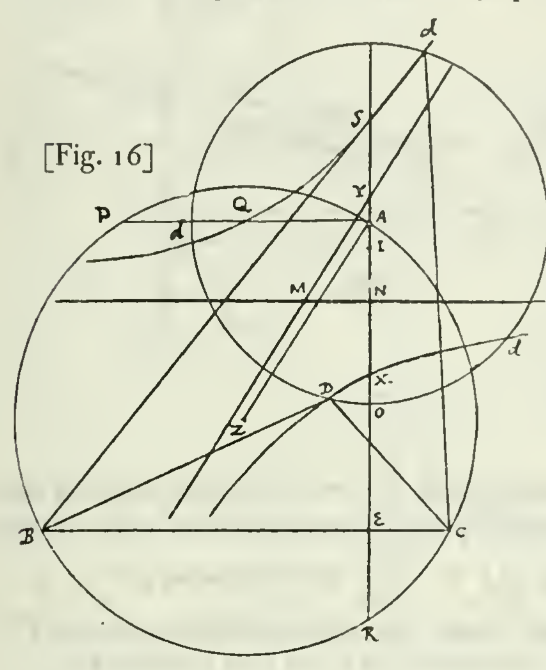
[2]) Il s'agit, d'après la construction de Huygens, de la circonférence de cercle qui constitue le lieu de tous les points du plan considéré pour lesquels le rapport des distances aux deux points fixes B et C a la valeur constante DB: DC.

[3]) Puisque l'angle FDK est droit.

$dd - yy \infty xx$. Ergo inventa hyperbola quæ locus eſt puncti D in recta TD, ea circumferentiam DP ſecabit in puncto D quæſito. Invenietur autem hoc modo.

Conſtructio [4]).

Per tria puncta A, B, C [Fig. 16] deſcribatur circuli circumferentia cujus centrum ſit Z. Occurrat autem ei producta AE in R. Et ſit duabus RA, OA tertia proportionalis NA, eritque NM parallela BC, altera aſymptotôn. Rurſus ſint proportionales EA, $\frac{1}{2}$AO, AI, ſumtaque IY ∞ IN, ducatur YM parallela AZ. eaque erit altera aſymptotos. Ductâ denique AP in circulo parallelâ BC, diviſâque biſariam in Q, erit Q punctum per quod altera oppoſitarum ſectionum tranſibit [5]). Ad inventas aſymptotos deſcribendis[5]), quarum interſectiones cum circumferentia DO, oſtendent puncta reflexionis quæſita, quæ uſque ad quatuor vera eſſe poſſunt cum puncta B, C intra circulum Dd data ſunt.



[Fig. 16]

Conſtructio hæc ad omnes caſus, quibus problema ſolidum, accommodata eſt, præter unum quo non hyperbola ſed parabola deſcribenda eſt, cum nempe circumferentia per puncta A, B, C deſcripta tangit rectam AE [Fig. 17] [6]). Invenietur

[4]) Malgré les calculs du Manuscrit D, mentionnés dans la note 1 de la p. 265, il n'est pas clair comment Huygens parvient à cette construction; mais il n'est pas difficile de la vérifier. L'équation de l'hyperbole étant $2aex^2 - 2(a^2 + bc)xy - ed^2x + 2ad^2y - ead^2 = 0$ on trouve, en posant $y = 0$, $x = \frac{ad^2}{a^2 + bc}$: c'est l'équation de l'asymptote horizontale.

Comme la circonférence de cercle passant par A, B et C a pour équation $a(x^2 + y^2) - (a^2 + bc)x - a(b - c)y = 0$, on trouve $AR = \frac{a^2 + bc}{a}$; et comme $AO = d$, on a $NA = \frac{OA^2}{RA} = \frac{ad^2}{a^2 + b^2}$, conformément à l'équation trouvée de l'asymptote.

Le centre Z de la circonférence a pour coördonnées $x = \frac{a^2 + bc}{2a}$, $y = \frac{b - c}{2}$; l'équation de la droite AZ est donc $y = \frac{a(b - c)}{a^2 + bc}x$. Or, l'équation de l'hyperbole donne effectivement, en divisant par y^2 et en posant ensuite $y = \infty$, $\frac{x}{y} = \frac{a^2 + b^2}{ae}$ ou $\frac{a^2 + b^2}{a(b - c)}$, de sorte que la deuxième asymptote est parallèle à AZ. Etc.

autem punctum I eodem modo quo prius, per quod ductâ IK parallelâ BC, erit ea axis parabolæ. Latus rectum vero tertia proportionalis diametro AL et radio AO, quæ sit IV. Deinde inventis ut ante punctis S, X, per quæ parabola transire debet, facile jam vertex K invenietur, sumta duabus IV, IX tertia proportionali IK.

Notandum est puncta intersectionis circuli et hyperbolæ vel parabolæ etsi non omnia sint puncta reflexionis, ita tamen sita esse ut angulum à rectis BD, DC comprehensum, vel eum qui deinceps est, recta AD ex centro ducta bifariam secet.

[Fig. 17]

Planum vero erit problema cum vel puncta A, B, C in eadem erunt recta vel cum B et C æqualiter ab A distabunt, quorum prius ex æquatione patet posito nempe $a \infty 0$. nam tunc $2bcy \infty \mp edd$, hoc est $y \infty \mp \frac{edd}{2bc}$. Posterius vero, posito $e \infty 0$, tunc enim vel $y \infty 0$, vel $bcx \mp aax \infty add$. quo casu intersectio circulorum Dd, ABC duo alia vera reflexionis puncta monstrat si B et C sint intra circulum Dd.

Des quatre figures de la Fig. 18 deux se rapportent à des cas où il y a quatre points de réflexion satisfaisant à la demande, tandis que dans les deux autres il y a respectivement un et trois points de réflexion.

---

5) Cette dernière phrase, écrite en marge au crayon, remplace les lignes biffées que voici: denique sumtis IX, IS quæ singulæ possint $\frac{1}{2}$ qu. AO una cum qu. AI, erunt puncta X et S in hyperbola aut sectionibus oppositis Dd. Ces lignes font encore partie du texte de la planche du T. VI, dont il est question dans la note 1 qui précède.

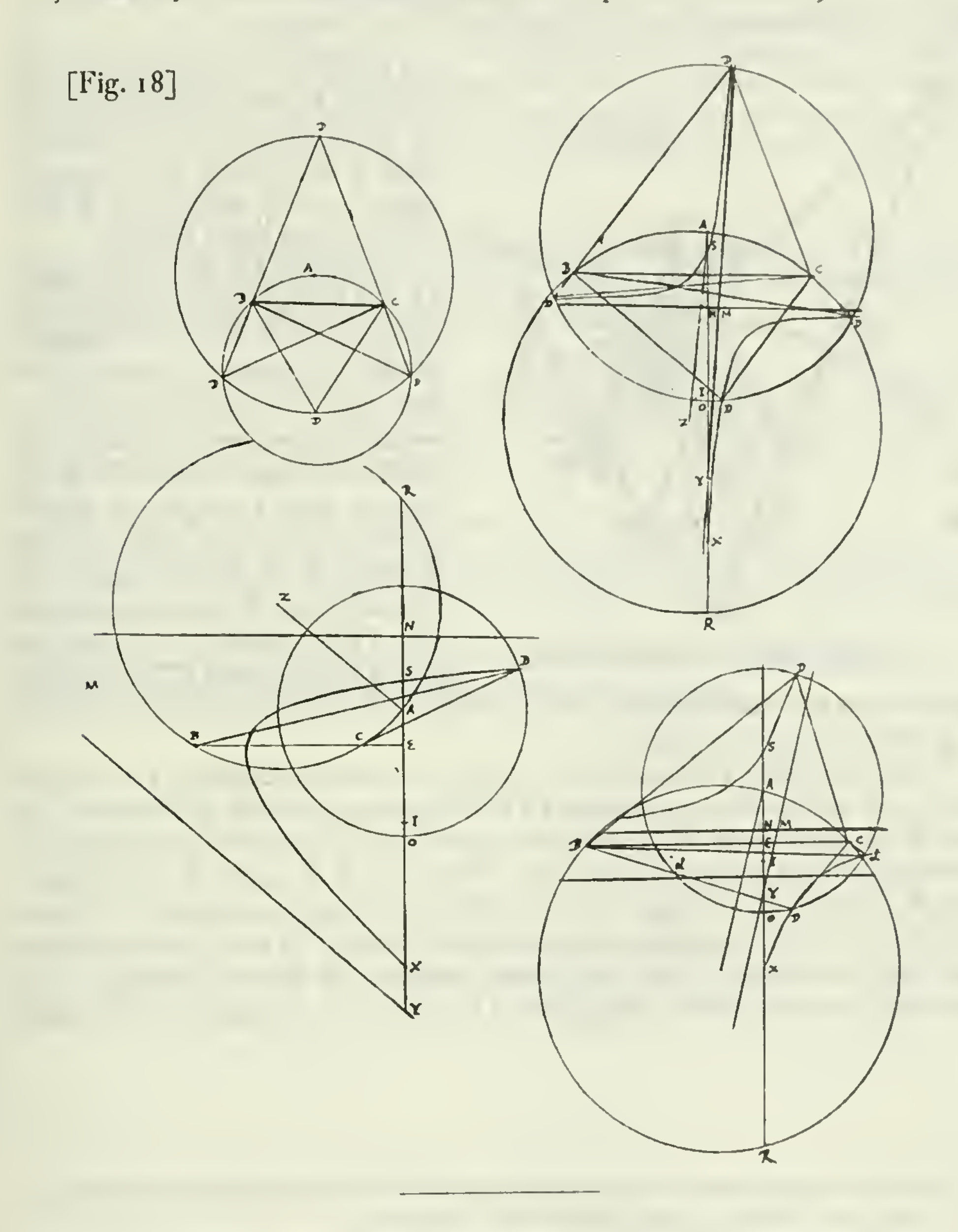
Dans la Fig. 16 la droite AQP, avec les lettres P et Q, a été ajoutée au crayon.

Le bout de phrase „Ad inventas asymptotos describendis", se rattache aux lignes biffées; le mot „describendis" se rapporte donc à „hyperbola aut sectionibus oppositis Dd".

6) Ici finit le texte de la planche du T. VI. Lorsque la circonférence touche la droite AE, on a AR = 0, donc $a^2 + bc = 0$ (note 4 de la p. 267), de sorte que l'équation de la conique représente en effet une parabole.

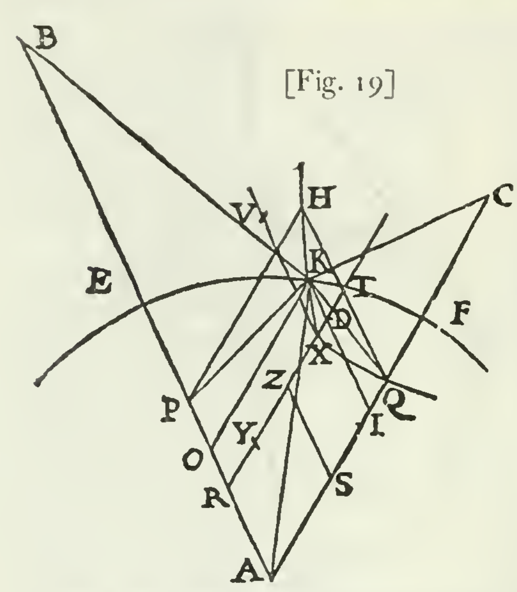
Ajouté au crayon: multo meliorem conſtructionem poſtea invenimus [7]).

[Fig. 18]



[7]) Il s'agit de la construction du Manuscrit 11 qui constitue notre Appendice II à la p. 330 qui suit. Consultez aussi notre remarque sur cet Appendice à la p. 271 qui suit.

B[8]). Conſtruction d'un Problème d'Optique, qui eſt la XXXIX. Propoſition du Livre V. d'Alhazen, & la XXII du Livre VI. de Vitellion.



XV aurait dû être une ligne droite.

Les points B C [Fig 19] et le cercle EK dont le centre eſt A ſont donnez ſur un meſme plan; il faut trouver le point K ſur le cercle, en ſorte que les lignes BK, CK faſſent avec la ligne AK des angles égaux entr'eux.

Ayant mené AB, AC ſoit fait comme AC à AF, ainſi AF à AQ; & comme AB à AE, ainſi AE à AP. Soit auſſi AR & AS, chacune la moitié de AP & de AQ. Dans l'angle BAC ſoit achevé les parallélogrammes PAQH & ARZS. Sur RZ prolongée ſoit pris ZY & ZX, chacune égale à la ligne qui peut la difference d'entre les quarrez de QS & ZS[9]). Ayant fait XV égale à XY et parallèle à AB, ſur les deux coſtez XV, XY ſoit décrit une hyperbole qui paſſera par les points Q & H, comme il eſt évident par la conſtruction: cette hyperbole QXH rencontrera le cercle au point K qui eſt celuy que l'on cherche.

Ayant mené KO, & KI parallèles à AC & à AB, dont KI rencontre YX au point D; à cauſe de l'hyperbole le rectangle YDX eſt égal au quarré de KD ordonnée, ou de OR; & le rectangle YTX eſt égal au quarré de HT ou de PR; & ayant oſté du rectangle YTX le rectangle YDT [liſez: YDX[10])], & du quarré de PR le quarré de OR, il reſtera le rectangle RDT ou AIQ qui ſera égal au rectangle AOP: donc PO eſt à AI ou OK ſon égale, comme QI eſt à AO ou IK. Et ayant mené les lignes KP, KQ, les triangles KOP, KIQ ſeront ſemblables, & partant équiangles; c'eſt pourquoy les angles APK, AQK qui ſont les meſmes ou les ſupplemens des angles

[8]) „Divers ouvrages de mathématique et de phyſique par MM. de l'Académie Royale des Sciences", 1693, p. 336. Comparez la note 56 de la p. 207 qui précède.

[9]) C.à.d. $ZY = ZX = \sqrt{QS^2 - ZS^2}$. Z est le centre de l'hyperbole équilatère, dont l'équation par rapport à deux diamètres conjugués RT et SZ est $TZ^2 - HT^2 = ZX^2$, ou, si l'on veut, $x^2 - y^2 = a^2$ ou bien $y^2 = (x + a)(x - a)$ ou $HT^2 = TY . TX$.

[10]) L'erreur a été corrigée dans la traduction latine des „Opera Varia" de 1724 (tome IV, p. 759).

égaux OPK, IQK feront égaux entr'eux. Mais par la conſtruction on a fait comme AB à AE ou à AK, ainſi AK ou AE à AP: c'eſt pourquoy les deux triangles BAK, KAP ſont ſemblables; & pour les meſmes raiſons les deux triangles CAK, KAQ ſont auſſi ſemblables: c'eſt pourquoy l'angle BKA eſt égal à l'angle APK; & l'angle CKA eſt égal à l'angle AQK. Mais nous venons de démontrer que les angles APK, AQK ſont égaux; les angles BKA, CKA feront donc auſſi égaux entre eux; ce qu'il fallait démontrer.

Si le point H tomboit ſur la circonference du cercle, ce point H feroit le point K que l'on cherche, & les lignes HP, KP, KO & ſemblablement les lignes HQ, KQ, KI ne feroient qu'une meſme ligne HP & HQ, d'où l'on prouveroit les meſmes choſes qu'on a fait cy-devant, ſans avoir beſoin de l'hyperbole.

Dans une lettre du 3 ſeptembre 1693 au marquis de l'Hospital (T. X, p. 497) Huygens ſe dit „faché de voir qu'on ait mis dans les Traitez de l'Academie des Sciences" la préſente ſolution du problème d'Alhazen, et „non pas une beaucoup meilleure" ſur laquelle on peut conſulter, outre cette page du T.X., ce que nous obſervons au début de l'Appendice II à la Pièce VIII à la p. 330 qui ſuit.

A notre avis Huygens n'avait pas grande raison d'être fâché. L'hyperbole de la Fig. 19 — nous le diſons auſſi dans la note 2 de la p. 331 qui ſuit — eſt la même que celle de la pièce 1891 de 1672 du T. VII et auſſi que celle de la ſolution et de la démonſtration de 1673 de l'Appendice II que nous venons de mentionner leſquelles ſont appelées par Huygens sa „plus belle ſolution et demonſtration".

On voit dans la Fig. 19, quoiqu'ici cela ne ſoit pas dit, que pour des raiſons de ſymétrie l'autre branche de l'hyperbole doit paſſer par le point A, ainſi que par le point P.

CONSTRUCTION DE L'HYPERBOLE D'APRÈS SON ÉQUATION AU MOYEN DE SES ASYMPTOTES.

[1670 ?]

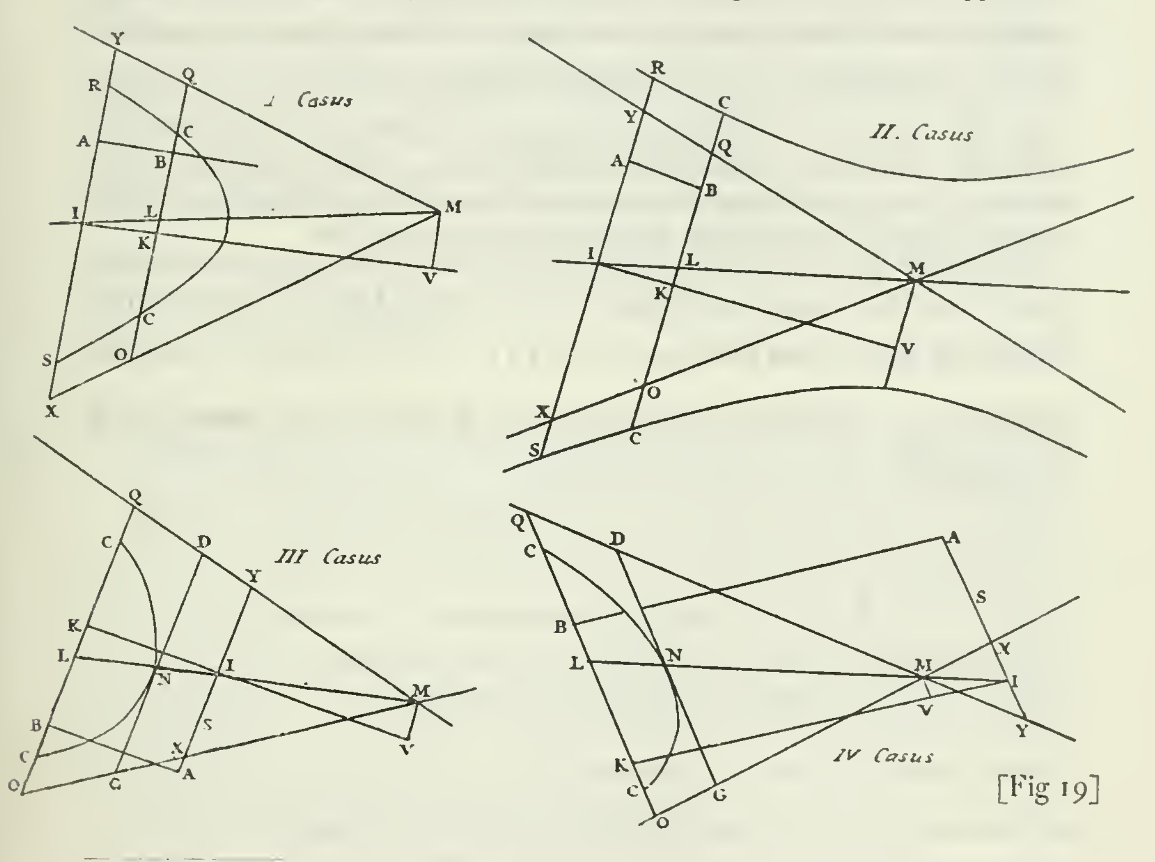
Lorſque, dans l'équation qui correſpond à une hyperbole, aucune des deux lignes indéterminées (c. à. d. des variables) n'eſt multipliée par elle-même, p. e. lorſque l'équation eſt $xy = bb$ ou $xy = cx \pm b^2$ — où les lettres x et y déſignent les lignes droites indéterminées AB et BC [Fig. 19], coördonnées entre elles ſous un angle

IX.

CONSTRUCTIO LOCI AD HYPERBOLAM PER ASYMPTOTOS.

[1670?] [1])

In æquatione loci ad hyperbolam, si neutra indeterminatarum linearum in seipsam ducta inveniatur, velut si sit $xy = bb$; vel $xy = cx.bb$ [2]); (literis x et y lineas indeterminatas AB, BC [Fig. 19] significantibus, quæ in dato angulo sibi mutuò sint applicatæ,



[Fig 19]

[1]) Nous empruntons cette Pièce aux „Divers ouvrages" de 1693. Le manuscrit de Huygens qui porte la date du 30 Jan. 1669, fait partie des Chartæ mathematicæ (f. 161—162). Les deux textes, ainsi que les figures, s'accordent parfaitement. Nous avons dit dans l'Avertissement (p. 207, note 57) qu'il nous paraît fort vraisemblable que cette Pièce ait été presentée à l'Aca-

donné, dont l'une, p.e. AB, eſt donnée en poſition, tandis que le point A de cette droite eſt également donné — la conſtruction ſe fait aiſément par la recherche des aſymptotes, comme Fl. de Beaune l'a fait voir dans ſes Notes ſur la Géométrie de Deſcartes [3]). Nous ferons voir ici que lorſque x^2 et y^2 ſe trouvent dans l'équation, la conſtruction peut néanmoins être effectuée au moyen des aſymptotes, et que ceci eſt plus court que de rechercher le diamètre ainſi que le *latus rectum* et le *latus tranſverſum*.

Suppoſons l'équation réduite à la forme $y = \pm l \pm \frac{nx}{z} \pm \sqrt{\pm m^2 \pm ox + \frac{p^2x^2}{g^2}}$. En effet, elle peut toujours être réduite à ces termes, de ſorte que d'un côté de l'équation il n'y ait rien que y, l'une des deux lignes indéterminées, ordonnée par rapport à l'autre qui eſt donnée en poſition, et de l'autre côté un nombre de termes qui n'eſt pas ſupérieur à celui de ceux écrits ici; il eſt vrai que ſouvent il peut y en avoir moins, puiſque ſeule la préſence de $+\frac{p^2x^2}{g^2}$ et de l'un des deux autres, m^2 ou ox, eſt néceſſaire.

L'angle ABC étant donné, il faut mener par le point A la ligne XY parallèle à la droite BC et y prendre AI égale à l, du côté BC s'il y a $+ l$ dans l'équation, du côté oppoſé s'il y a $- l$. Il faut après cela mener IK parallèlement à AB. Mais s'il n'y a pas de l du tout, la droite IK doit être cenſée coïncider avec AB.

Enſuite comme z eſt à n, rapport donné, ainſi ſoit la longueur arbitraire IK à KL; laquelle doit être menée parallèlement à AI de telle manière que les points K et L ſoient ſitués dans le même ordre que A et I s'il y a $+\frac{nx}{z}$ dans l'équation, mais inverſement s'il y a $-\frac{nx}{z}$. Il faut enſuite tirer la droite IL; mais ſi $\frac{nx}{z}$ fait défaut, IL eſt identique à IK.

quarumque altera, ut AB, positione data intelligitur, & in ea datum punctum A) constructio per asymptotorum inventionem facilè absolvitur, ut ostensum est à *Fl. de Beaune* in Notis ad Geometriam Cartesii[3]). Cum verò habetur xx vel yy in æquatione, vel utrumque, nihilominus ad asymptotos rem deduci posse, & quidem breviùs quàm ad diametri laterumque recti & transversi inventionem, ostendemus hoc modo.

Sit æquatio ejusmodi reducta, $y = . l . \frac{nx}{z} . \sqrt{. mm . ox + \frac{ppxx}{gg}}$[4]); semper enim ad hos terminos reduci potest, nempe ut y altera linearum indeterminatarum, quæ applicata est ad positione[5]) datam, sola ab una parte æquationis habeatur, ab altera verò non plures termini quàm hìc inveniantur; nam sæpe pauciores etiam esse possunt, cùm soli necessarii sint $+ \frac{ppxx}{gg}$ cum alterutro horum mm vel ox.

Quum angulus ABC datus sit, ducatur per A punctum linea XY quæ sit rectæ BC parallela, & in ea accipiatur AI æqualis l, idque ad partes BC, si habeatur $+ l$ in æquatione, in contrarias verò si habeatur $- l$, & agatur IK parallela AB. Si verò non habeatur omnino l, recta IK in AB incidere intelligenda est.

Deinde sicut z ad n, quæ est ratio data, ita sit IK ad libitum sumpta, ad KL; quæ ipsi AI parallela ducenda est, sumendaque hoc pacto, ut puncta KL sita sint quo ordine AI, si habeatur $+ \frac{nx}{z}$, at contrà si habeatur $- \frac{nx}{z}$, & ducatur recta per IL; si verò desit $\frac{nx}{z}$, eadem est IL & IK.

---

démie, quoique cela ne soit pas dit expressément. Quant à la date de la présentation qui doit être 1670 au plus tôt et 1674 au plus tard, nous supposons qu'elle est plutôt 1670. Le Manuscrit D renferme déjà une page (p. 135), où Huygens désigne son calcul comme bon qui contient les principales équations de la Pièce IX, tandis que les p. 136—138 contiennent, outre des calculs du même genre, une Pièce, plus courte que celle du texte, intitulée „Constructio loci ad hyperbolam", commençant par les mots: „Proposita æquatione hujusmodi, $y \propto l . \frac{nx}{z} . \sqrt{. mm . ox + \frac{pp}{gg} xx}$ — voyez la note suivante — quæ relationem denotet inter se rectarum indeterminatarum x et y seu AB.BC...." et se terminant par la phrase „Unde jam hyperbola data erit, ac describi poterit". Or, les p. 118 et 145 du Manuscrit D portent respectivement les dates 1669 et 1 Febr. 1669.

[2]) Le . doit désigner ici notre signe $\pm$. Il en est évidemment de même dans l'équation de Huygens du Manuscrit D reproduite dans la note précédente.

[3]) Voyez l' „Observatio Quinta" des „Notæ breves" de Florimond de Beaune, se trouvant dans le recueil de 1659 de F. v. Schooten („Geometria à Renato des Cartes etc.")

[4]) Nous avons restitué les . (désignant $\pm$, comme plus haut), là où le copiste, ou l'imprimeur, les avait omis.

[5]) Dans les „Opera Varia" de 1724, où la Pièce est reproduite d'après le texte de 1693, on a imprimé par erreur „positionem".

Maintenant comme p eſt à g, ainſi ſoit $\frac{1}{2}o$ à chacune des longueurs IX et IY leſquelles il faut prendre dans la droite AI. Ainſi ſoit auſſi IX à IV laquelle il faut prendre ſur IK du côté AB s'il y a $-ox$, mais du côté oppoſé s'il y a $+ox$. Et ſoit VM parallèle à AI et puiſſe-t-elle couper la droite IL en M. Ce point M ſera le centre de l'hyperbole cherchée; et les droites MX et MY ſeront les aſymptotes.

Mais s'il n'y a pas de ox dans l'équation, I ſera le centre de l'hyperbole. Il faut alors prendre des longueurs quelconques, égales entr'elles, IX et IY, et après que les points V et M ont été trouvés comme précédemment, on peut mener par I, parallèlement à elles, les aſymptotes MX et MY.

On trouvera enſuite, s'il y a $+m^2$, les points S et R par leſquels doivent paſſer ou bien l'hyperbole ou bien les ſections oppoſées: ils ſeront déterminés en prenant ſur la droite AI, à partir du point I, IS et IR, l'une et l'autre égale à m. Alors l'hyperbole ſera donnée et pourra être tracée. BC y ſera l'ordonnée correſpondant au diamètre lorſque $\frac{\frac{1}{2}og}{p} > m$; mais lorſque $\frac{\frac{1}{2}og}{p} < m$, BC ſera parallèle au diamètre de l'hyperbole ſur laquelle ſe trouve le point C comme ici dans le deuxième cas [Fig. 191I]. Si par haſard le point S tombe en X, le lieu du point C ſera donné par les aſymptotes elles-mêmes. Et s'il n'y a pas de terme m^2, I ſera lui-même un point de l'hyperbole cherchée.

Mais s'il y a $-m^2$ dans l'équation, il faut placer dans l'angle XMI la droite GN parallèle à IX, telle que $GN^2 = IX^2 + IS^2$, ou bien telle que GN = IS s'il n'y a pas de $-ox$; N ſera alors un point de l'hyperbole cherchée qui ſera donc de nouveau donnée.

Prenant dans le premier cas AB $= x$, longueur arbitraire, et lui appliquant l'ordonnée BC ſous un angle donné, laquelle ſe termine à l'hyperbole conſtruite, il faut démontrer que

$$y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{m^2 - ox + \frac{p^2x^2}{g^2}}.$$

Démonſtration. Puiſſe BC, prolongée de part et d'autre s'il en eſt beſoin, rencontrer les aſymptotes en O et Q. D'après la conſtruction IX ou IY $= \frac{\frac{1}{2}og}{p}$ et IV $= \frac{\frac{1}{2}og^2}{p^2}$. Or, le rapport IK : KL eſt égal à $z : n$. Et l'angle IKL eſt également donné. Donc auſſi le rapport IK : IL qui ſoit égal à $z : a$. Par conſéquent, comme IK : IL = IV : IM, on aura IM $= \frac{\frac{1}{2}aog^2}{zp^2}$. Or, comme IM eſt à IX, c.à.d. comme $\frac{\frac{1}{2}aog^2}{zp^2}$ eſt à $\frac{\frac{1}{2}go}{p}$, ou bien comme ag eſt à pz, ainſi eſt ML, ou MI — IL, c. à. d. $\frac{\frac{1}{2}aog^2}{zp^2} - \frac{ax}{z}$ à LO ou LQ; cette dernière ſera donc $\frac{\frac{1}{2}og}{p} - \frac{px}{g}$. Enſuite, puiſque BK = l et LK =

Porro ut p ad g, ita ſit $\frac{1}{2}o$ ad ſingulas IX, IY ſumendas in recta AI; atque ita quoque IX ad IV ſumendam in IK ad partes AB ſi habeatur $-ox$, aut in contrarias ſi habeatur $+ox$; & ſit VM parallela AI, occurratque rectæ IL in M: erit jam M centrum hyperbolæ quæſitæ; aſymptoti vero, rectæ per MX, MY ductæ.

Si verò non habeatur ox in æquatione, erit I centrum hyperbolæ; ſumptiſque IX, IY ad libitum ſed inter ſe æqualibus, inventiſque inde punctis V & M, ut ante, ducentur aſymptoti per I parallelæ ipſis MX, MY.

Jam porro ſi habeatur $+mm$, puncta S & R, per quæ hyperbola vel oppoſitæ ſectiones tranſire debent, invenientur ſumendo in recta AI à puncto I, ſingulas IS, IR æquales m: unde jam hyperbola data erit ac deſcribi poterit, in qua BC erit ordinatim applicata ad diametrum, ſi $\frac{\frac{1}{2}og}{p}$ major quàm m; ſin verò $\frac{\frac{1}{2}og}{p}$ minor quàm m, erit BC parallela diametro hyperbolæ ad quam eſt C punctum, ut hìc caſu ſecundo. Quòd ſi forte punctum S incidat in X, locus puncti C, erunt ipſæ aſymptoti. Si verò non habeatur mm, erit ipſum I punctum in hyperbola quæſita.

At ſi habeatur $-mm$, accommodanda eſt intra angulum XMI recta GN parallela IX, quæque poſſit quadrata ab IX et IS [6]), vel tantum ipſi IS æqualis, ſi non habeatur ox; eritque punctum N in hyperbola quæſita, quæ proinde rurſus data erit.

Sumpta enim in caſu primo AB $= x$ ad arbitrium, eique applicata BC $= y$ in angulo dato, quæ ad hyperbolam inventam terminetur, oſtendendum ſit quòd

$$y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - ox + \frac{ppxx}{gg}}.$$

DEMONSTRATIO.

Occurrat BC utrinque ſi opus ſit producta, aſymptotis in O & Q. Ex conſtructione eſt IX vel IY $= \frac{\frac{1}{2}og}{p}$, IV $= \frac{\frac{1}{2}ogg}{pp}$. Ratio verò data IK ad KL, eadem nempe quæ z ad n. Sed & angulus IKL datus eſt. Ergo & ratio IK ad IL, quæ ſit ea quæ z ad a. Ergo quia ut IK ad IL ita IV ad IM, erit IM $= \frac{\frac{1}{2}aogg}{zpp}$. Ut autum IM ad IX, hoc eſt ut $\frac{\frac{1}{2}aogg}{zpp}$ ad $\frac{\frac{1}{2}go}{p}$, ſive ut ag ad pz, ita ML, ſive MI minùs IL, hoc eſt $\frac{\frac{1}{2}aogg}{zpp} - \frac{ax}{z}$ ad LO vel LQ; quæ itaque erit $\frac{\frac{1}{2}og}{p} - \frac{px}{g}$. Porro quia BK $= l$, & LK $= \frac{nx}{z}$, erit BL

[6]) Le copiſte avait écrit par erreur: IX vel IS.

$\frac{nx}{z}$, on aura BL $= l - \frac{nx}{z}$; et en retranchant cette dernière de BC $= y$, on trouve LC $= y - l + \frac{nx}{z}$. Mais d'après une propriété de l'hyperbole le rectangle QCO sera égal au rectangle YSX. D'autre part le rectangle QCO est égal à LO² — LC², c. à. d. au carré de $\frac{\frac{1}{2}go}{p} - \frac{px}{g}$ diminué du carré de $y - l + \frac{nx}{z}$; la différence de ces carrés est

$$\frac{\frac{1}{4}g^2o^2}{p^2} - ox + \frac{p^2x^2}{g^2} - y^2 + 2ly - l^2 + \frac{2nxy}{z} + \frac{2lnx}{z} - \frac{n^2x^2}{z^2}.$$

C'est donc cette expression qui est égale au rectangle YSX, c. à. d. à IX² — IS² ou $\frac{\frac{1}{4}g^2o^2}{p^2} - m^2$, puisque IX $= \frac{\frac{1}{2}go}{p}$ et IS $= m$. En supprimant $\frac{\frac{1}{4}g^2o^2}{p^2}$ de part et d'autre dans cette équation, on trouvera

$$y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{m^2 - ox + \frac{p^2x^2}{g^2}},$$

ce qu'il fallait obtenir.

Dans le deuxième cas le rectangle QCO est égal à LC² — LO², et le rectangle YSX à IS² — IX². D'où l'on calcule la même valeur pour y que dans le premier cas.

Mais le troisième cas est celui où l'on a $-m^2$, l'équation étant

$$y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{-m^2 + ox + \frac{p^2x^2}{g^2}}.$$

Puisse GN prolongée rencontrer l'autre asymptote en D. Ici il apparaîtra de la même manière que plus haut, que LO ou LQ est égale à $\frac{\frac{1}{2}go}{p} + \frac{px}{g}$ et LC $= y + \frac{nx}{z} - l$. Et d'après une propriété de l'hyperbole on aura: rectangle QCO = rectangle DNG ou NG², c. à. d. $\frac{\frac{1}{4}g^2o^2}{p^2} + m^2$, puisque XI $= \frac{\frac{1}{2}go}{p}$ et IS $= m$, à la somme des carrés desquelles nous avons rendu égal le carré GN² par construction. Or, le rectangle QCO est égal à LO² — LC², c. à. d. à

$$\frac{\frac{1}{4}g^2o^2}{p^2} + ox + \frac{p^2x^2}{g^2} - y^2 - \frac{2nxy}{z} - \frac{n^2x^2}{z^2} + 2ly + \frac{2nlx}{z} - l^2.$$

Cette expression est donc égale à $\frac{\frac{1}{4}g^2o^2}{p^2} + m^2$. En supprimant $\frac{\frac{1}{4}go^2}{p^2}$ de part et d'autre dans cette équation on obtient

$$y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{-m^2 + ox + \frac{p^2x^2}{g^2}}.$$

Et la marche de la démonstration est la même dans le quatrième cas et dans tous les autres, en tenant toujours compte des signes + et —.

S'il n'y a pas de $\frac{nx}{z}$ dans l'équation, les points M et V coïncident. Si dans ce cas p

$= l - \frac{nx}{z}$; quâ ablatâ à BC $= y$, fit LC $= y - l + \frac{nx}{z}$. Propter hyperbolam verò erit rectangulum QCO æquale rectangulo YSX. Sed rectangulum QCO æquale eſt quadrato LO minus quadrato LC, hoc eſt quadrato ab $\frac{\frac{1}{2}go}{p} - \frac{px}{g}$ minùs quadrato ab $y - l + \frac{nx}{z}$; quorum quadratorum differentia eſt $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} - ox + \frac{ppxx}{gg} - yy + 2ly - ll + \frac{2nxy}{z} + \frac{2lnx}{z} - \frac{nnxx}{zz}$. Ergo hæc æquatur rectangulo YSX, hoc eſt quadrato IX minùs quadrato IS, hoc eſt $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} - mm$; quia IX $= \frac{\frac{1}{2}go}{p}$ & IS $= m$. In qua æquatione deleto utrinque $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp}$, invenietur $y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - ox + \frac{ppxx}{gg}}$, ut oportebat.

In ſecundo caſu rectangulum QCO æquatur quadrato LC minus quadrato LO; & rectangulum YSX quadrato IS minus quadrato IX. Unde rurſus valor y idem qui caſu primo invenietur.

Sit tertius caſus quo habeatur $- mm$, ſitque æquatio

$$y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{- mm + ox + \frac{ppxx}{gg}},$$

producta GN occurrat alteri aſymptoto in D. Hìc jam eadem ratione qua prius, apparebit LO vel LQ eſſe $\frac{\frac{1}{2}go}{p} + \frac{px}{g}$, & LC $= y + \frac{nx}{z} - l$. Et propter hyperbolam erit rectangulum QCO = rectangulo DNG ſeu quadrato NG, hoc eſt $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} + mm$, quia XI $= \frac{\frac{1}{2}go}{p}$, & IS $= m$, quorum quadratis æquale fecimus quadratum GN. Rectangulum autem QCO æquatur quadrato LO minus quadrato LC, hoc eſt $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} + ox + \frac{ppxx}{gg} - yy - \frac{2nxy}{z} - \frac{nnxx}{zz} + 2ly + \frac{2nlx}{z} - ll$. Ergo hoc æquale $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} + mm$. In qua æquatione deleto utrinque $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp}$, invenitur

$$y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{- mm + ox + \frac{ppxx}{gg}}.$$

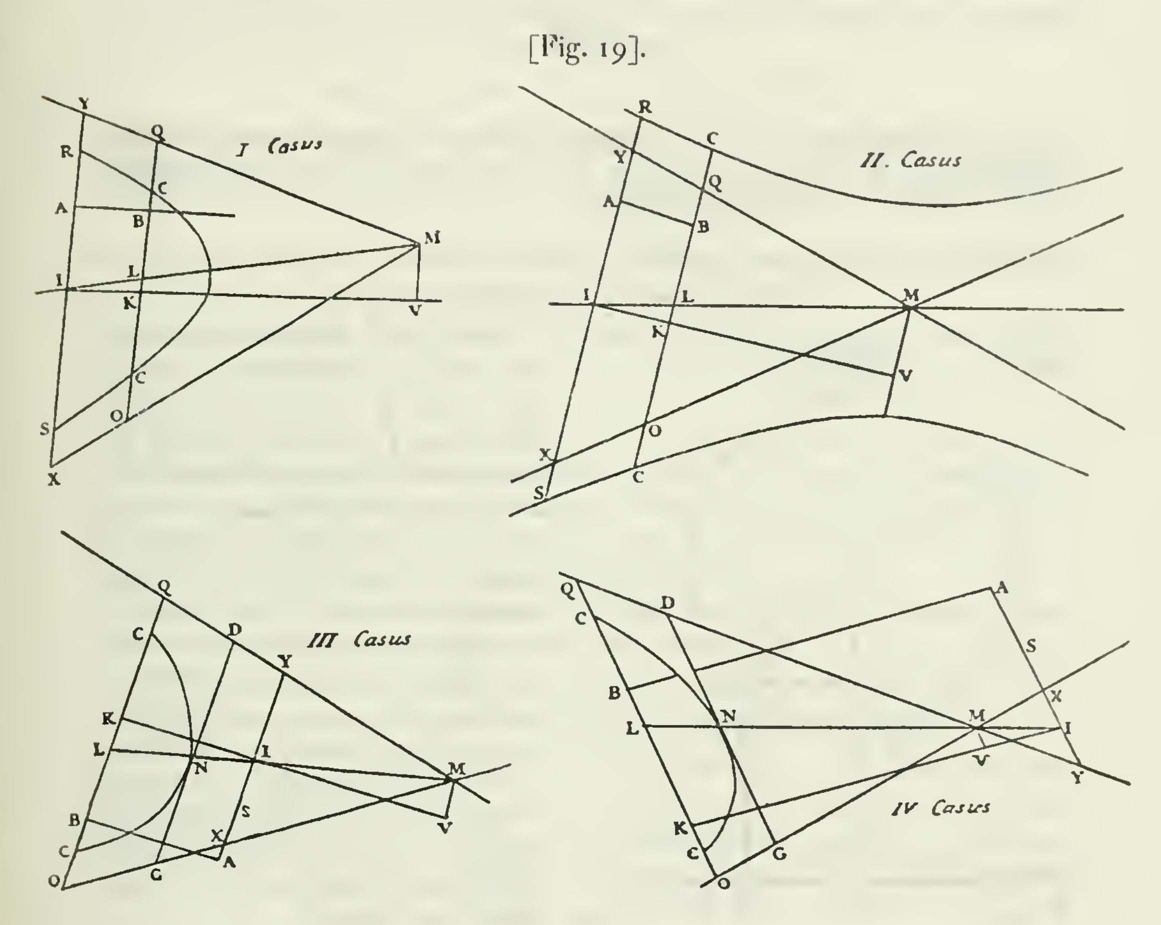
Eademque eſt demonſtrandi ratio in casu quarto, & aliis quibuſvis, habita ratione ſignorum + & —.

Cum non habetur $\frac{nx}{z}$ in æquatione, puncta M & V unum ſunt, tunc verò ſi $p = g$,

$= g$, c. à. d. fi l'on a x^2 au lieu de $\frac{p^2x^2}{g^2}$, les afymptotes feront toujours à angles droits, puifque nous avons fait que comme p eft à g, ainfi eft $\frac{1}{2}o$ à IX et à IY, et auffi IX à IV; ici on aura donc IX = IY = IV = $\frac{1}{2}o$, de forte que le point V fe trouve fur une demie circonférence de cercle conftruite fur XY et que l'angle XVY eft donc droit. Il paraît en outre, puifque IM = $\frac{\frac{1}{2}aog^2}{zp^2}$, que lorfque $ag = zp$, c. à. d. $g : p = z : a$, on aura IM = $\frac{\frac{1}{2}og}{p}$: cette longueur fera donc égale à IX et IY qui avaient auffi la valeur $\frac{\frac{1}{2}og}{p}$. Par conféquent dans ce cas les afymptotes feront à angles droits, puifque cette fois le point M fe trouvera fur une circonférence de cercle décrite fur XY du centre I.

hoc eſt ſi habeatur $+ xx$ pro $\frac{ppxx}{gg}$, erunt ſemper aſymptoti ſibi mutuò ad angulos rectos, quia ut p ad g, ita fecimus $\frac{1}{2}o$ ad IX & ad IY, & ita IX ad IV; fiunt enim jam æquales IX, IY, IV & ſingulæ $= \frac{1}{2}o$, unde punctum V eſt in ſemicirculo ſuper XY & proinde angulus XVY rectus. Item quia IM $= \frac{\frac{1}{2}aogg}{zpp}$, patet quod ſi $ag = zp$, hoc eſt

[Fig. 19].



ſi g ad p ut z ad a, tunc erit IM $= \frac{\frac{1}{2}og}{p}$, ac proinde æqualis ipſi IX & IY quæ etiam erant $\frac{\frac{1}{2}og}{p}$. Adeoque hoc caſu erunt aſymptoti ſibi mutuo ad angulos rectos; cum rurſus punctum M ſit futurum in circumferentia circuli deſcripti ſuper XY centro I.

X.

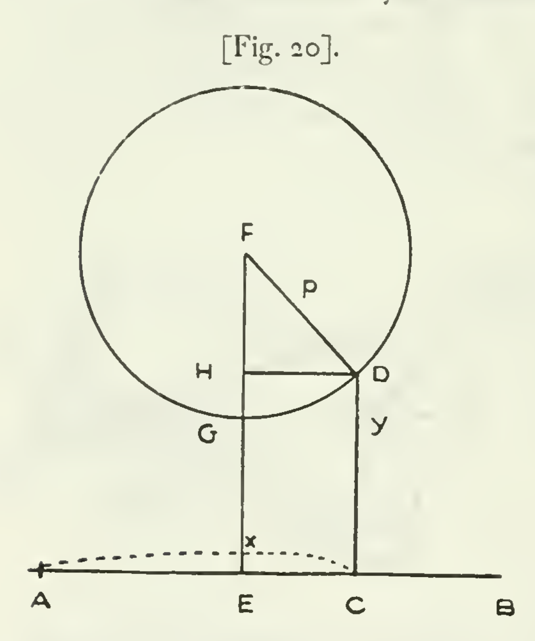
SUR LES LIEUX PLANS D'APOLLONIOS.

1678.

Regiſtres, T. VII, f. 196 v et f. 251 v. Samedy 13e d'Aouſt [1678] Mr. Hugens a donné une demonſtration des lieux plans d'Apollonius, et de tous ceux ou le lieu du point que l'on cherche eſt une circonference de cercle dont ſuit la coppie.

Conſtruction des lieux plans d'Apollonius, et de tous ceux où le lieu du point que l'on cherche eſt une Circonference de cercle.

[Fig. 20].



A [Fig. 20] eſtant un point donné dans la ligne AB donnée de poſition; et le point que l'on cherche pour la ſolution du probleme D. Duquel ſoit menée ſur AB la perpendiculaire DC. Si l'indeterminee longueur AC eſt appellée x et CD auſſy indeterminee y, et que l'on trouue une equation[1]) dans laquelle d'un coſté il y ait yy ſeul et parmy les termes de l'autre coſté $-xx$ ſans qu'il y ait xy, comme ſi de l'autre coſté il y a $by \,.\, cc \,.\, ax - xx$ (eſtant a, b, c des lignes données) ou ſeulement $-xx$ avec un ou deux des trois autres termes. Alors le lieu du point D ſera touſjours une circonference de cercle duquel on trouvera le centre, et le diametre de cette façon.

---

[1]) Dans l'équation qui suit le . équivaut apparemment à notre signe $\pm$ (comme dans la Pièce IX qui précède). Il en est de même dans les équations suivantes. Le signe ♀ (vers la fin de la Pièce) a la même signification. Nous avons dû apporter plusieurs petites corrections aux équations, le copiste ayant omis le . ou écrit x au lieu de ∞ etc.
Comparez sur le . la p. 230 du T. XIV.

Si le terme by ſe trouve l'on reduira premierement l'equation a la maniere accouſtumée, et l'on aura $y \infty . \frac{1}{2}b . \sqrt{\frac{1}{4}bb.cc.ax - xx}$. mais ſi le terme by n'y eſtoit point on auroit ſans reduction $y \infty . \sqrt{cc.ax - xx}$ enſuitte ſi le terme ax ſe trouue on adjoutera aux termes de $ax - xx$ un autre terme en ſorte que le compoſé des trois faſſe un quarré lequel autre terme ſera neceſſairement $- \frac{1}{4}aa$ ſoit qu'il y ait $+ ax$ ou $- ax$. mais affin de conſerver l'égalité aux deux coſtés de l'equation on adjoutera $+ \frac{1}{4}aa$ aux termes de $\frac{1}{4}bb . cc$ de ſorte qu'il y aura

$$y \infty . \tfrac{1}{2}b . \sqrt{\tfrac{1}{4}bb . cc + \tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{4}aa . ax - xx}$$

ou il paroiſt que $- \frac{1}{4}aa . ax - xx$ eſt un quarré ſouſtrait des quantités connues ayant la racine $\frac{1}{2}a . x$.

Que ſi au lieu de $\frac{1}{4}bb . cc + \frac{1}{4}aa$ l'on eſcrit pp l'on aura

$$y \infty . \tfrac{1}{2}b . \sqrt{pp - \tfrac{1}{4}aa . ax - xx}$$

et la conſtruction ſera comme s'enſuit.

Du point A dans la ligne AC l'on prendra AE eſgale a $\frac{1}{2}a$ ſçavoir vers le meſme coſté ou l'on a ſuppoſé AC ſi dans l'equation il y a $+ ax$, mais du coſté contraire s'il y a $- ax$.

Enſuitte du point E on menera EF perpendiculaire ſur AB et eſgale a $\frac{1}{2}b$, et cela du coſté ou l'on a ſuppoſé la perpendiculaire CD s'il y a $+ \frac{1}{2}b$, ou du contraire s'il y a $- \frac{1}{2}b$; et ſi $\frac{1}{2}b$ ne s'y trouve point le point F ſera le meſme que E. Ce point F ſera le centre de la circonference dans laquelle le point D que l'on cherche ſe trouue partout, et le demy diametre ſe doit prendre egal à la ligne p.

Que ſi dans l'equation donnee du commencement le terme ax ne ſe fut point trouué, l'effection du quarré en adjoutant $\frac{1}{4}aa$ n'euſt point eu lieu, et l'equation reduitte auroit eſté $y \infty \frac{1}{2}b . \sqrt{pp - xx}$ et alors le point C eſt le meſme que A.

La demonſtration de la conſtruction eſt facile car ſi par exemple l'equation eſt $y \infty + \frac{1}{2}b . \sqrt{pp - \frac{1}{4}aa + ax - xx}$ et que l'on ait trouvé la circonference DG ſuivant ce qui vient d'eſtre dit; en prenant dans elle quelque point D d'ou l'on tire DC perpendiculaire ſur AB, et DH perpendiculaire ſur FE, alors EC ou DH ſera $x - \frac{1}{2}a$ ou $\frac{1}{2}a - x$ et FH $\frac{1}{2}b - y$ ou $y - \frac{1}{2}b$ et les quarrés de FH et HD enſemble $\frac{1}{4}bb - by + yy + xx - ax + \frac{1}{4}aa$ egaux au quarré de FD $\infty\, pp$ et par conſequent $yy \infty\, pp + by - \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa + ax - xx$,

laquelle equation eſtant reduitte vient $y \infty \frac{1}{2}b . \sqrt{pp - \frac{1}{4}aa + ax - xx}$ qui eſt la meſme qui a eſté donnée. Et dans tous les autres cas la demonſtration eſt la meſme, ou plus facile quand quelques termes manquent dans l'equation, ſeulement les lignes + et — ſe changent en differentes manieres.

D'icy l'on peut tirer la regle generale pour ces conſtructions ſçavoir quand l'equation reduitte eſt $y \infty \frac{1}{2}b . \sqrt{qq . ax - xx}$ ſans auoir la peine de former le quarré auec

$.ax - xx$, il faut feulement trouver les points C et F. comme a efté dit en prenant AE $\infty \frac{1}{2}a$ et EF $\infty \frac{1}{2}b$, et le demi diametre FD fera egal a $qq + \frac{1}{4}aa$.

Cette Regle comprend toutes les equations par les quelles le lieu du point qu'on cherche eft une circonference d'un cercle hormis une dont parle Defcartes, dans laquelle *aam* eft egal a *pzz*, ou le lieu en un certain cas peut eftre une circonference de cercle mais ce cas eft tout a fait fingulier [2]).

[2]) Il s'agit ici du problème de Pappos difcuté par Descartes dans le premier et dans le second livre de „La Géométrie". A propos du lieu géométrique cherché Descartes dit, dans le second livre, que „c'est [parfois] une ellipse, excepté seulement si la quantité *aam* est égale à *pzz* et que l'angle ILC soit droit, auquel cas on a un cercle au lieu d'une ellipse". L'endroit se trouve à la p. 29 de l'édition de F. v. Schooten de 1683, et les p. 188—189 contiennent le commentaire de v. Schooten sur ce cas particulier.
Dans la Pièce originale, telle qu'elle se trouve au Manuscrit E (p. 130—131), cette remarque finale fait défaut. A-t-elle été ajoutée à la suite d'une discussion à l'Académie?

XI.

RECTIFICATION ET QUADRATURE DE L'ÉPICYCLOÏDE.

1678—1679.

Regiftres, T. VII, f 227v: Le Samedy 3e de Decembre 1678 la Compagnie eftant affemblée Mr. Huguens a leu les demonftrations de la mefure des lignes epicycloides qu'il donnera au premier jour pour mettre dans les Regiftres.

T. VII, f. 233v: Le Samedy 7e de Janvier 1679 Mr. Huguens a continué la demonftration de la mefure des epicycloides.

Cette Pièce qui (malgré la f. 227v du T. VII) ne fe trouve pas dans les Regiftres, mais dont nous poffédons le manufcrit, a déjà été publiée par nous §§ 2 et 3 de l'Appendice III à la Troifième Partie de l'„Horologium ofcillatorium" dans le T. XVIII (p. 400 et fuiv.); Huygens y indique, conformément aux Regiftres, qu'elle a été lue par lui à l'Académie le 3 décembre 1678.

XII.

SUR LES ÉQUATIONS SOLIDES.

1680.

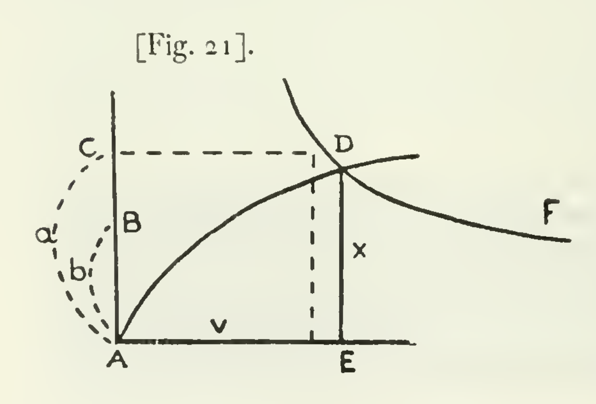
Regiſtres, T. IX, f. 17: Le Samedy 2e de Mars 1680... Mr. Hugens a auſſi propoſé une methode pour trouuer les équations ſolides.

Nous ne poſſédons pas le texte de cette communication. C'eſt pourquoi nous reproduiſons ici les p. 227—228 du Manuſcrit E (les p. 221 et 232 portent reſp. les dates du 11 janvier et du 22 mars 1680) qui en contiennent ſans doute la ſubſtance ou plutôt le début.

Méthode pour conſtruire les équations cubiques et quarréquarrées en les reſolvant en deux lieux.

§ 1. Je commenceray par le probleme des 2 moienes entre deux lignes donnees. Soient ces lignes a et b; l'une des moienes, qui ſuit apres a, ſoit x; donc l'autre moiene eſt $\frac{xx}{a}$, et le rectangle de ces 2 ſçavoir $\frac{x^3}{a}$ eſt egal a ab. Et $x^3 \infty aab$. Je diviſe de coſtè et d'autre par x. Vient $xx \infty \frac{aab}{x}$. J'egale enſuite chaque coſtè, à un rectangle bv, ſuppoſant v inconnue. J'ay donc $bv \infty xx$ et $\frac{aab}{x} \infty bv$ ou $aa \infty xv$. l'un eſtant un lieu a une parabole dont le coſtè droit eſt b. l'autre une hyperbole aux aſymptotes de laquelle le rectangle eſt egal à aa. Je ſuppoſe que l'inconnue x ſoit perpendiculaire ſur l'inconnue v, que je prens dans la droite AE depuis le point A.

[Fig. 21].



Soit AD [Fig. 21] une parabole dont le ſommet eſt A, l'axe AE. le coſté droit AB egal à b. Soit auſſi aux aſymptotes AE, AC que je ſuppoſe faire un angle droit, l'hyperbole DF, dont le rectangle ſoit egal à aa. Et qu'elle coupe la parabole en D d'ou ſoit menée DE perpendiculaire ſur AE. Je dis que DE eſt x, ſcavoir l'une des moienes qui ſuit a. Car il paroit [que] $xx \infty bv$ a cauſe de la parabole. Et que $vx \infty$

aa a caufe de l'hyperbole, ou $bvx \infty aab$, ou $bv \infty \frac{aab}{x}$. Mais xx eftoit auffi egal à bv. donc $xx \infty \frac{aab}{x}$. Et $x^3 \infty aab$.

§ 2. Soit derechef $x^3 \infty aab$. $va \infty xx$ parabole dont le parametre eft a. $\frac{aab}{x} \infty va$. $ab \infty xv$. hyperbole dont le rectangle eft ab.

§ 3. Cette methode confifte a partager l'équation donnée en deux, et par ce moyen la reduire a deux lieux dont l'interfection faffe connoiftre la racine que l'on cherche. Par ou l'on trouve les conftructions les plus fimples.

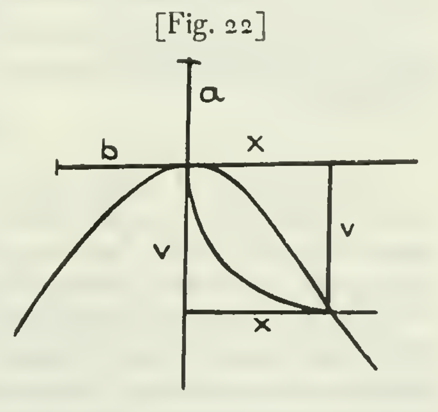
Nous omettons le refte où Huygens répète encore une fois la conftruction du § 1.

Huygens n'ignore point — comparez la p. 223 du T. XII — que cette méthode n'eft autre que celle de Ménæchme; à la p. 235 du même Manufcrit on trouve ce qui fuit:

$x^4 \infty aabx$. $\quad vv \infty \frac{x^4}{aa} \quad bx \infty vv$

$v \infty \frac{xx}{a}$ $\quad$ deux paraboles de Menechme [Fig. 22].

$av \infty xx$



[Fig. 22]

Ici v eft précifément la deuxième moyenne proportionnelle: on a $a:x = x:v = v:b$. Il en eft de même dans le § 2 lequel donne une deuxième conftruction de Ménæchme rapportée, comme la première, par Eutokios.

Huygens n'eft plus ou moins original que dans le § 1 où v ne défigne pas la deuxième moyenne proportionnelle.

Dans la fuite de fon difcours à l'Académie Huygens a fans doute donné d'autres exemples. En effet, à la p. 227 du Manufcrit E il écrit en marge: Cette methode eft dans le livre D [antérieur à 1680], pratiquee fans explication dans quelques exemples, comme des 2 moyenes proportionelles et de la perpendiculaire a une hyperbole d'un point donnè. Voyez, aux p. 334—360 qui fuivent, l'Appendice de 1682, tiré du Manufcrit 11; et consultez surtout les notes 4 et 5 de la p. 335 sur les relati ons de Huygens avec de la Hire. Dans la f. 66 des Chartæ mathematicæ, qui traite auffi des normales abaiffées d'un point donné fur une conique, Huygens renvoie également au Manuscrit D. Nous n'y trouvons cependant pas l'endroit dont il entend parler. Il s'agit peut-être d'un feuillet enlevé.

XIII.

THÉORÈME SUR LES POINTS D'INTERSECTION DES CONIQUES DONT LES AXES SONT PARALLÈLES OU À ANGLES DROITS.

Le théorème principal eſt précédé par deux autres propoſitions qu'on peut conſidérer comme des lemmes.

1680 [1].

Regiſtres, T. IX, f. 32: Le Samedy 23 de Mars 1680... Mr Hugens a donné le théorème ſuivant touchant les ſections coniques.

(Le brouillon du Manuscrit E — voyez l'Appendice — porte la date du 22 mars 1680.)

Theoreme. Si une ſection conique coupe une autre ſection conique en 4. points, et que leurs axes ſoient paralleles ou a angles droits l'un a l'autre ces quatre points ſeront dans la circonference d'un cercle. Les hyperboles oppoſees ſont comptees pour une ſection.

D'ou ſenſuit que ſi une ſection conique coupe une parabole en 4 points ayant leur axes paralleles ou a angles droits l'un a l'autre, la ſomme des perpendiculaires, qui tombent des points d'interſection ſur l'axe de la parabole d'un, et d'autre coſté ſeront egales, ou l'une perpendiculaire d'un coſté aux trois de l'autre.

Regiſtres, T. IX, f. 33—35: Le Samedy 30e de Mars [1680] Mr Hugens a donné la demonſtration du Theoreme qu'il auoit propoſé des ſections coniques qui ſe coupent en 4. points dont ſuit la copie.

1re Propoſition.

Si une parabole eſt coupée par une ſection conique en 4 points, et que leur axes ſoient paralleles ou a angles droits l'un a l'autre les perpendiculaires menées des 4 points d'interſection ſur l'axe de la parabole d'un coſté et d'autre, auront leurs ſommes egales, ou l'un d'un coſté ſera eſgale aux trois de l'autre coſté.

Cecy ſe demontre facilement par Algebre, parce qu'en mettant pour inconnue l'une de ces perpendiculaires, il paroit qu'on parvient neceſſairement a une equation quarréquarrée, ou manque le ſecond terme ſçauoir celuy qui eſt affecté ſous le cube, d'ou l'on ſçait que les valeurs affirmées de cette inconnue ſont enſemble egales aux valeurs negatiues de la meſme, c'eſt a dire les perpendiculaires d'un coſté enſemble egales a celles de l'autre coſté, ou l'une aux trois [2]).

---

1) Comparez la note 5 de la p. 284 du T. VIII.
Voyez sur la publication de la Pièce XIII par F. Schuh en 1921 le début de la partie *B* de l'Appendice.

2) La parabole étant représentée par l'équation $y^2 = 2px$, l'ellipse ou hyperbole ayant un de ses

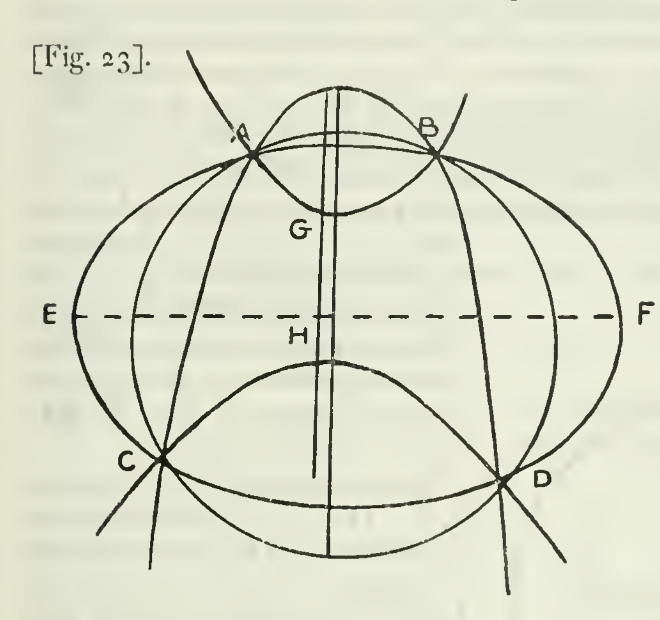
2e Propofition.

Par trois points donnez qui ne foient pas en une ligne droite, l'on peut decrire une parabole dont l'axe foit parallele a une ligne donnée, pourveu que les points foient donnez en forte, que des paralleles qu'on menera de chacun a la ligne donnée, il n'y en ait point de coincidentes.

Ce probleme fe conftruit aifement par la conuerfe de la 49e du 1. Livre des Coniques [3]).

3e Propofition.

[Fig. 23].



Si deux fections coniques fe coupent en 4 points, et que leurs axes foient paralleles ou a angles droits l'un a l'autre, les 4 points d'interfection font dans la circonference d'un cercle.

Les hyperboles oppofees font comptees pour une fection.

Soient deux fections coniques [Fig. 23] dont les axes EF, GH foient paralleles ou a angles droits et les 4. points de leur interfection A, B, C, D, je dis qu'ils font dans la circonference d'un cercle.

---

axes parallèle à celui de la parabole s'écrira (nous nous servons d'équations de formes modernes) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$. En éliminant x, on trouve en effet une équation du 4ième degré en y où manque le terme en y^3. Il en résulte que la somme algébrique des quatre valeurs d'y qui satisfont à cette équation eft nulle; or, ce sont là les quatre perpendiculaires des points d'intersection des deux coniques sur l'axe de la parabole. Il en est de même lorsque la deuxième conique est une parabole dont l'axe est parallèle à celui des y.

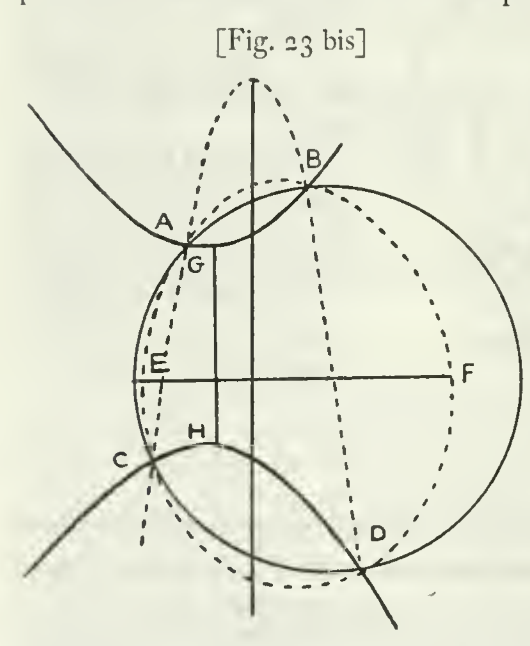
3) Apollonios, Conica I, prop. 49 (d'après le texte latin de l'édition de I. L. Heiberg, Lipsiæ, Teubner, 1891): „Si recta parabolam contingens cum diametro concurrit, per contactum autem recta diametro parallela ducitur, a uertice autem recta ordinate ductæ parallela, et fit, ut pars contingentis inter ordinate ductam punctumque contactus posita ad partem parallelæ inter punctum contactus et ordinate ductam positam, ita recta aliqua ad duplam contingentis, quæcunque recta a sectione [contingenti parallela] ad rectam per punctum contactus diametro

DEMONSTRATION.

Il y aura tousjours neceſſairement 3. de ces points ſituez en ſorte qu'on puiſſe decrire une parabole par les trois, de laquelle l'axe ſoit parallele a l'axe de l'une des ſections coniques données; ou bien les quatre points conſtitueront un rectangle, et ainſi ils ſeront manifeſtement dans la circonference d'un cercle. Soient les trois points A, B, C [Fig. 23 bis] et la parabole decrite CAB laquelle coupera neceſſairement chacune des ſections donnees dans un quatrieme point, et je dis que ce point ſera D, ou ces deux ſections ſe coupent entr'elles.

Car puiſque la parabole coupe la ſection GH, les perpendiculaires menées des points A, B, C et du 4e point d'interſection ſur l'axe de la parabole auront leurs ſommes egales de part et d'autre par la 1.re propoſition. Et puiſque la meſme parabole coupe la ſection EF les meſmes perpendiculaires des points A, B, C ſur l'axe de la parabole, et celle du 4e point d'interſection auront encore leurs ſommes de part et d'autre egales, donc cette 4e perpendiculaire eſt neceſſairement la meſme pour l'interſection de la parabole auec les deux ſections GH et EF puiſqu'il n'y a pas deux appliquées de meſme longueurs ſur l'axe de la parabole, et du meſme coſté, donc les points d'interſection de la parabole auec les deux ſections coniques outre les interſections A, B, C conuiennent en un et par conſequent ce point eſt D ou les deux ſections s'entrecouppent.

[Fig. 23 bis]



Mais un cercle paſſant par les points A, B, C [Fig. 23 bis] doit auſſi couper la parabole en un 4e point en ſorte que les appliquées de ce point et des points A, B, C ſur l'axe de la parabole aient leurs ſommes egales de part et d'autre. donc ce 4e point eſt encore le meſme ou la parabole coupoit les deux ſections ſçauoir le point D et ainſi il paroit que les 4 points A, B, C, D ſont dans la circonference d'un cercle.

---

parallelam ductam ducitur, quadrata æqualis est rectangulo comprehenso recta adsumpta rectaque ab illa ad punctum contactus abscisa". La „recta adsumpta" est le double paramètre $2p'$ de l'équation $y'^2 = 2p'x'$ de la parabole par rapport à des axes obliques conjugués (diamètre et tangente). On peut en effet déduire du théorème énoncé que lorsque la direction du diamètre et trois points de la parabole sont donnés, celle-ci est déterminée; la construction du paramètre peut être effectuée.

APPENDICE I [1])

À LA PIÈCE I DE LA P. 225

(RÈGLE POUR TROUVER LES LOGARITHMES, 1666 OU 1667).

[1661 ?]

[Fig. 24]

§ 1. Data multitudine proportionalium, minore termino et ratione proportionis, invenire proportionalium ſummam.

Sint proportionales continuè [Fig. 24] [2]) $a \; b \; \frac{bb}{a} \; \frac{b^3}{aa} \; \frac{b^4}{a^3}$ quarum minor terminus a. Ratio proportionis a ad b. Quæritur ſumma dictarum proportionalium [3]).

$$\frac{b \;\top\; a - a + x \;\top\; x}{x \;\infty\; \frac{aa}{b-a}}$$

Fiet ut $b - a$ ad a ita a ad $\frac{aa}{b-a}$. Tunc erunt continue proportionales, et in proportione a ad b, iſtæ

---

[1]) Manuscrit 14, f. 14 et suiv. Les feuilles antérieures du Manuscrit contiennent d'abord quelques dessins de 1658 (voyez celui d'octobre 1658 en tête du présent Tome), ensuite quatre pages „de motu corporum reflexo sive de Percussione Hypotheses" (voyez les p. 52—53 du T. VII) et quatre pages de calculs sur les normales à la parabole etc.; c'est tout. Après les calculs sur les capitaux et les intérêts, le Manuscrit contient six pages sur le cours du Rhin etc.; ce sont des extraits de documents allant de 1636 à 1670. Pour être complets nous mentionnons aussi (beaucoup plus loin dans le manuscrit qui contient après les extraits un grand nombre de pages vides) deux pages consacrées à des notes payées par Huygens en 1664, 1665 et 1666: voyez à la p. 168 du T. XVII la note de 1664 de l'horloger Oosterwijck. Rien certes n'empêche que les calculs qui constituent le présent Appendice ne datent de 1661, époque à laquelle Huygens dit (p. 12 qui précède) avoir commencé à s'intéresser aux logarithmes. Dans les calculs des §§ 1—6 les logarithmes ne figurent qu'au § 1. Mais voyez aussi le § 7.

[2]) Comparez avec cette figure celle de 1652 de la p. 209 du T. I, la „logarithmique" dont nous parlons aussi à la p. 204 de l'Avertissement qui précède.

[3]) Déjà en 1646 (T. XI, p. 53 et suiv.) Huygens s'était intéressé à la recherche de la somme des suites géométriques, mais sans se servir de logarithmes.

$$\frac{aa}{b-a};\ \frac{aa}{b-a}+a;\ \frac{aa}{b-a}+a+b;\ \frac{aa}{b-a}+a+b+\frac{bb}{a};$$

$$\frac{aa}{b-a}+a+b+\frac{bb}{a}+\frac{b^3}{aa}\ldots$$

quarum ab ultima ſi auferatur $\frac{aa}{b-a}$ patet reſiduum æquari ſummæ proportionalium quæſitæ.

per Logarithmos.

A duplo logar°. termini minoris auferatur log'. differentiæ inter terminum minorem et ſequentem, et habebitur logar. $\frac{aa}{b-a}$. Reſiduo addatur logar. proportionis datæ, hoc eſt differentia log.orum termini minoris et ſequentis ſive quorumlibet duorum continue ſequentium, multiplicatus per numerum multitudinis terminorum. Summa erit logar. numeri, a quo numero ſi auferatur numerus logarithmi $\frac{aa}{b-a}$ ante inventi; relinquitur ſumma proportionalium quæſita.

§ 2. Iiſdem datis, invenire proportionalium ſummam triangularem incipiendo a minima.

$$\begin{array}{ccccc}
a & b & \frac{bb}{a} & \frac{b^3}{aa} & \frac{b^4}{a^3} \\
a & b & \frac{bb}{a} & \frac{b^3}{aa} & \\
a & b & \frac{bb}{a} & & \\
a & b & & & \\
a & & & & \\
\hline
5a+4b+ & \frac{3bb}{a} + & \frac{2b^3}{aa} + & \frac{b^4}{a^3} &
\end{array}$$

Cum ſint proportionales ſupra inventæ $\frac{aa}{b-a}+a;\ \frac{aa}{b-a}+a+b;\ \frac{aa}{b-a}+a+b+\frac{bb}{a};\ \frac{aa}{b-a}+a+b+\frac{bb}{a}+\frac{b^3}{aa};\ldots$ idque in ratione a ad b. inveniatur earum ſumma per præcedentem. ab qua ſi auferatur $\frac{aa}{b-a}$ toties quot ſunt termini, facile apparet reſiduum fore ſummam triangularem quæſitam.

§ 3. Aliter. Proportionalium $a, b, \frac{bb}{a}$ &c ſumma per præced. reperta vocetur s. Cum itaque in eadem proportione a ad b ſint quoque proportionales æque multæ $\frac{aa}{b-a}+a;\ \frac{aa}{b-a}+a+b$; &c. erunt ut a ad s ita $\frac{aa}{b-a}+a$ ad ſummam omnium poſteriorum. ſive permutando ut a ad $\frac{aa}{b-a}+a$, hoc eſt, ut $b-a$ ad b ita s ad ſummam omnium poſteriorum, a qua ſi auferatur $\frac{aa}{b-a}$

ductum in numerum terminorum, relinquitur ut ante ſumma triangularis proportionalium $a, b, \frac{bb}{a}$ &c. incipiendo ab a.

§ 4. Prima propoſitio aliter.

$$a \top m \text{ —— } \frac{aa}{b-a} + a \top n$$

$$b - a \top b \text{ —— } m \,/\, \frac{bm}{b-a} \infty\, n$$

Sit m maxima proportionalium : a minima; b quæ proxime poſt a ſequitur. s ſumma proportionalium $a, b, \frac{bb}{a}$ &c. n maxima proportionalium ſeriei $\frac{aa}{b-a} + a$, $\frac{aa}{b-a} + a + b$ &c. Quum ſint in prima propoſitione proportionales $\frac{aa}{b-a} + a$; $\frac{aa}{b-a} + a + b$; &c. totidem quot $a, b, \frac{bb}{a}$ &c. et in ratione eadem a ad b patet eſſe ſicut a ad maximam proportionalium $a, b, \frac{bb}{a}$ &c. ita $\frac{aa}{b-a} + a$ ad maximam ſui ordinis n. A qua ſi auferatur $\frac{aa}{b-a}$, fit (ut ex eadem prima propoſitione patet) reſiduum $n - \frac{aa}{b-a}$ æquale ſummæ s proportionalium $a, b, \frac{bb}{a}$ &c. Sed $n \infty \frac{bm}{b-a}$. Ergo $s \infty \frac{bm-aa}{b-a}$.

§ 5. Secunda aliter.

Erat $b - a \top b$ —— $s \top$ ſummam poſteriorum.

$$\text{Ergo } b - a \top b \text{ —— } \frac{bm-aa}{b-a} \,/\, \left.\begin{matrix} \dfrac{bbm-baa}{bb-2ba+aa} \\ \dfrac{taa}{b-a} \end{matrix}\right\} \text{s.}^{4)}$$

Summa triangulorum (t numerus terminorum)

$$a, b, \frac{bb}{a} \text{ \&c. } \frac{bbm-baa}{bb-2ba+aa} - \frac{taa}{b-a}$$

§ 6. Si ſeries proportionalium ab a infinitè parva incipere ponatur ſive, ab m maxima, deorſum continuari in infinitum, patet ex regulis præcedentibus, cum a ad m infinite parvam rationem habeat, fore ſummam omnium in infinitum proportionalium $\infty \frac{bm}{b-a}$. Item ſummam triangularem omnium $\infty \frac{bbm}{\text{qu. } b-a}$.

[4]) C. à. d. subtrahendo.

§ 7. Tegen hoeveel ten hondert in 't jaer foudemen fijn gelt moeten beleggen, mids oock intereft van intereft ontfangende, om ten eynde van 41 jaer 3 capitalen boven het fijne te winnen? Antwoord: tegen 3 en $\frac{44}{100}$ per cento.

Omdat in als 4 capitalen moeten fijn, welcke 4 capitalen maecken de grootfte van 42 proportionalen, daer de cleynfte van is 100 en de grootfte 400, foo divideer ick de differentie der logarithmi van 400 en van 100, te weten 0,60206, door 41, en de quotiens 1468 addeer ick tot de logar. van 100. komt 2,01468, fijnde logar. van 103,44. daerom is het capitael metten intereft ten eynde vant eerfte jaer $103,\frac{44}{100}$.
En dienvolgens den intereft van 100 in een jaer, $3\frac{44}{100}$.

Ick heb gefegt 42 proportionalen om dat die 41 differentien maecken.

[Fig. 25].



La figure donnée par Huygens pour illuftrer le texte [Fig. 25] fait voir que, tout auffi bien que Zarlino (note 1 de la p. 171 qui précède) et Merfenne (p. 33 qui précède, l. 2 d'en bas), il fe figure comme des *lignes* les moyennes proportionnelles qu'il s'agit d'intercaler entre les deux quantités données. Il eft évident que fi la figure était correctement tracée les extrémités des lignes verticales équidiftantes ne fe trouveraient pas fur une ligne droite mais fur une logarithmique comme dans la Fig. 24 du § 1. La même remarque s'applique à quelques figures du même genre dans la „Chilias Logarithmorum" de 1624 de Kepler, ouvrage que Huygens ne mentionne d'ailleurs nulle part.

Les pages fuivantes du Manuscrit contiennent encore plufieurs autres calculs, également rédigés en flamand, fur des capitaux placés à intérêt; il y eft fait ufage de logarithmes et de la formule $s = \frac{bm - a^2}{b - a}$ du § 4.

APPENDICE II [1])

À LA PIÈCE I DE LA P. 225

(RÈGLE POUR TROUVER LES LOGARITHMES, 1666 OU 1667).

[1661]

Radix [2]) quintò extracta ex 2 est 102189714865 41, haec est f. Radix sexto extracta ex 2 est 10108892860517, hæc est g.

Hinc invenitur n in $\overline{a - \frac{ad}{f}}$ ∞ 232769183257893 [3]), unde logarithmus numeri 2 fit 30102999567 in quo decem notæ veræ sunt undecima unitate veram superat.

Cujuslibet numeri primi denario minoris logarithmus inveniri potest [4]) extrahendo sexies radicem continuè; et deinde ternis magnis divisionibus et una multiplicatione. una enim divisio est $\frac{100fd}{81f + 81d + 108g}$, altera $\frac{ad}{f}$, tertia $\frac{\text{n in } \overline{a - \frac{ad}{f}} \ldots\ldots}{p \text{ in } \overline{a - d}}$. multiplicatio est n in $\overline{a - \frac{ad}{f}}$.

Sunt autem hæ extractiones radicum multo minus operosæ quam quibus utebantur in vulgari logarithmorum inventione, ubi ex 32^{bus} characteribus cum totidem zero adjunctis extrahebant, idque quadragies circiter ut habeantur decem characteres logarithmi veri. Si [5]) dati numeri qui denario major sit, invenire logarithmum libeat; extrahatur ab eo toties continue radix quadrata donec ultimo extracta minor sit radice sexta ex 10, nempe 10366 &c. Voceturque ultimo extracta g, penultima f; omniaque dein-

---

[1]) Voyez sur cette Pièce, empruntée à la f. 11 v du portef. „Musica" — ce qui indique que la date de la f. 11 est 1661; comparez la p. 145 qui précède — la p. 205 de l'Avertissement qui précède.

[2]) Voyez sur ces calculs la p. 458 du T. XIV, ainsi que la „Regle pour trouver les logarithmes" — communication de Huygens à l'Académie de 1666 ou 1667 —, mentionnée dans la note 1 de la p. 452 du T. XIV et publiée à la p. 225 qui précède.

[3]) Ce nombre devrait être, semble-t-il, la 54ième partie du nombre 12569535892606 qu'on trouve à la p. 226 qui précède. Toutefois la dite partie, savoir 232769183196, est *un peu* plus petite que le nombre formé par les douze premiers chiffres de celui de texte. Les neuf premiers chiffres sont les mêmes.

[4]) Voyez la note 2 de la p. 451 du T XIV.

[5]) Cet alinéa (jusqu'à „numeri propositi logarithmus") s'accorde presque textuellement avec le deuxième alinéa de la p. 459 du T. XIV. Comparez la note 7 qui suit.

ceps eodem modo peragantur ut prius; et invenietur hac ratione logarithmus radicis quæ feptima ab ultimo extracta numeratur, five quæ fex locis illam præcedit; idque æque accurate atque modo logarithmum binarij invenimus, nempe ad 10 characteres veros. Inventum deinde logarithmum duplicando exiftet logarithmus radicis octavæ ab ultima; et rurfus duplicando, nonæ; atque ita porro duplicatio continuabitur donec exiftat ipfius numeri propofiti logarithmus. nullus autem numerus infra 100 000 000 opus habebit pluribus quam 9 extractionibus radicum.

Quia logarithmus denarij ad logarithmum numeri quæfiti (nempe hìc ad logarithmum binarij) compofitam habet rationem, uti jam vidimus, ex $a - d$ ad $a - \frac{ad}{f}$ et ex p. ad n; ratio autem p ad n, hoc eft $\frac{100\,ad}{81d + 81a + 108b} + \frac{20b}{27} - \frac{a-d}{18}$ ad $\frac{100\,fd}{81d + 81f + 108g} + \frac{20}{27}g \; \frac{-f-d}{18}$ eadem eft (fi utrinque multiplicemus per 54) quæ $\frac{200ad}{3d + 4a + 4b} + 40b - 3a - 3d$ ad $\frac{200fd}{3d + 3f + 4g} + 40g - 3f - 3d$. Idcirco potius has utrafque fummas vocabimus p et n. Eritque Regula ad inveniendos logarithmos hujufmodi[6]).

Habeantur[7]) radices primum continuè è denario extractæ ufque ad fextam vel feptimam characterum 14. Et radix ultimo extracta vocetur b, quæ vero penultimo five illam præcedens vocetur a. Et unitas vocetur d. Omnia autem ducta intelligantur in 1(13)[8]) ut radicum fractio evanefcat.

Radix quinta ex 10 eft	10746078283213	a
Radix fexta ex 10 eft	10366329284377	b
Unitas vero	10000000000000	d

Iam inveniatur numerus æqualis iftis fimul

$$\frac{200\,da}{3d + 3a + 4b} + 40b - 3a - 3d$$

---

[6]) Voyez la note 4 de la p. 459 du T. XIV.

[7]) Tout ce qui suit (excepté la remarque finale en marge) s'accorde presque textuellement avec le début de la Pièce des p. 458—459 du T. XIV.

[8]) C. à. d. un 1 suivi de 13 zéros.

[9]) En 1668 (T. VI, p. 276) Huygens parle également avec éloges de la „Logarithmo-Technia" de N. Mercator qui venait de paraître. Il est évident qu'il a ajouté cette remarque à la présente Pièce longtemps après la composition. — Voyez aussi sur l'ouvrage de Mercator la p. 431 du T. XIV ainsi que la communication de Huygens du 17 octobre 1668 à l'Académie Royale des Sciences (p. 260 qui précède), dont il est déjà question à la page 431 nommée.

qui numerus vocetur p (eſt autem 55966103584532) idemque ducatur in $a - d$, ac productus inde vocetur v, qui numerus ad omnes logarithmos inveniendos adhibebitur, eſtque 41755094431167778. Sed hos priores characteres adhibere ſufficit. Si igitur ex. gr. ſit inveniendus logar. binarij; habeantur et hujus radices quinto ſextoque extracti ſicut de denario diximus et

Radix quinta ex 2, nempe	10218971486541,	vocetur	f.
Radix ſexta	10108892860517,	vocetur	g.
unitas ut ante	10000000000000,	vocetur	d.

Similiter quoque inveniatur numerus æqualis iſtis ſimul

$\frac{200\,df}{3d + 3f + 4g} + 40g - 3f - 3d$ qui numerus vocetur n. In hoc exemplo eſt 545869542830178.

Hic numerus n ducatur in $a - \frac{ad}{f}$ productuſque inde vocetur s, qui eſt 12569535892606 &c. Jamque ſicut inventus numerus v ad s ita logarithmus denarij ad logarithmum quæſitum propoſiti numeri, nempe hîc 0,30102999567. Pro characteriſtica præponitur 0, idque ſcimus faciendum quando datus numerus minor eſt denario.

En marge: Regula ad inveniendos logarithmos. his multo meliora ſuppetunt ex quadratura hyperbolæ N. Mercatoris [9]).

APPENDICE I

À LA PIÈCE II DE LA P. 229 (DEMONSTRATIO REGULAE DE MAXIMIS ET MINIMIS, 1667).

[1660] [1].

Ex opere Vincentij Viviani Magni Ducis Hetruriæ Mathematici de Maximis et Minimis [2]. Teſtatur tum ipſe tum Pr. Leopoldus non ſibi viſos Apollonij libros 3 poſteriores [3].

Problema. (l. 2. pr. 20 [4]) — in hyperbola pr. 22 [5]. — in ellipſi 23 [6].

A puncto data ad ſectionem conicam breviſſimam lineam ducere, ope hyperbolæ ſolvit. Poteſt autem per circulum fieri [7]. Illud tamen in toto volumine optimum, et dubito annon alicunde mutuatus ſit [8].

---

[1] Manuscrit A, p. 233. A la même page un extrait „ex literis Caroli Dati ad Nic. Heinsium datis 16 Mart. 1660". Nous l'ayons publié à la p. 42 du T. III.

[2] „De Maximis et Minimis geometrica divinatio in quintum Conicorum Apollonii Pergæi adhuc desideratum". Ad Serenissimum Ferdinandum II magnum ducem Etruriæ, auctore Vincentio Viviani. Florentiæ MDCLIX. Apud Ioseph Cocchini, Typis Nouis, sub signo Stellæ.

[3] La Dédicace est datée „Octauo Calendas Ianuarij 1658" et la „Præfatio" „Octauo Idus Decembris 1658". Dans cette préface Viviani parle de l'édition des livres 5—7 d'Apollonios que prépare Borelli: comparez la note 8 qui suit. Outre Viviani et le grand duc Leopoldo frère de Ferdinando, Borelli lui-même y déclare „che [Viviani] non hà havuto minima notizia di questi ultimi libri d'Apollonio".

[4] La figure représente évidemment une parabole. En effet la Prop. 20 est la suivante: Probl. I. Prop. XX. „A dato puncto ad datae Parabolæ peripheriam, minimam rectam lineam ducere".

[5] Probl. II. Prob. XXII du même livre: „A dato puncto, ad datæ Hyperbolæ peripheriam, minimam rectam lineam ducere".

[6] Probl. III. Prop. XXIII: „A dato puncto, ad datæ Ellipsis peripheriam, maximam, & minimam rectam lineam ducere".

[7] Voyez, à la p. 61 du T. III, la lettre de Huygens à N. Heinsius du 7 avril 1660 où il dit avoir reçu le livre de Viviani par l'entremise de Car. Datus, et où il mentionne sa construction „per

circulum" déjà publiée pour le cas de la parabole. Voyez aussi à la p. 335 qui suit la Partie A de l'Appendice à la Pièce XII de 1680 sur les équations solides.

[8]) Voici le reste du texte de la p. 233 du Manuscrit A se rapportant au livre de Viviani (le premier alinéa — „Quantum etc." — se trouve en effet à la troisième page de la „præfatio"):

De Galileo in præfatione ad Lectorem. Quantum Heroa nomino? quantum Florentiæ decus, lumen feculi, ingeniorum phoenicem, fydus, folemque univerfæ Mathefeos? quale dixerim numen ac genium corrigendæ Geographiæ, aftronomiæ novis phænomenis ope telefcopii detectis illuftrandæ, vindicandæque Philofophiæ, in orbis admirationem, ac pofteritatis regulam natum.

E difcipulis Galilei commendat [egalement dans la „præfatio"] Braccium Manettum jam defunctum, Andream Arrighettum Senatorem ac primæ notæ muneribus in Patria [c. à. d. à Florence] fungentem.

Carolum Datum [T. II, p. 462] mathefeos, liberæque et indepravatæ Philofophiæ nobilem amatorem. hujus amoeniffimas doctiffimafque lucubrationes promittit.

Johannes Alphonfus Borellus [T. II, p. 252], Pifis Mathematicas profitetur, editor 3 librorum pofteriorum Apollonij. Ex Arabico vertit Abraham Ecchellenfis, natione Arabs linguarum orientalium peritiffimus, mathefeos non ignarus [voyez la note 2 de la p. 393 du T. XVIII].

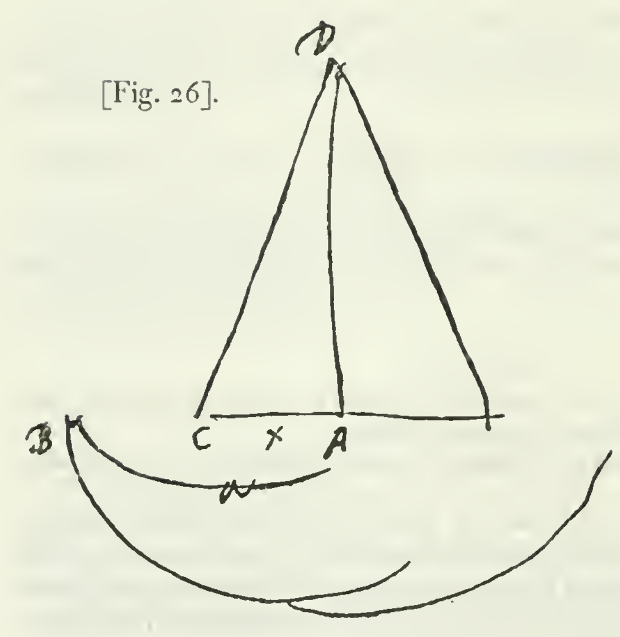
Laurentium Magalottum [T. III, p. 148] adolefcentem laudat, fuumque opus cum eo communicaffe fcribit.

APPENDICE II[1]

À LA PIÈCE II DE LA P. 229 (DEMONSTRATIO REGULAE DE MAXIMIS ET MINIMIS, 1667).

[1669].

[Fig. 26].



§ 1. Radius dati circuli eſt a, quæritur conus maximus [Fig. 26] cujus ſuperficies cum baſi æqualis ſit dato circulo. Invenio radium baſis [x] fore $\infty \frac{1}{2}a$, latus coni [y] $\infty \frac{3}{2}a$.

$$\frac{xx + xy \infty aa}{y \infty \dfrac{aa - xx}{x}}$$

[1]) Manuscrit D, p. 229 et 231. On trouve les dates Juin 1669 et 21 Nov. 1669 respectivement aux p. 217 et 235. Dans l'un et l'autre paragraphe Huygens applique la règle démontrée par lui dans la Pièce II (règle de Fermat ou de Hudde). Dans le § 2 il multiple respectivement par 1 et 3, non pas par 2 et 6, puisqu'ici il considère apparemment x^2, et non pas x, comme la grandeur inconnue.

Il est évident sans aucun calcul qu'il s'agit dans l'un et l'autre cas d'un maximum, non pas d'un minimum. Toutefois Huygens vérifie numériquement le résultat obtenu, du moins dans le cas du § 1, en prenant d'abord, pour AB = 2000 [Fig. 26], AC = 1000, donc DC = 3000; ensuite, pour AB = 2000, AC = 1004 ou AC = 996: dans ces deux derniers cas le volume devient en effet plus petit que pour AC = 1000.

$$\frac{a^4 - 2aaxx + x^4}{xx} - xx \left[= \mathrm{AD}^2\right]$$

$$xx\sqrt{\frac{a^4 - 2aaxx}{xx}} \infty d^3 \text{ [volume du cône à un facteur numérique près]}$$

$$a^4xx - 2aax^4 \infty d^6$$

$$2 \qquad 4$$

$$2a^4 \infty 8aaxx$$

$$\tfrac{1}{2}a \infty x$$

$$\left[\frac{a^2 - x^2}{x} = y = \tfrac{3}{2}a\right]$$

§ 2. Invenire conum maximum cujus superficies sine basi æqualis sit circulo dato. Sit radius baseos x. Ergo latus coni erit $\frac{aa}{x}$. Ergo axis $\infty \sqrt{\frac{a^4}{xx} - xx}$.

$$\sqrt{\frac{a^4}{xx} - xx}\, xx \infty d^3 \text{ [volume du cône à un facteur numérique près]}$$

$$a^4xx - x^6 \infty d^6$$

$$1 \qquad 3$$

$$a^4 \infty 3x^4$$

$$\sqrt{\sqrt{\tfrac{1}{3}a^4}} \infty x$$

$$\left[\text{latus coni} = \frac{aa}{x} = \right] \sqrt{\sqrt{3a^4}}.$$

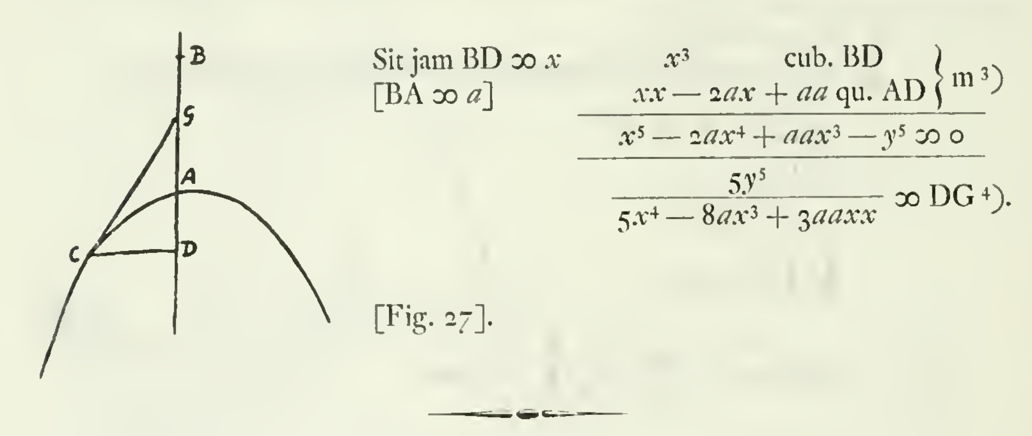
APPENDICE [1])

A LA PIÈCE III DE LA P. 243 (REGULA AD INVENIENDAS TANGENTES LINEARUM CURVARUM, 1667).

[1666].

Hyperboloides Riccij [2]). Quæritur tangens.

Proprietas hæc quod cubus BD in quadr. DA æquale cuboquadrato DC ordinatim applicatae [Fig. 27].



Sit jam BD ∞ x [BA ∞ a]

$$\left.\begin{array}{lr} x^3 & \text{cub. BD} \\ xx - 2ax + aa & \text{qu. AD} \end{array}\right\} \text{m } ^{3)}$$

$$x^5 - 2ax^4 + aax^3 - y^5 \infty 0$$

$$\frac{5y^5}{5x^4 - 8ax^3 + 3aaxx} \infty \text{DG}\ ^{4)}.$$

[Fig. 27].

---

[1]) Manuscrit C, p. 127. Les p. 110 et 128 sont respectivement datées: 2 Nov. 1666 et 31 Dec. 1666.

[2]) Huygens reçut en novembre 1669 de la part du prince Leopoldo la „Geometrica Exercitatio de Maximis et Minimis" de 1666 de M.A. Ricci: voyez la note 2 de la p. 88 du T. VI, ainsi que la p. 161 du même Tome. Ce petit traité fut réimprimé en 1668 avec la „Logarithmotechnia" de N. Mercator; et de nouveau en 1791 dans les „Scriptores logarithmici" (London, Davis) de Fr. Maseres. Dans le „Lemma sextum" par lequel le traité se termine, l'auteur construit à sa façon la tangente à la courbe mentionnée ici par Huygens.

[3]) C. à. d. multiplicando.

[4]) C'est une application de la règle (démontrée par Huygens dans la Pièce III) qu'il appelle — note 3 de la p. 245 qui précède — „Fermatianæ regulæ compendiarium". DG, soustangente, s'appelle z dans la Pièce III.

APPENDICE I[1]

À LA PIÈCE VI DE LA P. 259 (INSUFFISANCE DE LA DÉMONSTRATION DE GREGORY DE L'IMPOSSIBILITÉ DE LA QUADRATURE DU CERCLE, 1668).

[1667 ou 1668.]

La préfente Pièce contient les premières réflexions qu'infpira à Huygens le livre „Vera Circuli et Hyperbolæ Quadratura etc." de 1667 de J. Gregory, dont l'auteur lui avait fait don en octobre 1667 (T. VI, p. 154) en demandant fa „cenfura"; réflexions qui donnèrent lieu à l'article „Examen etc." publié par Huygens dans le No. du 2 juillet 1668 du „Journal des Sçavans" (T. VI, p. 228). On peut conftater que le contenu de l'article plus bref imprimé en 1668 s'accorde avec celui de la préfente Pièce.

D'ailleurs dans le Manufcrit C la préfente Pièce eft encore précédée par 4 pages de calculs portant la fufcription: In Veram quadraturam circuli et hyperbolæ Jac. Gregorij Abredonenfis [2]) Schoti animadverfiones.

Ad Prop. 11 Jacobi Gregorij pag. 25.

„Sed nulla quantitas poteft eodem modo analytice componi ex terminis $a^3 + aab$; $abb + b^3$, quo componitur ex terminis $aab + bba$; $2bba$".

Negatur: ecce enim quantitas $2abbm + b^3m$. quæ fic invenitur per methodum ab authore traditam prop. 7.

Inveniatur primum quantitas, quæ multiplicata in $a^3 + aab$ et addita $abb + b^3$ multiplicata in quantitatem datam m, eandem quantitatem faciat ac fi multiplicaretur in $aab + bba$ et adderetur $2bba$ multiplicata etiam in eandem quantitatem datam m. Sit quantitas illa z, et proinde

$$a^3z + aabz + abbm \text{ æquatur } aabz + bbaz + 2bbam$$

$$a^3z - abbz \infty abbm - b^3m$$

$$z \infty \frac{abbm - b^3m}{a^3 - abb}$$

div. per $a - b$

$$z \infty \frac{bbm}{aa + ab}$$

---

[1]) Manuscrit C, p. 226—230. Les p. 203 et 231 sont respectivement datées 5 Sept. 1667 et 25 Feb. 1668.

[2]) C. à. d. d'Aberdeen.

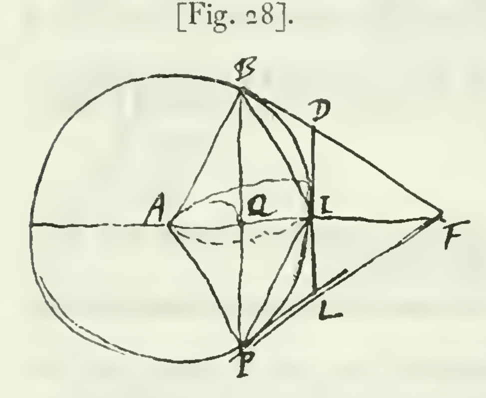
Hæc quantitas five multiplicetur in $a^3 + aab$ et addatur $abbm + b^3m$ five multiplicetur in $aab + bba$ et addatur $2bbam$, efficit eandem in utroque cafu quantitatem, nempe $2abbm + b^3m$.

Hinc itaque fecundum authorem terminatio quæfita porro inveniri poterit adeoque ipfa Circuli quadratura. Dicet enim eandem hanc quantitatem eodem modo componi ex quibuslibet feriei terminis convergentibus quo componitur ex terminis $a^3 + aab$ et $abb + b^3$. ac proinde etiam ex ultimis, qui æquales funt. Sit ultimus terminus x, qui itaque multiplicatus in $\frac{bbm}{aa + ab}$, alterque qui itidem eft x, in m, facient $\frac{bbmx}{aa + ab}$ $+ mx$ quae æquari debent $2abbm + b^3m$. Unde

$$x \propto \frac{3aab^3 + ab^4 + 2a^3bb}{bb + ab + aa}.$$

Hæc itaque Terminatio feriei convergentis x, quæ repræfentat circuli fectorem, cum inventa fit, dabitur Circuli quadratura. At non eft vera hæc terminatio. Nam pofita $b \propto 2a$, fiet, in primis terminis, $a^3 + aab$ æqualis quartæ parti $abb + b^3$. Hoc eft triangulum BAP [Fig. 28] æquale $\frac{1}{4}$ trapezij ABFP. Ideoque arcus BI fextans circumferentiæ. Porro trapez. ABIP erit $aab + bba$ duplum trianguli ABP, et polygonum ABDLP, $2bba \propto \frac{8}{3}$ trianguli ABP, deinde z erit $\frac{4}{3}m$. Et Terminatio x five

[Fig. 28].



$$\frac{3aab^3 + ab^4 + 2a^3bb}{bb + ab + aa},$$

hoc eft fector ABIP ad triangulum ABP five $a^3 + aab$, ut 16 ad 7, quod eft falfum. Nam dividendo effet fegmentum BPI ad triangulum ABP, five ad triangulum BIP ut 9 ad 7 quæ ratio minor eft quam 4 ad 3.

Quid vero deceperit authorem hinc intelligetur.

In ferie convergente cujus primi termini a, b

$$\text{fecundi } \frac{ca + bd - ad}{c}, \frac{bc - be + ae}{c}$$

cujus terminatio inveftiganda proponitur prop. 7. in hac igitur quærendo quantitatem z illa invenitur æqualis $\frac{me}{d}$, nam quod ille dicit $z \propto \frac{mae - mbe}{ad - bd}$, non advertit divifionem fieri poffe per $a - b$, et hinc forfan erroris occafio extitit. Cum autem fumtis a, b, pro quibuscunque feriei terminis, fequentes fint $\frac{ca + bd - ad}{c}$, $\frac{bc - be + ae}{c}$ ex hypothefi; manifeftum eft, ad quofcunque terminos fefe proximè fequentes inveftigetur z, illam eandem quantitatem femper habituram, cum femper fit $z \propto \frac{me}{d}$, quæ

m, e, et d, ſunt quantitates datæ. Proinde cum z ſive $\frac{me}{d}$, multiplicata in a, additaque ad hoc productum b multiplicata in m, producat quantitatem $\frac{mae + mbd}{d}$ (quam author dicit eſſe $\frac{maae - maeb + mabd - mbbd}{ad - bd}$, non videns diviſionem fieri poſſe per $a - b$) eademque quantitas eodem modo producatur ex terminis ſeriei ſecundis, ut ſequitur ex inventione quantitatis z; atque eodem quoque modo ex tertijs quo ex ſecundis, quoniam $z \infty \frac{me}{d}$ eadem ſemper quantitas ad primos et ſecundos, et ad ſecundos et tertios terminos invenitur, apparet etiam ex primis et ex tertijs terminis eodem modo eandem quantitatem $\frac{mae + mbd}{d}$ componi. Atque hinc facile perſpicitur eandem ex quibuslibet alijs ſeriei ejuſdem terminis eodem ſemper modo compoſitum iri, et denique etiam ex ultimis. qui cum æquales ſint, ſi alter ponatur ∞ x, etiam reliquus erit x, unde

[Fig. 29]

$$\frac{mex}{d} + mx \infty \frac{ame}{d} + bm.$$

unde $$ex + dx \infty ae + bd \text{ et } x \infty \frac{ae + bd}{e + d}.$$

nam author rurſus hic non vidit diviſionem fieri per $a - b$.

Eſt autem hæc ſeries nihil aliud quam quæ his lineis [Fig. 29] repræſentantur, ubi FG eſt b; LG a; LF $b - a$. Tum ut c ad d, hoc eſt, ut 7 ad 2, ita ſit FL ad LP, quæ addita ad LG facit minorem ſecundorum terminorum PG. Et rurſus ut c ad e, hoc eſt ut 7 ad 3, ita ſit LF ad FN, quæ ablata ab FG, facit majorem ſecundorum terminorum NG. Et continuando porro ponitur PS $\frac{2}{7}$ NP, et NQ $\frac{3}{7}$ NP, et ita porro in infinitum. Unde tandem terminationis ultimum quoddam punctum concipitur, et recta quæ ab eo puncto ad G extenditur eſt hic terminatio quæ quæritur quam author recte dicit eſſe $33\frac{3}{5}$. Hæc autem facile quoque aliunde determinari poteſt. Nam cum partes hinc et inde in linea FL acceptæ, ut LP, FN, et reliquæ porro ſint ſemper ut 2 ad 3, apparet et punctum terminationis quæſitæ ita dividere debere totam FL ut pars verſus L ſit ad reliquam ut 2 ad 3, tota autem FL eſt partium 14 qualium LG, 28. Ergo ab L ad punctum terminationis ſunt $\frac{2}{5}$ ex 14, hoc eſt $5\frac{3}{5}$, quæ additæ ad LG 28 faciunt $33\frac{3}{5}$.

Porro author cum hanc determinationem recte inveniri methodo ſua animadvertiſſet, exiſtimavit cujuscunque alterius ſeriei convergentis terminationem inveniri ſimiliter poſſe, ſi inventa eſſet quantitas quæ eodem modo componeretur ex primis terminis ſeriei convergentis et ex ſecundis. Quo dato, (non autem conceſſo, ob rationes poſtea adducen-

das) non ſequitur inde, ut vult author, ſi quantitas ejusmodi nulla eſſe poſſit, tunc neque terminationem ſeriei analyticam fore reſpectu terminorum ſeriei. Nam etſi verum eſſet, tali quantitate data quæ eodem modo componitur ex primis atque ex ſecundis ſeriei terminis, tunc ejus ope inventum iri terminationem ſeriei, et illam terminationem eſſe repertam, eodem quoque modo compoſitam fore ex primis, ſecundis, aut alijs quibuslibet ſeriei terminis. non inde ſequetur terminationem ſeriei, aliâ forſan methodo repertam, etiam debere componi eodem modo ex primis atque ex ſecundis ſeriei terminis. Itaque male rationem colligit author.

Dico autem porro, non eſſe verum, data quantitate quæ eodem modo ex primis et ex ſecundis ſeriei terminis componitur, inveniri inde ſemper poſſe ſeriei terminationem. quod jam patuit ante, cum quantitas $2abbm + b^3m$, eodem modo componatur ex terminis ſeriei primis $a^3 + aab$ et $abb + b^3$, quo ex ſecundis $aab + bba$, et $2bba$, nec tamen per eam vera terminatio ſeriei inveniatur.

Quare autem non rectè ſuccedat terminationis inventio in hac ſerie, cum ſecus eveniat in ſerie quam ponit author prop. 7, et in alijs quibusdam, ratio differentiæ hæc eſt, quod in ſerie prop. 7 cum invenitur quantitas $z \infty \frac{me}{d}$, in illa non occurrat quantitas a nec b, unde fit ut ſive ad primos et ſecundos terminos inveniatur z, ſive ad ſecundos et tertios, ſemper eadem quantitas inveniatur. Quod cum ita contingit, ſequitur ope ipſius z inveniri quantitatem quæ eodem atque unico modo ex primis, ſecundis, tertijs alijſque quibuslibet ſeriei terminis componatur, ut folio præcedenti oſtenſum ſit. Sed cum quantitates a et b, vel alterutra habentur in quantitate z, tunc z non erit eadem quantitas ad primos et ſecundos, ac ad ſecundos et tertios terminos teperta. Et invenietur quidem, per primam z, quantitas quæ eodem modo ex primis et ex ſecundis ſeriei terminis componitur, et per alteram z, invenietur quantitas eodem modo compoſita ex ſecundis et ex tertijs terminis. Sed quantitas hæc poſterior non erit eadem cum priori, ac proinde cum non ſit inventa quantitas quæ eodem modo ex quibuslibet duobus ſeriei terminis componitur, nec poterit inveniri per eam ſeriei terminatio.

Quod ſi vero quantitas aliqua inveniri poſſit eodem modo compoſita ex primis et ex ſecundis ſeriei terminis, abſque inventione quantitatis z, tunc illa quantitas ſufficit ad inventionem terminationis. ut ſi detur ſeries convergens cujus primi termini a, b, ſecundi $\sqrt{c\ aab}$, $\sqrt{c\ bba}$, ſemperque ſequentes duo ex duobus præcedentibus eodem hoc modo componantur, hic habebitur quantitas ab, eodem modo ex primis et ex ſecundis terminis compoſita, nempe ex multiplicatione terminorum ſimplici. Conſtatque eandem eodem modo etiam ex tertijs et alijs quibuſlibet ſeriei terminis componi, quoniam a et b indifferenter pro quibuſlibet ſeriei terminis ſumi poſſunt. Itaque et ex ultimis qui æquales ſunt. qui ſi vocentur x ſinguli erit $xx \infty ab$ et $x \infty \sqrt{ab}$ terminatio quæſita.

Exemplum autem ab authore allatum propoſitione . . . abſurdum eſt, nam ſi primi

termini ſint a et b, ſecundi $\sqrt{ab}$ et $\frac{aa}{\sqrt{ab}}$ ſient rurſus tertij termini a et b. Adeo ut hæc non ſit ſeries convergens, cujus proinde neque terminatio ulla eſſe poteſt, etſi author eam inveniſſe exiſtimet.

Aliud initium [1]). Primo male ratiocinatur prop. 11. cum ita colligit. *Si terminatio propoſita ſeriei eſſet analytica cum terminis ſeriei*, *oporteret eam terminationem eodem modo componi ex primis et ex ſecundis terminis.*

Male inquam ſic colligit. Nam licet verum ſit terminationem, ſi inventa ſit methodo authoris, eodem modo compoſitam fore ex primis et ex ſecundis, alijſve quibuſlibet ſeriei terminis, non ſequitur, ſi alio forſan modo terminatio ſeriei inventa ſit, etiam tunc eodem modo ex primis et ex ſecundis terminis compoſitam fore. Oporteret enim, ut hoc ſequeretur, oſtendiſſe antea authorem nulla alia quam ſua methodo terminationem ſeriei poſſe inveniri. Vel ſaltem quotieſcunque aliqua methodo terminatio reperiri poteſt etiam ſua methodo eam reperiri poſſe.

Rurſus hallucinatur cum paulo poſt ait, At nulla quantitas poteſt eodem modo componi ex terminis $a^3 + aab$ et $abb + b^3$, quo componitur ex terminis $aab + bba$, et $2bba$.

---

[1]) Ce nouveau début s'accorde en substance avec le § I et le commencement du § II de l'„Examen etc." publié en 1668. On trouve l'anticritique de Gregory, du 23 juillet 1668, à la p. 240 du T. VI.

APPENDICE II[1]

À LA PIÈCE VI DE LA P. 259 (INSUFFISANCE DE LA DÉMONSTRATION DE GREGORY DE L'IMPOSSIBILITÉ DE LA QUADRATURE DU CERCLE, 1668).

[août ou septembre 1668]

Cette Pièce est le projet d'une réplique à la réponse de Gregory de juillet 1668 mentionnée dans la dernière note de l'Appendice précédent. On peut la comparer avec le début de l'article de Huygens publié dans le Journal des Sçavans du 12 nov. 1668 (T. VI, p. 272). Comme les Appendices suivants le font voir, Huygens exécuta encore bien des calculs[2] après avoir rédigé le présent projet, calculs dont il fit usage en rédigeant sa réplique pour la presse.

Quoy que M. Gregorius dans la responſe qu'il a faite a mes objections ait ſupplee quelques defauts qu'il y avoit dans ſes demonſtrations, il me permettra de dire qu'il s'en faut tant qu'apres cela l'impoſſibilitè de la quadrature du cercle ſoit bien prouvee, qu'il demeure encore incertain ſi le cercle et le quarrè de ſon diametre ne ſont pas commenſurables, c'eſt a dire s'il ne ſont pas entre eux en raiſon de nombre a nombre.

Pour le faire voir il faut examiner encore ſa prop. 11 et la ſolution qu'il donne a la difficultè que j'y avois objectee. J'avois dit que quoyque la terminaiſon d'une ſuite convergente eſtant trouvee par ſa methode devoit neceſſairement eſtre compoſee de meſme des ſeconds termes que des premiers, il ne s'en ſuivoit pas que cela ſeroit neceſſaire, quand cette terminaiſon ſeroit peut eſtre trouvee par quelque autre maniere que la ſiene. Il me demande un exemple de cecy, ou une juſte raiſon de douter pourquoy la meſme choſe ne conviendroit pas a toute terminaiſon de quelque maniere qu'elle fut trouuee; comme s'il ignoroit qu'en mathematique l'on a juſte raiſon de douter de ce qu'un autre advance juſqu'a ce qu'il l'ait demonſtrè [alinéa biffé].

Car meſme apres la demonſtration qu'il a donnee pour ſupplement de ſa propos. 11. qu'eſt ce qu'il en peut conclure, ſi non que tout ſecteur de cercle n'eſt pas en raiſon analytique a ſa figure rectiligne inſcrite ou circonſcrite[3]. ce qui eſt tout autre choſe

---

[1] Manuscrit D, p. 27—29. On trouve aux p. 3 et 37 respectivement les dates du 11 août et du 21 septembre 1668.

[2] Les pages 7—11 et 26 du Manuscrit D contiennent également des calculs se rapportant à Gregory.

[3] Dans la Pièce du 12 nov. 1668 (T. VI, p. 273, l. 19) Huygens ajoute à bon droit: quoyque cette demonſtration ne laiſſe pas d'avoir ſa beautè.

que de dire que nul ſecteur de cercle ne l'eſt. Qui dit non omnis ne dit pas nullus. Et ainſi il ne ſuffit pas de demonſtrer que le ſecteur de cercle a ſa figure inſcrite n'eſt pas analytique indefinitè, mais il faut demonſtrer que c'eſt la meſme choſe in caſu omni definito. comme par exemple quand on prend le ſecteur qui fait le tiers du cercle, ſuppoſant a egal a 1, b ∞ 2: les premiers termes de ſa ſuite convergente ſeront 3 et 12, les ſeconds 6 en 8. Que ſi je diſois maintenant que la terminaiſon de cette ſuite eſt . . . . ou $\sqrt{\quad}$ . . . . . . , je ne penſe pas que par ſa prop. 11 il me puiſſe prouver le contraire. Par conſequent il ne s'en ſuit pas de ſes demonſtrations que le cercle ne ſoit au triangle equilateral inſerit comme nombre a nombre. La meſme choſe ſera vraie dans tous les ſecteurs dont la ſoutendente au rayon du cercle aura quelque raiſon donnee de nombre a nombre ſoit rationel ſoit ſourd. car depuis qu'entre les quantitez a et b dans ſa prop. 11 il y aura proportion numerique, l'on ne pourra plus dire de quelle facon un autre nombre propoſè eſt compoſè des premiers ny des ſeconds termes de la ſuite convergente. Et par conſequent en tous ces cas la propos. 11 ne demonſtre point qu'il ſoit impoſſible de trouuer la terminaiſon par quelque autre methode que celle de l'autheur. Et c'eſt ce qui juſtifie ma premiere remarque.

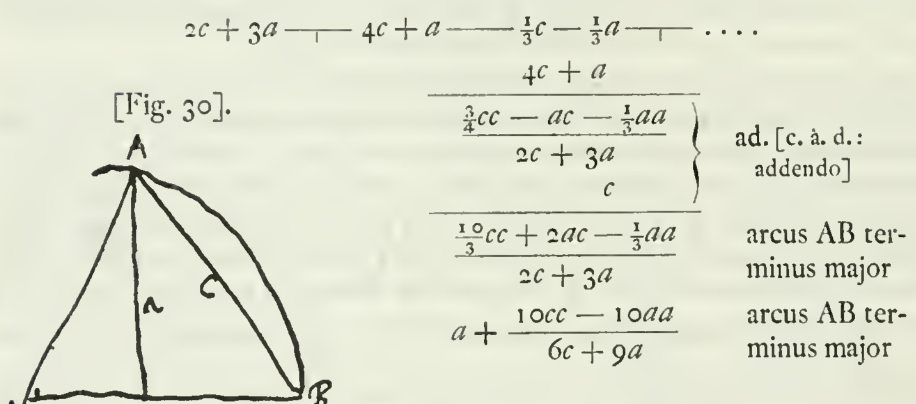
Pour les autres il eſt vray qu'elles ſont toutes fondees ſur ce que l'autheur n'avoit point limitè l'uſage de la methode dont il cherche la terminaiſon dans la 7 prop. ny fait la declaration qu'il fait maintenant en ces mots. *Dico igitur et declaro me intelligere nullam quantitatem indefinitam præter ipſos terminos convergentes compoſitionem poſſe ingredi.* Et ſi je n'avois eu ſujet de croire qu'il eut ignorè cette rejection des quantitez indefinies, je ne me ſerois point arreſtè a en faire veoir la neceſſitè, par les fauſſes conſequences qui naiſſent de ſon omiſſion. Mais puis que dans ſa prop. 7e il faiſoit entrer dans la compoſition la quantitè $\frac{mae - mbe}{ad - bd}$, ou les lettres a et b marquent des quantitez indefinies, j'ay eu raiſon d'en conclure qu'il les y avoit laiſſèes quoy que les ſeachant eſtre telles. Car neceſſairement l'un des deux eſt vray, ou qu'il ait eſſaiè d'oſter a et b de cette quantitè ou qu'il ne l'ait point eſſaiè. S'il l'a eſſayè, il faut qu'il n'aye pas veu qu'il les pouvoit oſter en diviſant pas $a - b$ car s'il l'eut veu, il ne pouvoit plus negliger cette diviſion par inadvertance. N'ayant donc point veu que a et b ſe pouvoient oſter apres l'avoir tentè, il a creu eſtre obligè d'admettre d'autres quantitez indefinies dans la compoſition, outre les termes convergents eux meſmes. Que s'il n'a point eſſaiè d'oſter a et b, qu'il ſcavoit denoter des quantitez indefinies, il s'en ſuit qu'en les laiſſant il n'a pas ſeulement penſè que de telles quantitez ne deuſſent point entrer dans la compoſition. Et ainſi je penſe avoir aſſez prouvè que ce ne ſont pas mes ſeules imaginations comme il luy plait dire qui ont donnè ſujet a mes dernieres objections. Mais quoy qu'il en ſoit cela ne fait plus rien a la queſtion principale, qui eſt ſi M. Gregorius a demonſtrè, comme il pretend, *que la raiſon du cercle au quarrè de ſon diametre n'eſt pas analytique.*

APPENDICE III [1]

À LA PIÈCE VI DE LA P. 259 (INSUFFISANCE DE LA DÉMONSTRATION DE GREGORY DE L'IMPOSSIBILITÉ DE LA QUADRATURE DU CERCLE, 1668).

[septembre 1668].

§ 1. Ex meis de circuli magnitudine [Fig. 30].



$2c + 3a$ —— $4c + a$ —— $\frac{1}{3}c - \frac{1}{3}a$ —— ....

$4c + a$

$\frac{\frac{3}{4}cc - ac - \frac{1}{3}aa}{2c + 3a}$
c } ad. [c. à. d.: addendo]

$\frac{\frac{10}{3}cc + 2ac - \frac{1}{3}aa}{2c + 3a}$ arcus AB terminus major

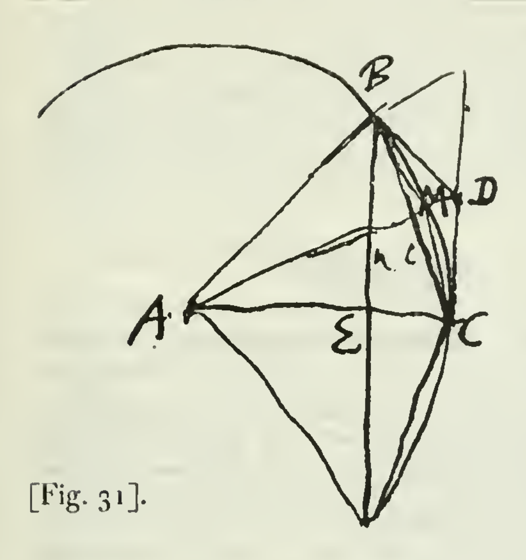
$a + \frac{10cc - 10aa}{6c + 9a}$ arcus AB terminus major

[Fig. 30].

Ceci correspond en effet à l'approximation donnée par Huygens en 1654 dans le Theor. XVI, Propos. XIX, de son Traité „De circuli magnitudine inventa" (T. XIII, p. 169). Le théorème, qui est accompagné d'une démonstration, donne tant une limite inférieure de l'arc AB $\left(\frac{4c - a}{3}\right)$, qu'une limite supérieure du même arc, celle considérée ici. Les mots „arcus AB terminus major" signifient donc que la quantité $a + \frac{10(c^2 - a^2)}{3(2c + 3a)}$ est supérieure à la longueur de l'arc.

---

[1]) Manuscrit D, p. 40—47. Les p. 37 et 50 portent respectivement les dates 21 sept. et 30 sept. 1668. Les calculs de Huygens dans le Manuscrit D servent à préparer son article de novembre 1668 se rapportant à la polémique avec Gregory. Comparez les deux Appendices précédents.



[Fig. 31].

Area polygoni ABC [Fig. 31] eſt BE ∞ a in AC. Pour trouver l'aire *du polygone* il faudrait évidemment encore multiplier par $\frac{n}{2}$, n étant le nombre des côtés.)

Area polygoni totidem laterum ABDC eſt BDC ∞ $\frac{cc}{a}$ in AC (même remarque).

$\frac{cc}{a} - a$ (ceci multiplié par AC, et par $\frac{n}{2}$, donne la différence des aires des polygones circonſcrit et inſcrit).

Per Prop. 6 meam [du Traité nommé, ſavoir, dans la traduction françaiſe: Tout cercle eſt plus petit que les deux tiers du polygone ſemblable inſcrit, T. XI, p. 130]:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{2}{3}\frac{cc}{a} + \frac{1}{3}a & \text{major terminus} \\ c + \frac{1}{3}c - \frac{1}{3}a & \text{minor terminus} \end{array}\right\}$$ s. [c. à. d.: ſubtrahendo]

Cette ſeconde équation correſpond à la Prop. V (ou 5), T. XI, p. 128: Tout cercle eſt plus grand qu'un polygone à côtés égaux, qui lui eſt inſcrit, plus le tiers de la quantité dont ce polygone ſurpaſſe un autre polygone inſcrit d'un nombre de côtés réduit à la moitié.

$$\frac{2}{3}\frac{cc}{a} + \frac{2}{3}a - \frac{4}{3}c \qquad \text{differentia Gregorij.}$$

Comme Huygens le dit dans la Pièce No. 1669 de notre T. VI (article publié dans le Journal des Sçavans du 12 nov. 1668) Gregory a en effet deux propoſitions équivalentes [2]) aux Prop. V et VI de Huygens, de ſorte qu'il trouve les mémes valeurs ſupérieure et inférieure pour la ſurface du cercle (il faut toujours ſuppoſer les expreſſions $\frac{2}{3}\frac{cc}{a} + \frac{1}{3}a$ etc. multipliées par le rayon AC et le nombre $\frac{n}{2}$; ou bien, ce qui eſt plus commode, ſuppoſer que le rayon a la longueur 1 et qu'il n'eſt pas queſtion du cercle entier mais ſeulement d'un ſecteur). La différence de ces limites ſupérieure et inférieure eſt donc une „differentia Gregorij" tout auſſi bien qu'une „differentia Hugenii".

[2]) Les Prop. XX et XXI de la „Vera circuli et hyperbolæ quadratura".

[3]) Nous avons ajouté la lettre M dans la Fig. 31.

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{\frac{2}{3}\frac{cc}{a} + \frac{2}{3}a - \frac{4}{3}c}{\frac{8}{3}\frac{cc}{a} + \frac{8}{3}a - \frac{16}{3}c} + & \\
5 \overline{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad} & \\
\frac{8}{15}\frac{cc}{a} + \frac{8}{15}a - \frac{16}{15}c & \\
\quad\quad\frac{4}{3}c - \frac{1}{3}a & \text{minor terminus} \left.\right\} \text{ad.} \\
\hline
\frac{8}{15}\frac{cc}{a} + \frac{3}{15}a + \frac{4}{15}c & \text{sector ABM Gregorij}
\end{array}$$

[3]).

D'après Huygens (voyez aussi la p. 274 du T. VI) Gregory croit obtenir [4]) une nouvelle fort bonne approximation (il s'agit apparemment d'un „terminus major") pour le secteur considéré en ajoutant à l'ancien „terminus minor" seulement les $\frac{4}{5}$ de la différence entre l'ancien „terminus major" et l'ancien „terminus minor". Huygens dit à la page citée (c. à. d. dans l'article du 12 novembre 1668 dont il était déjà question plus haut) „que cette approximation n'est pas vraye dans le cercle" [5]), c. à. d. qu'elle est beaucoup moins bonne que Gregory le pense, (à la p. 41 Huygens écrit: hanc approximationem Gregorius proponit sed inutilis est cum non accedat ad verum), puisqu'on obtient déjà un „terminus major" en ajoutant non pas $\frac{4}{5}$ mais $\frac{1}{5}$ de la dite différence (voyez aussi sur ce sujet la première note de l'Appendice V qui suit), ce qui donne

$$\frac{2}{15}\frac{cc}{a} - \frac{3}{15}a + \frac{16}{15}c.$$

Le rayon ayant par hypothèse la valeur 1, ce „terminus" pour le „sector ABM" peut tout aussi bien être appelé un „terminus" pour l'arc BC de la même Fig. 31. Huygens peut donc le comparer avec son „terminus major" à lui (le „terminus major" de la Prop. XIX, plus exact que $\frac{2}{3}\frac{c^2}{a} + \frac{1}{3}a$) pour le même arc. Ce faisant il constate que

$$\frac{2}{15}\frac{cc}{a} - \frac{3}{15}a + \frac{16}{15}c \;|\!|\; \frac{\frac{10}{3}cc + 2ac - \frac{1}{3}aa}{2c + 3a} \quad \text{(le signe } |\!| \text{ équivaut à notre } >).$$

En effet, en multipliant par $2c + 3a$, puis par $\frac{15}{4}a$, il obtient

$$\begin{array}{c}
\frac{4}{15}\frac{c^3}{a} + \frac{42}{15}ac + \frac{38}{15}cc - \frac{9}{15}aa \;|\!|\; \frac{50}{15}cc + \frac{30}{15}ac - \frac{5}{15}aa \\
\hline
c^3 - 3acc + 3aac - a^3 \;|\!|\; 0 \\
\hline
\text{cubus } c - a \text{ major nihilo}
\end{array}$$

c. à. d.

[4]) Dernier alinéa de la Prop. XXV de la „Vera circuli et hyperbolæ quadratura": „Est etiam alia approximatio omnium brevissima & maximè admiranda, etiamsi mihi non contingat illam demonstratione geometrica munire, etc".

[5]) Voyez l'Appendice V qui suit pour le cas de l'hyperbole, à laquelle la nouvelle approximation de Gregory se rapporte aussi.

ce qui eſt évidemment exact (première ligne de la p. 275 du T. VI). Il conclut: Et cum mea ſit major vero et minor quam ipſius, erit et ipſius major vero [6]).

Notons que Gregory dans ſa lettre à Oldenburg du 25 décembre 1668, publiée dans les Philoſophical Tranſactions du 15 février ſuivant (notre No. 1682, T. VI), nie (p. 309) que Huygens, en faiſant cette obſervation ſur la valeur de l'approximation obtenue par l'addition des $\frac{4}{5}$ de la différence ſuſdite, ait bien compris ce qu'il voulait dire.

§ 2. Parlant de l'approximation exprimée par l'expreſſion $\frac{2}{15}\frac{cc}{a} - \frac{3}{15}a + \frac{16}{15}c$, Huygens dit dans le 4ième alinéa de la p. 274 du T. VI pouvoir démontrer que les polygones [inſcrit et circonſcrit] s'accordant juſqu'au tiers de leurs chiffres, [l'expreſſion conſidérée] ne peut differer au plus de la veritable grandeur du cercle [7]) que dans les deux derniers chiffres; et que le plus ſouvent il doit avoir tous les meſmes et au delà. Ceci n'eſt guère compréhenſible pour le lecteur qui ne connait pas le raiſonnement de Huygens [8]). Cette demi-obſcurité eſt peut-être voulue. Quoi qu'il en ſoit, il ne ſemble pas inopportun de faire connaître le dit raiſonnement.

A la page 44 du Manuſcrit D Huygens commence par établir les ſix théorèmes ſuivants, tous bien ſimples et dont il ne formule donc pas la démonſtration.

Theor. 1.

Si numerus in numerum ducatur, habebit productum *non plures* cifras quam ſumma cifrarum eorum qui ducti ſunt. Idem vero productum non pauciores habebit cifras quam ſumma cifrarum ductorum minus unâ.

Theor. 2.

Si numerus per numerum minorem dividatur, habebit quotiens non pauciores cifras quam differentia cifrarum eorundem numerorum, non plures vero quam eadem differentia cifrarum plus unâ.

Theor. 3.

Si duo numeri æquali numero cifrarum priores aliquot cifras eaſdem habuerint et proxima ab illis cifra majoris excedat binario vel amplius cifram ſuppoſitam minoris,

[6]) Obſervons en paſſant qu'on n'a pas (l. 3 de la p. 275 du T. VI) $d = \frac{a}{cc}$ mais $d = \frac{cc}{a}$.

[7]) Ou plutôt du ſecteur de cercle conſidéré, puiſque l'expreſſion conſidérée (voyez le § 1) ne correſpond pas au cercle entier, mais à un ſecteur.

[8]) Comparez le début du dernier alinéa de la note 15 de la p. 142 du T. XII, ſe rapportant au Traité de 1654 „De circuli magnitudine inventa".

auferaturque minor numerus à majore. habebit residuum totidem cifras quot erant in alterutro numero dissimiles.

Theor. 4.

Si duo numeri æqualem multitudinem cifrarum habuerint et priores aliquot cifras easdem alter alteri. ablato minore a majori, reliquus non habebit plures cifras quam quot erant cifræ dissimiles in ijsdem numeris.

Theor. 5.

Si duo numeri alter alteri addantur, summa non habebit plures cifras quam major numerorum plus unâ. quod autem non pauciores habebit quam major numerus, certum est.

Theor. 6.

Si numeri alicujus cifra initialis sit 1 vel 2, ejus quadratum cifras habebit bis tot quot latus cifras habebat minus una.

Ensuite, à la p. 47 du même Manuscrit, Huygens raisonne comme suit.

Differentia terminorum majorum Gregorij correcti, et mei (voyez le § 1 qui précède)

$$\frac{2}{15}\frac{cc}{a} - \frac{3}{15}a + \frac{16}{15}c - \frac{\frac{10}{3}cc - 2ac + \frac{1}{3}aa}{2c + 3a} \qquad \text{mult. p. } 2c + 3a$$

$$\frac{4}{15}\frac{c^3}{a} - \frac{12}{15}cc + \frac{12}{15}ac - \frac{4}{15}aa$$ non pauciores cifras habebit quam $x + 3s - 1$ (voyez sur x et s le texte qui suit)

mult. p. $\frac{15}{4}$

$$\frac{c^3}{a} - 3cc + 3ac - aa$$ non pauciores quam $x + 3s - 1$

$$c^3 - 3acc + 3aac - aa$$ cubus ex $c - a$ non pauciores quam $x + 6s - 2$.

Dico autem quod si numeri c et a habeant priorem tertiam partem cifrarum eandem, sicut essent 104.671912 ∞ c et 104.528463 ∞ a quod tunc terminus istorum alter alterum non superabit numero ultra quam ex duabus cifris constante.

Ponatur enim differentia eorum habere cifras x, et numerus cifrarum similium in numeris c et a, vocetur s. Ergo tam c quam a habent singuli cifras $3s$.

Quia ergo $2c + 3a$ non habet pauciores cifras quam $3s$, sequitur ducendo ut fecimus $2c + 3a$ in differentiam propositam, productum non habiturum pauciores quam $x + 3s - 1$ per theorema 1 folii antepenultimi. Quod productum rursus ducendo in $\frac{15}{4}$, jam illud quod oritur quoque non pauciores habebit quam $x + 3s - 1$ quia multiplicatio per $\frac{15}{4}$ non potest minuere numerum cifrarum. Rursus multiplicando per a qui

habet $3s$ cifras. productum non habebit pauciores quam $x + 6s - 2$ per theor. 1. Atqui hoc productum eſt cubus ab $c - a$. Ergo cubus ab $c - a$ non habet pauciores quam $x + 6s - 2$. Ergo viciſſim $x + 6s - 2$ non habet plures quam cubus ab $c - a$. Atqui cubus $c - a$ non habet plures quam $6s$, per 1 theor. Ergo $x + 6s - 2$ non habebit etiam plures quam $6s$. Ergo $x + 6s$ non habebit plures quam $6s + 2$. Ergo x non plures quam 2. Argumentatio ſubtilis.

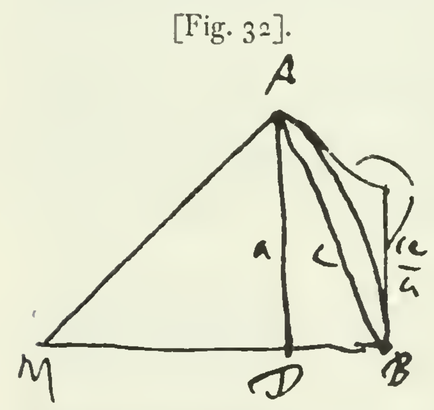
APPENDICE IV [1])

À LA PIÈCE VI DE LA P. 259
(INSUFFISANCE DE LA DÉMONSTRATION DE GREGORY DE L'IMPOSSIBILITÉ DE LA QUADRATURE DU CERCLE, 1668).

[sept. 1668].

On peut comparer la préfente Pièce avec la p. 275 du T. VI (faifant partie de l'article de Huygens du 12 nov. 1668, mentionné auffi par nous au début de l'Appendice II qui précède); on trouve à cette page une figure identique (quoiqu'avec d'autres lettres) à la Fig. 32 qui suit. La présente Pièce donne l'explication de l'approximation géométrique d'un arc de cercle à laquelle ces figures fe rapportent, explication qui faisait défaut dans l'article de nov. 1668.

[Fig. 32].



NB. Poftea pag. 24. h. [2]) terminus minor propior vero invenitur.

Inventio termini minoris proximi ex noftris de Circuli Magnitudine.

$\dfrac{\frac{10}{3}cc + 2\,ac - \frac{1}{3}aa}{2c + 3a}$	s.	major terminus arcus AB [Fig. 32] inventus pag. 1 [2]) hujus [3]).
$\frac{4}{3}c - \frac{1}{3}a$		minor terminus ex noftris de Circuli magnitudine.
$\dfrac{2cc - 4ac + 2aa}{6c + 9a}$ $\frac{4}{3}$	m.	differentia terminorum. NB. numerator eft quadratum duplum ab $c - a$.
$\dfrac{\frac{8}{3}cc - \frac{16}{3}ac + \frac{8}{3}aa}{6c + 9a}$ $2c + 3a$		fefquitertia terminorum differentia. adde per præceptum noftrum prop. 20.

[1]) Manufcrit D, p. 48—51. Voyez fur la date de la Pièce la note 1 de la p. 310 qui précède. Vers la fin on trouve dans la Pièce la date du 30 septembre.

[2]) Un groupe de pages du Manuscrit D se rapportant à la recherche de la quadrature du cercle a été numéroté par Huygens. Ces numéros (1—25) correspondent à la numération plus récente 40—64, dont nous nous servons.

[3]) Voyez sur cette formule la p. 310 qui précède.

Il s'agit du Problema IV. Propos. XX du Traité de 1654 „De circuli magnitudine inventa" (T. XII p. 172 et suiv.). Comme on peut le voir auſſi dans le T. XII, Huygens n'a pas voulu publier la démonſtration de cette propoſition qui enſeigne de trouver, en partant des limites ſupérieure et inférieure trouvées antérieurement, une limite inférieure plus exacte pour la longueur d'un arc.

La limite qu'il calcule ici ſuivant cette propoſition (dans ſon traité de 1654 il n'avait pas donné de formule algébrique), ſavoir $a + \frac{10(c^2 - a^2)}{6c + 9a + \frac{8(c-a)^2}{6c+9a}}$, correſpond (lorſqu'on multiplie par 2n, nombre des côtés du polygone inſcrit, dont AB = c eſt le côté) à la formule (terminus minor) de la note 52 de la p. 175 du T. XII, également déduite par nous de cette propoſition,

$$p_n + \frac{10(p_{2n}^2 - p_n^2)}{6p_{2n} + 9p_n + \frac{8(p_{2n} - p_n)^2}{6p_{2n} + 9p_n}}$$

On peut voir auſſi dans le T. XII que nous n'avons pas réuſſi à reconſtruire la démonſtration de la Prop. XX ſupprimée à deſſein par Huygens et qui ne ſe trouve pas dans les manuſcrits conſervés.

Per idem præceptum ut ſumma [4])

$$\frac{3 \text{ qu. } 2c + 3a + \frac{8}{3} \text{ qu. } c - a}{6c + 9a} \;\rule{2em}{0.4pt}\; \frac{10c}{3} + \frac{10}{3}a \;\rule{2em}{0.4pt}\; c - a / \ldots$$

hoc eſt ut

$$\frac{9 \text{ qu. } 2c + 3a + 8 \text{ qu. } c - a}{6c + 9a} \;\rule{2em}{0.4pt}\; 10c + 10a \;\rule{2em}{0.4pt}\; c - a /$$

$$\frac{10cc - 10aa}{\frac{9 \text{ qu. } \overline{2c + 3a} + 8 \text{ qu. } \overline{c - a}}{6c + 9a}}$$

seu $\frac{10cc - 10aa}{6c + 9a + \frac{8 \text{ qu. } \overline{c-a}}{6c + 9a}} + a$ arcus AB in minore termino.

Major terminus ante inventus pag. 1 [5]) hujus $\frac{10cc - 10aa}{6c + 9a} + a$ [6]).

Additiuncula ad a in majori ad additiunculam in minori termino ad eandem a, eſt vice verſa ut hujus denominator ad illius denominatorem quoniam numerator utrobique idem. Ergo ſi additiuncula in majori ſit HO, in minori HZ [Fig. 33]; erit

4) Savoir la somme des trois expressions considérées en dernier lieu.

5) Un groupe de pages du Manuscrit D se rapportant à la recherche de la quadrature du cercle a été numéroté par Huygens. Ces numéros (1—25) correspondent à la numération plus récente 40—64, dont nous nous servons.

6) Voyez sur cette formule la p. 310 qui précède.

[Fig. 33].

$$HO \text{ ad } HZ \text{ ut } 6c + 9a + \frac{8\,\text{qu.}\overline{c-a}}{6c+9a} \text{ ad } 6c + 9a$$

$$HO \text{ ad } OZ \text{ ut } 6c + 9a + \frac{8\,\text{qu.}\overline{c-a}}{6c+9a} \top \frac{8\,\text{qu.}\overline{c-a}}{6c+9a}$$

Hinc invento HO invenitur et HZ vel OZ.

$$HO \text{ ad } OZ \text{ ut qu.}\overline{6c+9a} + 8\,\text{qu.}\overline{c-a} \top 8\,\text{qu.}\overline{c-a}$$

$$HZ \text{ ad } ZO \text{ ut qu.}\overline{6c+9a} \top 8\,\text{qu.}\overline{c-a}.$$

Cum ergo ut qu. $\overline{6c+9a}$ ad 8 qu. $\overline{c-a}$ ita ſit HZ ad ZO, hinc oſtendo differentiam terminorum OZ non eſſe plurium quam duarum cifrarum ſi prior triens cifrarum conſtituentium a et c ſit idem. Dicatur enim numerus ille, cifrarum utrobique earundem, s. Ergo tam a quam c habent cifras $3s$ et $c - a$ non plures quam $2s$, per Theor. 4 [7]).

Demonſtratio. Cum ergo $6c + 9a$ ſit major numerus quam $10a$; conſtat numerum factum additione $6c + 9a$, habere non pauciores cifras quam $3s$ + unâ. Unde quadratum ab $6c + 9a$ non pauciores habebit quam $6s$ + unâ, per theor. 1 pag. 5 hujus. Sed $c - a$ non habet plures quam $2s$, per theor. 4 hujus. Ergo, quadratum ex $c - a$ non habebit plures quam $4s$ et 8 qu.$\overline{c-a}$ non plures quam $4s + 1$. Rurſus HZ cum ſit minor utique quam dupla $c - a$, non habebit plures quam $2s + 1$ per theor. 5 hujus [7]). Ergo ducendo HZ in 8 qu.$\overline{c-a}$, productum non habebit plures quam $6s + 2$. Et dividendo hoc productum per qu. $\overline{6c+9a}$ quod non pauciores habebat quam $6s + 1$ habebit factus hinc hoc eſt OZ, non plures quam cifras 2, quantæ fiunt cum à $6s + 2$ aufertur $6s + 1$, et rurſus 1 additur per theor. 2 hujus.

Numquam igitur inter terminos approximationis meæ majorem minoremque (ſumtis utriusque cifris triplis numero ad multitudinem cifrarum ſimilium in a et c, ſinu et ſubtenſa) poterit differentia major eſſe quam duarum cifrarum. plerumque vero ad unius quidem reperitur, ſed tantum fractio aliqua, cum nempe amplius quam triplus verorum characterum numerus efficitur.

Quæ autem indicant fore minorem differentiam ſunt hæc. Ratio horum patet ex præcedente demonſtratione. Si $6c + 9a$ habeat plures cifras quam $3s + 1$, nam poteſt habere $3s + 2$, ſi initiales in a et c ſint magnæ. et ſic qu. $\overline{6c+9a}$ habebit $6s + 3$ ut conſtat ex 1 theor. Rurſus ſi $c - a$ habeat initiales humiles ita ut qu. $\overline{c-a}$ habeat tantum $4s - 1$ cifras: ſimul enim fiet ut HZ, quæ non eſt dupla $c - a$, tantum habeat $2s$ cifras. Hæc humilitas cifrarum initialium in $c - a$ cernitur in exemplo pag. 3 [8]) unde ne unius quidem cifræ differentia inter terminos oritur ut videre licet in noſtris de magnitudine circuli prop. 20 [9]), ubi haec polygona adhibentur.

---

[7]) Voyez les six théorèmes de la p. 313 qui précède.

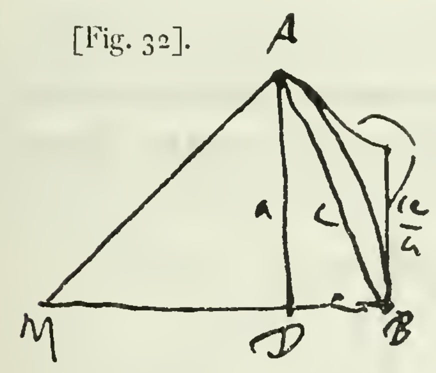
[8]) Il y est question de nombres 104 . . . .

[9]) Déjà citée plus haut.

Cæterum cum noſtri termini hi major ſupra minorem poſſint differentiam habere duarum cifrarum, et Terminus ex nova approximatione pag. 8 [10]) poſſit exceſſum habere ſupra majorem eorundem ſimiliter duarum cifrarum. videndum jam quantum exceſſum habere poſſit Terminus iſte ex nova approximatione ſupra Terminum minorem. Videretur dicendum prima fronte poſſe eum exceſſum eſſe 4 cifrarum. ſed non poteſt eſſe plurium quam trium. Nam cum differentia inter minorem et majorem veterem non ſit plurium quam 2 cifrarum, non erit major iſta differentia quam 99. Et denuo cum differentia inter majorem veterem, et majorem novum ſit non plurium quam 2 cifrarum nec major proinde quam 99, utraque differentia juncta, hoc eſt differentia inter minorem terminum et majorem novum non poterit eſſe major quam bis 99, ſive 198; ideoque non major quam 3 cifrarum.

Eſt vero pulchra quoque nova iſta Approximatio [10]), quod, ſicut vetus [11]), triplum verarum notarum numerum in arcuum dimenſione producit. nam uno ad ſummum ac plerumque ne uno quidem charactere aberrat, et quanquam pauxillo à veteri vincatur hoc exigui eſt momenti. Dat autem et conſtructionem egregiam ac ſimplicem, et ad numerorum calculum adhibita tantum opus habet latere inſcripto, et circumſcripto, et inſcripto polygoni quod reliquorum numerum laterum ſubduplum habeat. Nam his datis, ſola additione et ſubtractione arcus longitudinem veræ proximam edit, adeo exacte ut ſi vel 45°. gr. ſit arcus non differat $\frac{1}{25000}$ ſubtenſæ. Nempe ſi ſinus ſit a, ſubtenſa hic erit arcus $\infty\ c + \dfrac{\frac{1}{3}c + \frac{2}{3}\frac{cc}{a} - a}{5}$ unde conſtructio erit hujusmodi.

[Fig. 32].



Virij [12]). 30 Sept. 1668. $c + \dfrac{\frac{1}{3}c + \frac{2}{3}\frac{cc}{a} - a}{5}$

Approximatio nova. paulo major arcu cum a eſt ſinus. c ſubtenſa [Fig. 32]. ideoque $\frac{cc}{a}$ latus polygoni circumſcripti totidem laterum quot c.

[10]) C. à. d. l'approximation (terminus major) $\frac{2}{15}\frac{cc}{a} - \frac{3}{15}a + \frac{16}{15}c$ de la p. 312 qui précède.

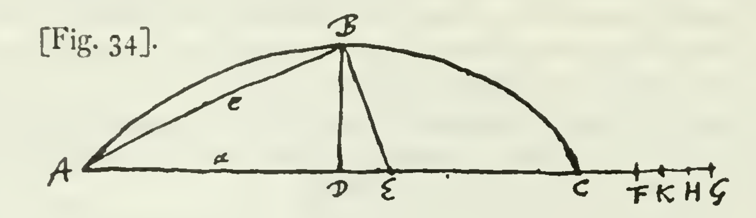
[11]) C. à. d. $\dfrac{\frac{10}{3}cc + 2ac - \frac{1}{3}aa}{2c + 3a}$ ou $\dfrac{10cc - 10aa}{6c + 9a} + a$, également terminus major.

[12]) C. à. d. à Viry, chez Claude Perrault (T. VI. p. 497). Comparez sur ce séjour la p. 323 du T. X ainſi que la p. 372 du T. XIX.

CONSTRUCTIO.

Datus fit arcus ABC cujus fubtenfa AC [Fig. 34]. Dividatur arcus bifariam in B et duplæ fubtenfæ AB ponatur æqualis AF. Ductâque BE perpendiculari in AB, ponatur duplæ AE æqualis AG. Et fit GH tertia pars GF, et divifa HC in quinque

[Fig. 34].

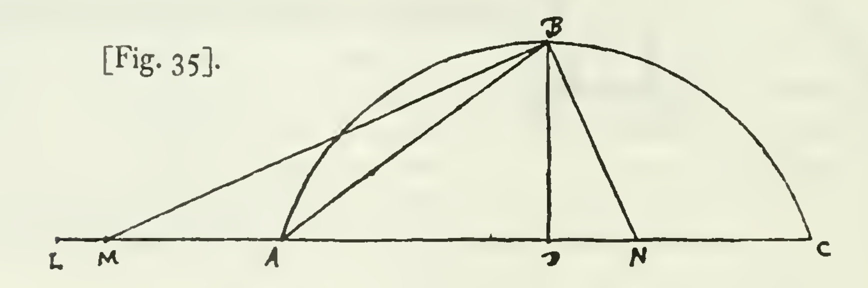


æquales fit earum una FK. Et erit AF [*lifez* AK] æqualis arcui ABC, minimo excedens.

Ratio constructionis. AG fit $\frac{2cc}{a}$. AF eft $2c$. Ergo FG, $\frac{2cc}{a} - 2c$. Et GH $\infty \frac{2}{3}\frac{cc}{a} - \frac{2}{3}c$. Qua ablata ab GA, $\frac{2cc}{a}$ fit HA $\infty \frac{4}{3}\frac{cc}{a} + \frac{2}{3}c$. Et CH $\infty \frac{4}{3}\frac{cc}{a} + \frac{2}{3}c - 2a$. Et hujus $\frac{1}{5}$ nempe FK $\dfrac{\frac{4}{3}\frac{cc}{a} + \frac{2}{3}c - 2a}{5}$ qua addita ad AF ∞ $2c$, fit AK ∞ $2c + \dfrac{\frac{2}{3}c + \frac{4}{3}\frac{cc}{a} - 2a}{5}$.

Conftructio omnium accuratiffima, et elegantiffima ex approximatione veteri, $\frac{10cc - 10aa}{6c + 9a} + a$, *noviter inventa* [13]). Sit datus arcus portionis ABC, cujus bafis

[Fig. 35].



[13]) C'eft la rectification approchée de l'arc de cercle de la p. 275 du T. VI dont nous avons parlé au début du présent Avertissement.

AC diameter BD [Fig. 35]. In producta baſi accipiatur AL æqualis $\frac{2}{3}$ ſubtenſæ AB. Et minuatur DL parte ſui decima LM. Ductaque recta MC, ſit ei perpendicularis BN. Erit AN arcui AB æqualis, et dupla AN arcui ABC.

Ratio conſtructionis quod $\dfrac{10cc - 10aa}{6c + 9a} \infty \dfrac{cc - aa}{\frac{9}{10}\cdot\frac{2}{3}c + \frac{9}{10}a}$.

Eſt autem AD ∞ a, AB ∞ c, ideoque BD ∞ $\sqrt{cc - aa}$. Unde

ut MD ad BD ita BD DN

$$\tfrac{9}{10}\cdot\tfrac{2}{3}c + \tfrac{9}{10}a \;\text{—⊤—}\; \sqrt{cc - aa} \;\text{——}\; \sqrt{cc - aa} \Big/ \frac{cc - aa}{\frac{9}{10}\cdot\frac{2}{3}c + \frac{9}{10}a}$$ cui additur AD ∞ a.

Hæc conſtructio etſi in parvis arcubus parum excellat præcedentem, in magnis tamen arcubus multo præſtantior eſt, nam etſi arcus ABC ſit ſemicirculi, tamen dupla longitudo AN non excedet arcum ABC $\frac{1}{1400}$ ſui ipſius cum eo caſu in priori conſtructione AK excedat arcum ABC amplius quam $\frac{1}{370}$ ſuæ longitudinis.

Quod ſi vero ABC ſit triens circumferentiæ, jam in poſteriori conſtructione, longitudo dupla AN non excedet arcum ABC $\frac{1}{13000}$ ſui parte. At ſi ABC ſit circumferentiæ quadrans, non erit exceſſus $\frac{1}{90000}$ duplæ AN.

Rurſus ſi ABC ſit $\frac{1}{8}$ circumferentiæ, non erit exceſſus $\frac{1}{5800000}$ duplæ AN.

Differentia inter ſubtenſam et ſinum eſt ad differentiam inter arcum et ſinum ut ſexcupla ſubtenſa cum noncuplo ſinu ad decuplum ſummæ ſinus et ſubtenſæ.

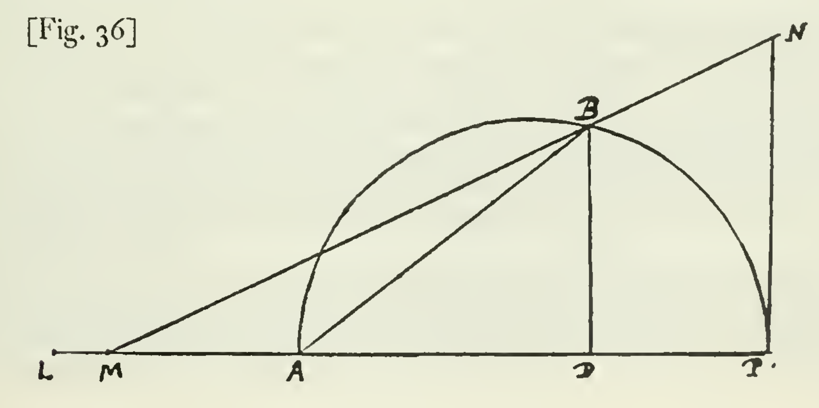
Vel

Dato arcu circuli quadrante non majori, ſi fiat ut ſexcupla ſubtensa cum noncuplo ſinu, ad ſummam ſinus ſubtenſæque ita eorundem differentia ad aliam, ejus decupla addita ſinui efficiet longitudinem arcus.

Vel ſic optime.

Omnis circuli portionis, ſemicirculo non majoris, arcus æqualis eſt baſi portionis et lineæ quæ ſit ad diametrum portionis ut idem diameter ad novem decimas compo

[Fig. 36]



fitæ ex quadrante bafis cum triente lateris trianguli maximi intra portionem infcripti.

Poteft et eadem conftructio variari hoc modo.

Sit datus arcus BP [Fig. 36] pars femicircumferentiæ ABP, dimidia minor. Ducatur BD perpendicularis diametro AP. Et jungatur AB, ejufque duabus tertijs fumatur æqualis AL in producta diametro PA. totaque LD diminuatur parte fui decima LM, et jungatur MB et producatur occurratque tangenti circumferentiam ad P, in puncto N. Erit PN æqualis arcui PB.

APPENDICE V

À LA PIÈCE VI DE LA P. 259

(INSUFFISANCE DE LA DÉMONSTRATION DE GREGORY DE L'IMPOSSIBILITE DE LA QUADRATURE DU CERCLE, 1668).

Ce n'eſt pas ſeulement à la quadrature du cercle que ſe rapportaient les publications de Gregory, c'eſt auſſi à celle de l'hyperbole. Or, dans ſa critique du 2 juillet 1668, mentionnée au début de notre Appendice I, Huygens ne diſait rien de l'hyperbole. Dans le projet d'une réplique qui conſtitue notre Appendice II il ſe contentait également de dire (premier alinéa) qu'il demeure encore incertain ſi le cercle et le quarré de ſon diamètre ne ſont pas commenſurables, c'eſt a dire s'ils ne ſont pas entre eux en raiſon de nombre a nombre (le mot „nombre" étant pris dans le ſens de nombre entier ou ſourd; comparez la p. 188 qui précède). Mais dans ſa réplique imprimée il ajoute (T. VI, p. 273, l. 7—9): et de meſme en ce qui eſt d'une portion determinée de l'hyperbole, et de ſa figure rectiligne inſcrite. Et à la p. 274: je trouve que cette approximation [1]) n'eſt pas vraye dans le cercle, quoy qu'elle le ſoit dans l'hyperbole; et que comme dans celle-cy il prend la plus grande des quatre moyennes arithmétiques, il faut prendre la plus petite pour l'approximation du cercle [1]).

C'eſt aux p. 54—55 et 60 du Manuſcrit D que Huygens conſidère la quadrature approchée de l'hyperbole, la comparant avec celle du cercle. P. 54 du Manuſcrit (on trouve d'ailleurs les mêmes „termini minor et major" du cercle déjà à la p. 311 qui précède [2]):

---

[1]) A la p. 43 du Manuſcrit D Huygens écrit, après un long calcul numérique, en parlant des 4 proportionnelles arithmétiques intercalées par Gregory entre un „terminus major" et un „terminus minor" (il s'agissait de trouver un nouveau „terminus" plus rapproché — „terminus *major*" plus petit dans le cas du cercle —, voyez sur cette question l'alinéa „D'après Huygens etc." de la p. 312 de l'Appendice III qui précède): non ergo maxima ſed minima 4 mediarum arithmetice proportionalium inter inventos terminos Gregorio ſumenda erat, in Circulo et Ellipſi ſaltem (dans la „Vera circuli et hyperbolæ quadratura" de Gregory il eſt auſſi queſtion de l'ellipſe).

[2]) Il eſt vrai que le c et le a du présent Appendice ne sont pas les mêmes que le c et le a de l'Appendice III, mais ils leur sont proportionnels (nous parlons toujours du cercle) dans le rapport de la corde au rayon; c'eſt pourquoi l'on trouve ici, avec les nouveaux c et a, formellement les mêmes „termini" pour *le secteur divisé par la demi-corde* que dans l'Appendice III pour *l'arc*.

In circulo [Fig. 37]

$c - a$ [= PR, flèche]

$\frac{4}{3}c - \frac{4}{3}a$ [multipl. par $\frac{\text{HE}}{2}$ <] ⌓ HPE

ceci en vertu du Th. III. Prop. III de „De Circuli magnitudine inventa" de 1654 (T. XII, p. 123).

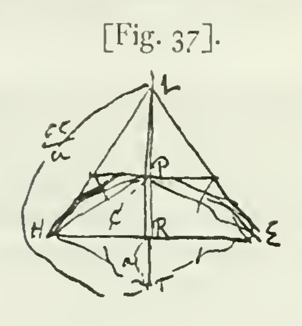
In hyperb. [Fig. 38]

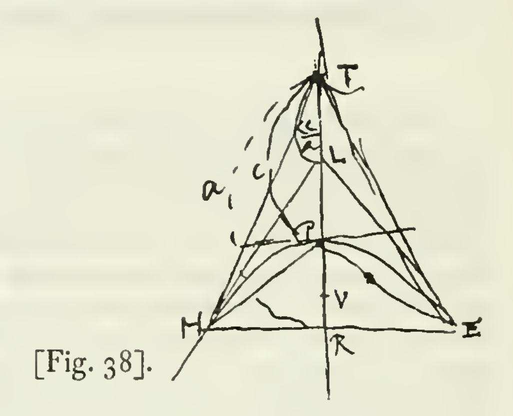
$a - c$ [= PR, flèche]

$\frac{4}{3}a - \frac{4}{3}c$ [multipl. par $\frac{\text{HE}}{2}$ >] ⌓ HPE.

ce qui ressort (voyez la note 3) du Th. VI des „Theoremata de quadratura hyperboles etc." (T. XI, p. 304).

[Fig. 37].





[Fig. 38].

a [multipl. par $\frac{\text{HE}}{2}$ =] △ THE

[addition]

$\frac{4}{3}c - \frac{1}{3}a$ [m. par $\frac{\text{HE}}{2}$ <] THPE

minor terminus

a [multipl. par $\frac{\text{HE}}{2}$ =] △ THE

ex

$\frac{4}{3}c - \frac{1}{3}a$ [m. par $\frac{\text{HE}}{2}$?] HTEP

major terminus

Huygens commet ici une erreur dans le cas de l'hyperbole. En retranchant $\frac{4}{3}a - \frac{4}{3}c$ de a (multipliés l'un et l'autre par $\frac{\text{HE}}{2}$) on obtient $\left(\frac{4}{3}c - \frac{1}{3}a\right)\frac{\text{HE}}{2} <$ HTEP, donc, comme dans le cas du cercle, un „terminus *minor*".

[3]) D'après le Th. VI des „Theoremata de quadratura hyperboles etc." on a ⌓ HPE : △ HPE $= \frac{2}{3}$ (2TP + PR) : TV, V étant le centre de gravité du segment HPE. En d'autres termes

$$\frac{3}{4} \triangle \text{HPE} \frac{2\text{TP} + \text{PR}}{2\text{TV}} = ⌓\ \text{HPE},$$

où $\frac{2\text{TP} + \text{PR}}{2\text{TV}} = \frac{c + a}{2\text{TV}}$, ce qui est inférieur à l'unité, puisque VR < PV. Donc $\frac{4}{3}$ △ HPE > ⌓ HPE.

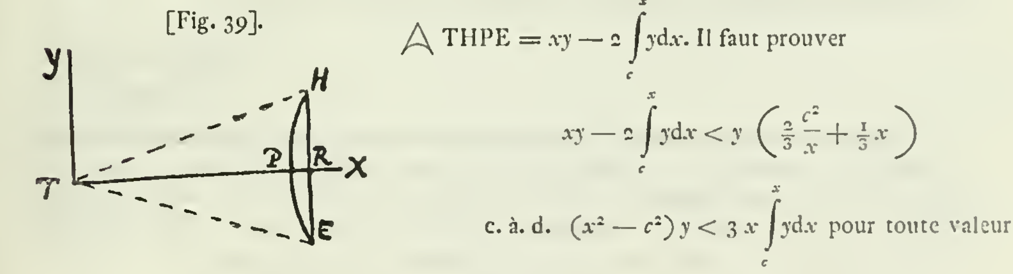
	$\frac{cc}{a} - a$ [multipl. par. $\frac{\text{HE}}{2}$ =] $\triangle$ HLE	$a - \frac{cc}{a}$ [multipl. par $\frac{\text{HE}}{2}$ =] $\triangle$ HLE
[multipl.]	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
	$\frac{2}{3}\frac{cc}{a} - \frac{2}{3}a$ [m. par. $\frac{\text{HE}}{2}$ >] ⌓ HPE	$\frac{2}{3}a - \frac{2}{3}\frac{cc}{a}$ [m. par $\frac{\text{HE}}{2}$?] ⌓ HPE
	ceci en vertu du Th. IV. Prop. IV de „De Circuli magnitudine inventa".	d'après le Th. XXIV de la „Vera circuli et hyperbolæ quadratura" de Gregory [4])
	a [m. par $\frac{\text{HE}}{2}$ =] $\triangle$ THE	a [m. par $\frac{\text{HE}}{2}$ =] $\triangle$ THE
[addition]		ex
	$\frac{2}{3}\frac{cc}{a} + \frac{1}{3}a$ [m. par $\frac{\text{HE}}{2}$ >] THPE	$\frac{2}{3}\frac{cc}{a} + \frac{1}{3}a$ [m. par $\frac{\text{HE}}{2}$?] HTEP
	major terminus	minor terminus

Ici aussi il y a chez Huygens erreur dans le cas de l'hyperbole. Il s'agit, comme dans le cas du cercle, d'un „terminus *major*" [5]).

---

[4]) Comparez la note 6 qui suit.

[5]) C'est ce qu'on peut démontrer directement comme suit. Soit l'équation de l'hyperbole HPE [Fig. 39] en coördonnées rectangulaires $\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1$. Le segment HPER est $2\int_c^x y\,dx$. On a



[Fig. 39].

THPE $= xy - 2\int_c^x y\,dx$. Il faut prouver

$$xy - 2\int_c^x y\,dx < y\left(\frac{2}{3}\frac{c^2}{x} + \frac{1}{3}x\right)$$

c. à. d. $(x^2 - c^2)\,y < 3x\int_c^x y\,dx$ pour toute valeur de x supérieure à c.

Pour $x = c$, les deux membres s'annulent. Il suffit donc de faire voir que les accroissements du premier membre sont toujours inférieurs aux accroissements correspondants du deuxième, c. à. d. que (après réduction)

$$x(x^2 - c^2)\,dy < y(2x^2 - c^2)\,dx$$

ou $$x(x^2 - c^2)\,dy < (2x^2 - c^2)\frac{c^2y^2}{q^2x}\,dy$$

ou $c^2 < x^2$, ce qui est vrai.

L'expression $\frac{2}{3}\frac{cc}{a} + \frac{1}{3}a$ est donc un „terminus major". C. Q. F. D.

$\frac{4}{3}c - \frac{1}{3}a$ major terminus Gregorij [6])

$\frac{2}{3}\frac{cc}{a} + \frac{1}{3}a$ minor terminus Gregorij [7])

[fouftraction] ________________

Comme nous l'avons dit plus haut la première expreſſion correspond au „terminus minor" et la deuxième au „terminus major". On voit tout de ſuite que la deuxième eſt ſupérieure à la première puiſque $\frac{2}{3}\frac{c^2}{a} + \frac{1}{3}a - (\frac{4}{3}c - \frac{1}{3}a) = \frac{2}{3a}(a - c)^2$.

---

[6]) Comme nous l'avons dit à la p. 311, les deux expressions ſont, dans le cas du cercle, à la fois des „termini Hugenii" et des „termini Gregorii"; où toutefois Huygens a la priorité. Ici Huygens parle de l'hyperbole, de sorte que l'expression „termini Gregorii' semble préférable.

[7]) Huygens écrit à la même p. 54:

$$\text{TV} \quad c + \tfrac{3}{5}a - \tfrac{3}{5}c \qquad \tfrac{2}{3}\text{RTP} \qquad \triangle\text{HPE} \qquad \frown\text{HPE} \qquad \frown\text{HPE}$$

$$\text{TV} \quad \tfrac{2}{5}c + \tfrac{3}{5}a \;\text{———}\; \tfrac{2}{3}a + \tfrac{2}{3}c \;\text{———}\; a - c \Big/ \frac{\frac{2}{3}aa - \frac{2}{3}cc}{\frac{2}{3}c + \frac{3}{5}a} \Big| \frac{10aa - 10cc}{6c + 9a}$$

$$\text{ex } a$$

$$a - \frac{10aa - 10cc}{6c + 9a}$$

minor terminus meus in hyperb. $\triangle$ THPE (lequel peut auſſi s'écrire

$$\frac{\frac{10}{3}c^2 + 2ac - \frac{1}{3}a^2}{2c + 3a}).$$

Comparez sur ce calcul la note 3 qui précède. Seulement Huygens prend ici pour V le centre de gravité d'un segment de *parabole* au lieu du segment *hyperbolique* considéré, comme il le faisait auſſi en d'autres occasions (voyez les p. 432 et 454 du T. XIV). Il n'obtient donc pas la valeur exacte de la surface du segment hyperbolique HPE, mais la valeur approchée $\frac{\text{HE}}{2}\left(\frac{10a^2 - 10c^2}{6c + 9a}\right)$, d'où se tire pour le $\triangle$ THPE la valeur approchée $\frac{\text{HE}}{2}\cdot\frac{\frac{10}{3}c^2 + 2ac - \frac{1}{3}a^2}{2c + 3a}$. Pour reconnaître s'il s'agit d'un „terminus major" ou bien d'un „terminus minor", il peut sembler qu'il faille savoir d'ailleurs si le centre de gravité du segment hyperbolique se trouve, oui ou non, plus près de la base que celui du segment parabolique également symétrique de même base et de même hauteur. En réalité cela n'eſt nullement nécessaire: on voit que la formule pour $\triangle$ THPE s'annule non seulement pour HE $= 0$ (segment évanouissant), ce qui est évident a priori, mais aussi pour $a = c(3 + \sqrt{19})$, où le $\triangle$ THPE a, comme toujours, une valeur positive; nous avons donc affaire à un „terminus minor".

$\frac{4}{3}c - \frac{2}{3}\frac{cc}{a} - \frac{2}{3}a$ diff. term. Greg.

Différence négative.

[mult.] $\frac{4}{5}$

$\frac{16}{15}c - \frac{8}{15}\frac{cc}{a} - \frac{8}{15}a$ $\frac{4}{5}$ diff.

a. [c. à. d. addendo]

$\frac{2}{3}\frac{cc}{a} + \frac{1}{3}a$ minor term.

C'eſt au contraire un „terminus major". L'addition ne donne donc pas, comme Huygens le penſe, le terminus minor $+ \frac{4}{5}$ (t. major — t. minor), mais le t. minor $+ \frac{1}{5}$ de cette différence.

$\frac{16}{15}c + \frac{2}{15}\frac{cc}{a} - \frac{3}{15}a$ approximatio Gregorij △ THPE [c'eſt donc là l'approximation que Huygens appelle „approximatio Gregorij" et dont il diſait dans les paroles citées plus haut qu'elle eſt vraye . . . dans l'hyperbole] quæ erit minor terminus quippe minor etiam meo termino hic invento [voyez la note 7], ut conſtabit ſimili demonſtratione ac pag. 4 [nos p. 312—316, démonſtration ſe terminant par les mots: Et cum mea ſit major vero et minor quam ipſius, erit et ipſius major vero] obſervando quod hic a major quam c [de ſorte que $(c-a)^3$ eſt négatif]. On voit en effet que la „demonſtratio" eſt „ſimilis" puiſque l'approximation trouvée par Huygens (note 7) $\frac{\frac{10}{3}c^2 + 2ac - \frac{1}{3}a^2}{2c + 3a}$ a exactement la même forme pour l'hyperbole que pour le cercle avec cette différence que cette expreſſion conſtitue un „terminus major" pour le cas du cercle, mais un „terminus minor" pour celui de l'hyperbole.

Il importe peu que c et a ſoient ici, tant pour la formule $\frac{16}{15}c + \frac{2}{15}\frac{cc}{a} - \frac{3}{15}a$ que pour la formule $\frac{\frac{10}{3}c^2 + 2ac - \frac{1}{3}a^2}{2c + 3a}$, d'autres grandeurs que dans les formules identiques de la p. 312 (comparez la note 2 de la p. 323). L'„approximatio Gregorii" eſt donc en effet, comme Huygens le dit, un „terminus minor".

La valeur $\frac{10(a^2 - c^2)}{6c + 9a}$, elle, est donc supérieure à la vraie valeur du segment hyperbolique, de sorte qu'on peut conclure ici en passant (ce que Huygens ne fait pas) que le centre de gravité du segment hyperbolique est plus près de la base que celui du segment parabolique. Nous avons admis tacitement que s'il en est ainsi pour les centres de gravité de deux segments symétriques de même base et de même hauteur, il en est aussi de même pour toute autre paire de pareils segments (l'un hyperbolique, l'autre parabolique) de même base et de même hauteur, ce qui peut être justifié par des considérations géométriques.

APPENDICE I

À LA PIÈCE VIII DE LA P. 265 (PROBLEMA ALHASENI)

1672.

25 Maj. 1672.

Problema Alhaſeni. Dato circulo cujus centrum A radius AD, et punctis duobus B, C. Invenio punctum H in circumferentia circuli dati, unde ductæ HB, HC faciant ad circumferentiam angulos æquales.

Etc. C'eſt, peut-on dire, la Pièce que nous avons publiée dans le T. VII, p. 187—189 (pièce 1891). Comme on le voit dans ce Tome, elle fut envoyée de Paris par Huygens à Oldenburg dans une lettre du 1 juillet 1672. Les f. 136 et ſuiv. des Chartæ mathematicæ, auxquelles nous empruntons le préſent Appendice, nous font connaître la date de la compoſition. Voyez auſſi ſur la pièce 1891 le premier alinéa de l'Appendice II qui ſuit.

Dans ſa lettre Huygens a copié preſque mot à mot la Pièce du 25 mai, mais il a omis la „ratio conſtructionis" ou plutôt il ne l'a indiquée que dans trois lignes. Voici d'après la Pièce originale cette

Ratio Conſtructionis (où il faut conſulter les deux figures de la planche vis-à vis de la p. 187 du T. VII). Ducantur $P\gamma$, $Q\zeta$ perpendiculares in AM. Eſt ergo ut BA ad PA, hoc eſt, ut qu. BA ∞ $aa + bb$ ad qu. IA ∞ dd, ita MA ∞ a ad $A\gamma \infty \frac{add}{aa+bb}$, cui æqualem poſuimus p. Ergo $A\gamma \infty p$. Sed ut AL ad AM ita CA ad AB, et ita PA ad AQ, (eſt enim ▭ BAP ∞ ▭° CAQ, quia utrumque æquale qu.° AD radij). Ut autem PA ad AQ ita $A\gamma$ ad $A\zeta$. Ergo ut AL ∞ c ad AM ∞ a ita $A\gamma \infty p$ ad $A\zeta \infty \frac{ap}{c}$. Quia autem R dividit bifariam rectam PQ, etiam o bifariam ſecabit $\gamma\zeta$. Quamobrem AO erit $\infty \frac{1}{2} A\gamma + \frac{1}{2} A\zeta$, hoc eſt $\infty \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\frac{ap}{c}$, cui æqualem poſuimus s. Ergo AO ∞ s. Et OF ∞ $x - s$.

Porro ut AL ∞ c ad LC ∞ n ita eſt $A\gamma \infty p$ ad γP, quæ eſt $\frac{pn}{c}$. Item ut PA ad AQ hoc eſt ut CA ad AB, hoc eſt ut CL ∞ n ad MB ∞ b ita $P\gamma \infty \frac{pn}{c}$ ad $Q\zeta$, quæ ergo erit $\frac{bp}{c}$. Sed propter PQ biſectam in R, facile apparet eſſe OR $\infty \frac{1}{2}$ differentiæ inter $Q\zeta$ et $P\gamma$. Ergo OR erit $\frac{1}{2}\frac{pb}{c} - \frac{1}{2}\frac{pn}{c}$, cui æquale poſuimus q. Ergo OR ſive FV ∞ q. Et VH ∞ $y - q$. Sed erat OF ſive RV ∞ $x - s$. Ergo ▭ RVH ∞ xy—

$qx - sy + sq$. Sed idem □ RVH ex conſtructione æquale eſt □° AOR hoc eſt sq, nam AO eſt s et OR ∞ q. Ergo $xy - qx - sy + sq$ ∞ sq, et ablatis æqualibus fit xy ∞ $qx + sy$ ut in æquatione ſuperius inventa. [Ergo] conſtat recte conſtructum eſſe problema.

Quod autem hyperbolæ per puncta P, Q tranſeunt ſic conſtabit. Si enim in æquatione ſuperiori $\frac{pbx - pnx + pcy + pay}{2c}$ ∞ xy, fuerit x ∞ p ∞ $A\gamma$, fiet $\frac{bp - np + cy + ay}{2c}$ ∞ y et $\frac{bp - np}{a - c}$ ∞ $-y$. Ergo $a - c$ ad $b - n$ ut p ad $-y$. Sed $a - c$ eſt ad $b - n$ ut a ad b, quia a ad b ut c ad n. Ergo a ad b ut p ad $-y$. Sed ut a ad b, hoc eſt, ut AM ad MB ita p ſive $A\gamma$ ad γP. Ergo γP ∞ $-y$ quand [ſic] $A\gamma$ ∞ x. Unde liquet hyperbolam tranſire per punctum P. Itaque et per Q tranſibit hyperbola oppoſita quia PR ∞ RQ ex conſtructione. Eſtque R centrum oppoſitarum ſectionum.

Enſuite Huygens conſidère quelques cas particuliers. Il biffa plus tard ces remarques au crayon, ne les jugeant ſans doute pas fort importantes.

Voyez ſur les ſolutions concurrentes de René de Sluſe et de Huygens du problème d'Alhazen dans les années 1671 et 1672 les p. 218 et 219 (note 128) de l'Avertiſſement qui précède.

APPENDICE II

À LA PIÈCE VIII DE LA P. 265 (PROBLEMA ALHASENI)

1673.

Chartæ mathematicæ f. 147: De problemate Alhaſeni . . . Il y a une plus belle ſolution et demonſtration que toutes celles cy dans mon livre d'adverſaria marquè D, pres de la fin, ou dans un in 4°. Conſultez auſſi ſur ce ſujet notre note 30 à la p. 497 du T. X: en diſant que la ſolution de la pièce 1891 — c. à. d. de la Pièce publiée dans le T. VII dont il eſt question dans l'Appendice précédent — eſt „la plus ſimple et la plus élégante" nous avons tenu compte du fait, mentionné dans cette note 30, que la ſolution de la pièce 1891 et celle de l' „in 4°" c. à. d. du Manuſcrit 11, ne ſont pas entièrement diſſemblables.

Les p. 301, 384, 393, 418 du Manuſcrit D contiennent en effet des figures ſe rapportant à la ſolution du Manuſcrit 11. Ces dernières pages du Manuſcrit D datent de 1673; le texte du Manuſcrit 11 peut être de beaucoup plus tard. Les Chartæ mathematicæ contiennent d'ailleurs auſſi (outre pluſieurs autres feuilles ſe rapportant au problème d'Alhazen) une double feuille ſéparée (f. 143—144) qui porte la date du 2 ſeptembre 1673 et donne la même ſolution; une de ſes figures a été utiliſée dans la note 3 de la p. 570 du T. X. Le texte du Manuſcrit 11 a apparemment été copié en partie de celui de la double feuille 143—144. Nous avons déjà dit vers la fin de la p. 271 qui précède que c'eſt ici la conſtruction préférée par Huygens. Comme la p. 570 citée le fait voir, Huygens envoya, ou du moins ſe propoſait en novembre 1693 d'envoyer cette ſolution en France, où elle ne fut toutefois pas publiée. Voyez encore ſur ce ſujet notre remarque à la p. 271 qui précède.

Voici le texte du Manuſcrit 11 (p. 1—6):

Problema Alhazeni ad inveniendum in ſuperficie ſpeculi ſphærici punctum reflexionis.

Extat hoc problema in Alhazeni Arabis libris, quos de rebus opticis conſcripſit, unde idem tranſcripſit, ut cætera fere omnia, Vitellio [1]). Eſt autem ſolutio ac demonſtratio Alhazeni longa admodum ac tedioſa, ipſumque problema difficile viſum eſt geometris pleriſque nec a quoquam poſtea brevius conſtructum quod ſciam. Cæterum analyticæ artis opera non uno modo illud reſolvimus, quorum tandem hic quem tradimus, viſus eſt omnium optimus breviſſimuſque.

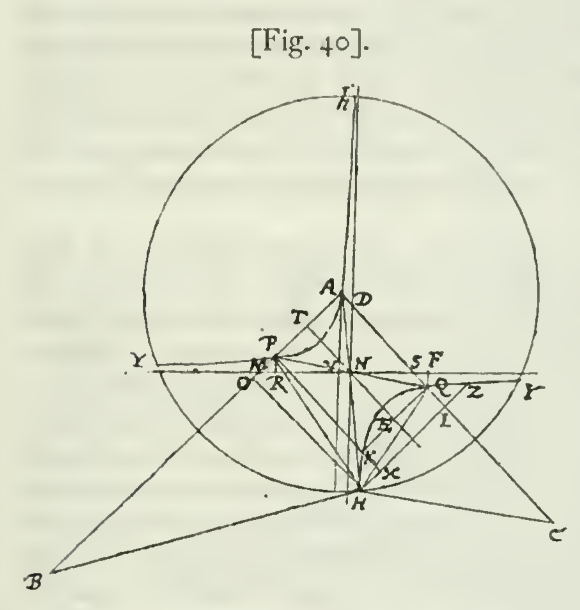
Sit ergo propoſitum dato circulo cujus centrum A, punctiſque B, C, invenire in

---

[1]) Voyez ſur les ouvrages d'optique d'Alhazen et de Vitellio les p. 6 et 9 du T. I et 5 du T. XIII.

circonferentia punctum H [Fig. 40] ut ductæ BH, HC occurrant circumferentiæ ad angulos æquales, sive ut æquales sint anguli AHB, AHC.

[Fig. 40].



Sit factum, et ducatur HP ut sit angulus HPA æqualis BHA. Item ducatur HQ, ut angulus HQA sit æqualis CHA. Est ergo et angulus HQA æqualis HPA. Erunt vero similia triangula BHA, HPA, cum et angulum A commune habeant. Itemque similia erunt triangula CHA, HQA. Proportionales igitur BA, AH, AP; item CA, AH, AQ. cumque duæ priores proportionalium utrobique datæ sint, dabitur et tertia. Datæ igitur AP, AQ. Vocetur jam AQ, a; AP, b. Ductâque HO parallelâ AC, et HI parallelâ AB, sit AI ∞ x: IH ∞ y.

Erunt autem similia triangula HOP, HIQ, cum æquales habeant angulos ad O et I, itemque ad P et Q. Itaque ut HO ad OP ita HI ad IQ. Unde rectangulum HO, IQ, sive rectangulum AIQ æquale rectangulo HI, OP, sive rectangulo AOP. Est autem AI ∞ x; AQ ∞ a. Ideoque QI ∞ $x—a$. Et rectang. AIQ ∞ $xx — ax$. Est etiam AO sive IH ∞ y; AP ∞ b; unde OP ∞ $y—b$, ac proinde rectang. AOP ∞ $yy — by$. Itaque $xx — ax$ ∞ $yy — by$. Unde patet, secundum regulas artis, punctum H esse ad hyperbolen; cujus latus transversum rectumque æqualia, siquidem in æquatione inveniuntur xx et yy nulla proportione affecta. Erit autem *constructio* hujusmodi.

Applicato quadrato radij ad singulas AB, AC, fiant AP, AQ, super rectis AB, AC accipiendæ; junctâque PQ dividatur ea æqualiter in puncto N [2]). per quod ducatur recta DN parallela AV, quæ angulum BAC æqualiter partitur. Ipsam vero ND ad N, recta alia ad rectos angulos secet, occurrens lineis AB, AC in M et S. Jam, asymptotis DN, NS, descriptæ intelligantur hyperbolæ oppositæ per puncta P, Q transeuntes; quarum altera etiam per centrum A transibit. Hæ secabunt circumferentiam in punctis H, h quæsitis ad quæ nimirum ductæ BH, HC propositum efficient.

---

[2]) Ce point N correspond au point Z de la Fig. 19 de la p. 270 qui précède. L'hyperbole de cette Fig. 19 est la même que celle considérée dans la présente Pièce.

Demonstratio. Ducantur enim PR, QF rectæ NS perpendiculares. Quia ergo PN æqualis NQ ex constructione erit et PR æqualis QF. Similia autem sunt triangula PRM, QFS, propter æquales angulos M et S ex constructione. Ergo MR æqualis SF. Quare et MS æqualis RF. Sed MS dupla est VS: et RF dupla NF, propter æquales PN, NQ. Itaque et VS æqualis NF; ideoque et VN æqualis SF. Est autem sicut SF ad SQ, sive ut SN ad SD ita VN ad AD. Ergo AD æqualis SQ, ideoque punctum A est in sectione opposita ipsi QH sectioni, hoc est in eadem in qua et punctum P, per 16 lib. 2 Conicorum [3]).

Jam ducantur HO parallela AQ et HI parallela AP, occurrens sectioni in Z. Item jungantur AH, HP, HQ, et per N ducatur recta TNE parallela AQ; ea dividet AP æqualiter, quia PN æqualis NQ. Est ergo AP ordinatim applicata ad sectionis diametrum TNE. Quod si ducatur ipsi AP parallela QK, etiam hæc diametro TNE ordinatim applicata erit, et ab ea proinde æqualiter dividetur in E. cumque QE sit æqualis AT, erit et tota QK æqualis AP. Quare si ducatur PK, ea erit parallela TE diametro. Conveniat autem cum recta HI in X. Cum igitur HXZ ad diametrum TE ordinatim sit applicata, quippe parallela AP ex constructione, sitque oppositarum sectionum latus rectum transverso æquale, ex prop. 22. lib. 3. Conicorum [4]) rectangulum PXK æquale esse rectangulo HXZ, ac proinde PX ad XH, hoc est HO ad OP, ut XZ ad XK, hoc est ut HI ad IQ. Est enim XZ æqualis HI, quoniam IX et ZH utraque bisecantur à recta TE. Sunt ergo similia triangula HOP, HIQ, cum anguli ad O et I æquales sint. Quare etiam æquales anguli HPO, HQI: ac proinde et HPA, HQA. Atqui angulus HPA æqualis est BHA, quia similia sunt triangula BHA, HPA, propter proportionales BA, AH, AP ex constructione, angulumque utrique triangulo communem ad A. Similiterque angulus HQA æqualis CHA quia similia sunt triangula CAH, HAQ propter proportionales CA, AH, AQ. Ergo etiam æquales erunt anguli BHA, CHA. quod erat demonstrandum.

Conveniunt autem tum constructio tum demonstratio, ijsdem verbis expressæ, omnibus casibus, sive extra sive intra circulum puncta B, C data sint, sive alterum extra alterum intra.

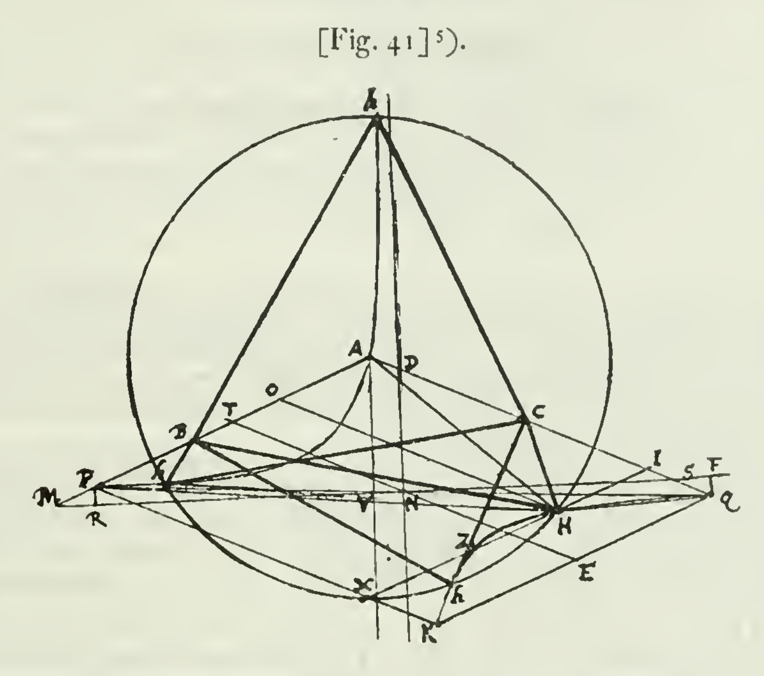
---

[3]) Apollonii Conica, Lib. II, Prop. XVI (d'après le texte latin de Heiberg): „Si in oppositis recta ducitur utramque rectam secans, quæ angulum angulis sectiones continentibus deinceps positum comprehendunt, cum utraque opposita in uno solo puncto concurret, et rectæ ex ea a sectionibus ad asymptotas abscisæ æquales erunt".

[4]) Apollonii Conica, Lib. III, Prop. XXII: Si sectiones oppositas duæ rectæ parallelæ contingunt, et ducuntur rectæ quædam secantes et inter se et sectiones, altera contingenti parallela, altera rectæ puncta contactus coniungenti parallela, erit, ut latus transversum figuræ rectæ puncta contactus coniungenti adplicatæ ad rectum, ita rectangulum comprehensum rectis inter sectiones punctumque concursus positis ad rectangulum comprehensum rectis inter sectionem punctumque concursus positis".

Et in caſu quidem quem figura [Fig. 41] exhibet, etiam punctum h reflectit radium in ſuperficie cava, ut ex B manans dirigatur ad C, vel vice verſa. Reliquæ vero interſectiones, circumferentiæ et oppoſitarum hyperbolarum, ad YY [Fig. 40], hoc tantum

[Fig. 41] [5]).



præſtant, ut radij, ex B vel C egreſſi, ita ibi reflectuntur ut reſpiciant punctum alterum, tanquam ex eo exijſſent. At cum utraque puncta B, C intra circulum dantur, quatuor eſſe poſſunt vera reflexionis puncta [Fig. 41].

---

[5]) Au crayon en marge d'une autre figure fort semblable à la Fig 41: pour les Echos du ſon a Chantilly. Memoires p. 160. La remarque fut sans doute ajoutée plus tard. Comparez la p. 570 de notre T. X, où Huygens parle des „Memoires de l'Academie au mois de Nov. 1692", traitant d'un „Echo pres de Rouen . . . d'un mur en demicercle", et conſultez notre note en cet endroit. Chantilly n'eſt pas fort loin de Rouen.

APPENDICE

À LA PIÈCE XII DE LA P. 286

(SUR LES ÉQUATIONS SOLIDES, 1680).

[1682]

Nous avons annoncé à la p. 106 du T. XII la publication dans un Tome ultérieur, de la Pièce empruntée au Manuſcrit 11 qui conſtitue la partie B (à laquelle ſe rattache la partie C) du préſent Appendice; auparavant (T. XII, p. 103—106) nous avions publié les conſtructions antérieures de Huygens de deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données; en même temps que de la préſente Pièce nous y faiſions mention de ce qui a été appelé ici la Pièce XII, ſavoir la communication de 1680 de Huygens à l'Académie.

C'eſt par exception — voyez la p. 207 de l'Avertiſſement qui précède et la note 1 qui ſuit — que nous publions comme Appendice à l'une des communications à l'Académie ſur des ſujets de mathématique, une pièce de Huygens datant (quoique peu) d'après ſon départ définitif de Paris.

On peut voir aux pages citées du T. XII que ce fut par la ſolution expoſée par Sluſius dans la deuxiéme édition, datant de 1668, de ſon „Meſolabum" — mot emprunté à Eratoſthène parlant du problème déliaque (duplication du cube) et propoſant un inſtrument pour le réſoudre par la recherche de deux moyennes proportionnelles — que Huygens fut amené à s'occuper de nouveau du problème. Nous faiſons précéder la Pièce du Manuſcrit 11 par une page (notre partie A) du Manuſcrit F, où Huygens raconte lui-même ce qui l'amena à mettre par écrit le préſent article, ſe rapportant non ſeulement (partie B) au problème des deux moyennes proportionnelles, mais plus généralement (comme le „Meſolabum" de Sluſius) à des „ſolida problemata".

A[1]). Cum Rev. Franc. Sluſius ad me miſiſſet Conſtructiones Problematis Deliaci quas typis vulgaverat[2]), nec explicaſſet qua via ad eas perveniſſet; ego, id inveſtigans, hanc rationem tunc inveni quæ in ſequentibus exponetur, quamque deinde cum ſuorum inventorum originem ille edidiſſet diſſimilem eſſe comperi. Sed eam tunc neglexi quod eaſdem quidem ſed non meliores Deliaci Problematis conſtructiones

---

[1]) Manuscrit F, p. 134. La p. 112 porte la date du 16 avril 1682. Aux p. 131 et 135 on trouve des calculs sur les passages de Mercure devant le soleil reſpectivement de janvier 1682 et du 31 août 1682. Il paraît donc fort probable que la présente page date de 1682 et la Pièce du Manuscrit 11 pareillement.

[2]) En 1657 (T. II, p. 36) Slusius avait envoyé à Huygens des conſtructions de ce genre déjà avant de les avoir publiées. Le „Mesolabum" parut pour la première fois en 1659; Slusius l'envoya à Huygens en juillet (T. II, p. 437). En septembre 1668 (T. VI. p. 262) Huygens reçut également la deuxième édition. Voyez en outre la p. 105 du T. XII.

proderet. Jam vero post annos aliquot in Apolloniano problemate [3]) eandem rationem expertus, ubi a puncto dato in datam coni sectionem perpendicularis duci imperatur, quod ille ut solidum construit eoque ab alijs reprehendi meruit, inveni solutionem problematis ejus circuli ope ac solius quæ data est sectionis conicæ, quod in parabola quidem jam olim præstiteram [4]), sed in hyperbola et ellipsi multo plus erat negotij, cum autem longiuscula in his esset constructio mea eoque dubitarem an non melior quæpiam invenienda restaret, operæ pretium non duxi adversarijs eam describere. Postquam vero gallus quidam geometra [5]) Slusiana methodo usus, multo operosiorem longioremque solutionem ejusdem problematis edidisset, tunc demum alicujus pretij mea esse mihi visa est, simulque intellexi methodum qua eam inveneram anteponendam Slusianæ methodo ad solida pleraque problemata, cum et compendiosior sit nec tantis quærendi ambagibus obnoxia [6]).

Inventa solutione per circulum et coni sectionem similem datæ, habetur simul solutio per circulum et ipsam sectionem datam, quod d. Slusius in Mesolabo videtur animadvertisse. Inventis enim Ellipsis similis quæ describenda non est latere transverso, item circuli, qui illam intersecando problema solvit, diametro; et positione centri ad Ellipsis illius latus transversum. opus tantum est omnia haec augere vel minuere proportionaliter, secundum rationem dicti lateris transversi ad latus transversum ellipsis datæ, peractaque constructione qualis inveniebatur cum Ellipsi simili facienda, prodibit non quidem linea quæsita sed ejusmodi quæ reducta proportione priori contrariâ, quæsitam exhibeat.

---

[3]) Voyez la note 6 de la p. 342 qui suit.

[4]) Voyez les p. 81—82 du T. XII, datant de 1653, ainsi que la p. 422 du T. XIV et la Pièce bien rédigée des p. 533—534 du T. I.

Dans la Préface de „La Construction des équations analytiques" par M. de la Hire de l'Ac. R. d. Sciences, qui constitue la troisième partie de ses „Nouveaux éléments" de 1679, l'auteur écrit: „Avec ma methode j'ay construit les plus beaux Problemes qui ayent esté proposez jusques à present, entre lesquels est celuy de la Perpendiculaire d'un point donné, menée à une Ellipse ou à une Hyperbole: car pour la Parabole, il y a long-temps que Monsieur Huygens l'a publiée, en ne se servant d'autre section conique que de celle qui est proposée; *ce que j'ay mis il a déja du temps dans les Registres de l'Academie des Sciences* [nous soulignons].

[5]) Il s'agit de Ph. de la Hire; voyez sur sa publication de 1679, outre la note précédente, l'Avertissement qui précède (p. 220). Dans la Préface citée dans la note précédente de la Hire parle aussi de Slusius traitant, après Descartes, de „la construction des Equations". Il ajoute: „Et comme je faisois voir à Monsieur Hugens de Zulichem les raisons que j'avais de reprendre ainsi Monsieur Descartes, il m'a communiqué un Manuscrit de Monsieur de Fermat, d'une maniere de construction des Equations, dans laquelle il le reprend aussi sur le mesme sujet". Etc.

Dans les Manuscrits nous n'avons trouvé qu'un seul endroit où Huygens cite un ouvrage de de la Hire en appelant ce mathématicien par son nom: c'est à la p. 143 du Manuscrit F datant sans doute de 1682 (la p. 135 est datée 31 août 1682). Huygens y cite la „p. 448" ce qui s'applique aux „Nouveaux éléments".

[6]) Voyez cependant la fin du présent Appendice.

B.C. CONSTRUCTIO PROBLEMATUM SOLIDORUM PER RESOLUTIONEM ÆQUATIONIS IN DUOS LOCOS.

B^{1}). § 1. Sit data æquatio $abb \infty x^3$, quæ eſt ad inveniendas duas medias proportionales inter datas lineas a et b. Eſt enim hic x mediarum altera, proxima datæ b

Primum utramque æquationis partem duco in x, fit $x^4 \infty abbx$, tum divido per bb, fit $\frac{x^4}{bb} \infty ax$. Jam utrimque addo $- xx + \frac{1}{4}bb$, fit $\frac{x^4}{bb} - xx + \frac{1}{4}bb \infty ax - xx + \frac{1}{4}bb$. ut nempe ea pars ubi eſt $\frac{x^4}{bb}$ fiat quadratum; ex altera parte vero accedat $-xx$, quod cur fiat jam parebit. Aequetur enim utraque pars æquationis quadrato yy, poſitâ y linea incognita cui x ſit ad rectos angulos. fit igitur

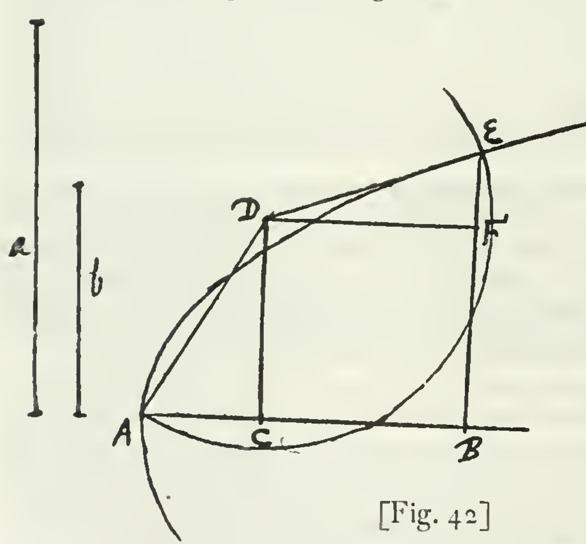
$$yy \infty \frac{x^4}{bb} - xx + \tfrac{1}{4}bb \infty ax - xx + \tfrac{1}{4}bb \infty yy$$

$$y \infty \frac{xx}{b} - \tfrac{1}{2}b \qquad ax + \tfrac{1}{4}bb - yy \infty xx$$

$$by \infty xx - \tfrac{1}{2}bb \qquad \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}bb - yy} \infty x$$

$$\sqrt{by + \tfrac{1}{2}bb} \infty x$$

Altera harum æquationum ſignificat locum ad parabolam. Cujus parabolæ latus rectum eſt b. Altera ſignificat locum ad circuli circumferentiam, cujus radius $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb}$. Hæc oritur igitur conſtructio problematis, per parabolam et circuli circumferentiam, quæ eſt hujuſmodi.



[Fig. 42]

Sint datæ extremæ a, b. In recta AB [Fig. 42] accipiatur AC $\infty \frac{1}{2}b$, cui ponatur ad angulos rectos CD $\infty \frac{1}{2}a$, junctâque AD, ſit hæc radius circumferentiæ deſcribendæ centro D. Intelligatur etiam deſcripta parabola cujus axis AB, vertex A, latus rectum æquale b. Hæc circumferentiam ſecet in E puncto, unde cadat in axem AB per-

[1]) Manuscrit 11, p. 7—15. Voyez sur la date la partie *A* qui précède.

pendicularis EB. Erit mediarum quæſitarum altera EB, proxima nimirum datæ b; altera BA.

Si enim CB vocetur y; BE, x; erit AB ∞ $\frac{1}{2}b + y$ cum AC ſit $\frac{1}{2}b$. Rectangulum vero ex AB et latere recto b, erit $\frac{1}{2}bb + by$, æquale propter parabolam quadrato ex EB, nempe xx. Rurſus cum quadratum ex AD ſive ex DE ſit $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb$, quadratum vero DF, perpendicularis in EB, ſit yy, erit EF quadratum ∞ $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - yy$. unde EF + FB, ſive EB hoc eſt $x \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - yy}$. Hinc autem, relegendo æquationis ſuperioris veſtigia, apparet fieri $ax - xx + \frac{1}{4}bb \infty yy$. Item ex $\frac{1}{2}bb + by \infty xx$, quod ſupra, relegendo ſimiliter veſtigia alterius æquationis, apparet fieri

$$yy \infty \frac{x^4}{bb} - xx + \frac{1}{4}bb.$$

Ergo jam
$$\frac{x^4}{bb} - xx + \frac{1}{4}bb \infty ax - xx + \frac{1}{4}bb$$

et deletis communibus
$$\frac{x^4}{bb} \infty ax$$

$$x^3 \infty bba,$$
quæ cum ſit æquatio ab initio propoſita, conſtat eam recte conſtructam fuiſſe, et eſſe continuè proportionales b, x, $\frac{xx}{b}$, a. Patet etiam BA eſſe alterum proportionalem $\frac{xx}{b}$, cum, ex proprietate parabolæ, ſit latus rectum b, ad applicatam BE, ſive x, ut hæc ad BA ſive $\frac{xx}{b}$.

Eſt autem conſtructio hæc eadem, quæ Carteſij [2]).

B. § 2. Data eâdem æquatione $x^3 \infty abb$, atque inde, ut ante, $\frac{x^4}{bb} \infty ax$, ſi utrimque addatur $+ xx + \frac{1}{4}bb$, et pars utraque æquationis æquetur vv quadrato incognitæ v, quam pono perpendicularem in x, fiet hinc quidem $vv \infty \frac{x^4}{bb} + xx + \frac{1}{4}bb$, hoc eſt, extracta radice, $v \infty \frac{xx}{b} + \frac{1}{2}b$, ſive $bv \infty xx + \frac{1}{2}bb$ quod ſignificat locum ad para-

[2]) „L'invention de deux moyennes proportionnelles" dans le „Livre Troisième" de „La Géométrie" de 1637.

bolam, cujus latus rectum b. Ex altera vero parte fiet $vv \propto ax + xx + \frac{1}{4}bb$, qui est locus ad hyperbolen æqualium laterum, cum habeatur $+ xx$, nullâ proportione affectum, desit autem xv. cujus hyperbolæ latus transversum est $aa - bb$ [lisez $\sqrt{aa - bb}$]. Hinc igitur datur constructio problematis per intersectionem parabolæ et hyperbolæ æquilateræ.

Sed hujusmodi constructio merito rejicitur, cum constet una coni sectione et circuli circumferentia rem confici [3]). Nec tamen frustra est illa resolutio in parabolam et hyperbolen æqualium laterum, ut jam ostendemus; id quo in hac methodo præcipuum est ac pulcherrimum.

Ex eo enim quod paulo ante invenimus problema construi intersectione parabolæ cujus latus rectum b, et circuli circumferentiæ: nunc vero idem rursus construi ostendimus intersectione ejusdem parabolæ, cujus latus rectum b, et hyperbolæ æquilateræ. Hinc inquam colligere licet, intersectionem utramque in idem parabolæ punctum casuram, ac proinde in idem hoc punctum etiam cadere intersectionem hyperbolæ æquilateræ et circumferentiæ circuli. Ita ut jam harum tantum duarum intersectione ad constructionem opus habeamus, omissa parabola.

Scimus enim, in superiori constructione, posita CB in axe parabolæ $\propto y$, et BE $\propto x$ quæ sit ipsi CB ad angulos rectos, esse quidem hanc ordinatim ad axem applicatam. Rursus vero in posteriori constructione scimus, positâ v in ejusdem parabolæ axe, esse itidem lineam quæsitam x in eadem parabola ordinatim applicatam, ac proinde eandem ipsi BE ante inventæ. Itaque si parabola intelligatur AE latus rectum habens b, cumque eâ sigillatim utraque constructio persiciatur, tam quæ intersectione circumferentiæ circuli opus habebat, quam quæ hyperbolen æqualium laterum requirit, necesse est hoc modo intersectionem circumferentiæ et hyperbolæ æquilateræ ostendere punctum E, unde ducto in AB perpendiculari EB, sit quæsitæ x æqualis. idque ita ut parabolam describere opus non sit. Construetur igitur problema intersectione hyperbolæ æquilateræ et circumferentiæ circuli hoc modo [Fig. 43].

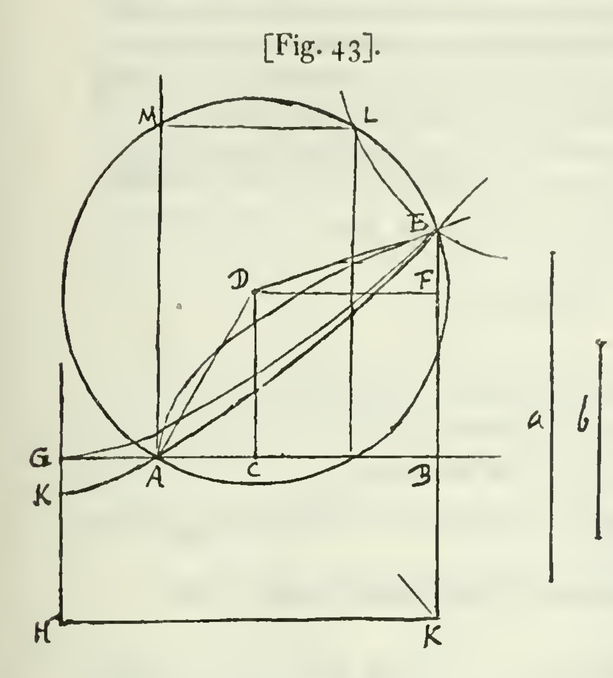
Circulus quidem eodem modo ac superius describatur AE. Porro producta BA ad G, ut sit AG æqualis AC, hoc est $\frac{1}{2}b$, factaque GH perpendiculari æquali $\frac{1}{2}a$, et quadrato HK æquali differentiæ quadratorum HG, GA, centro H, axe HG, vertice K sit descripta hyperbole æqualium laterum KAE, quæ secet circumferentiam AE in E, et sit EB perpendicularis in EB, hæc ipsa EB erit linea x quæsita.

---

[3]) Voyez la note 6 de la p. 342.

Si enim CB [Fig. 43] ut ante vocetur y, BE, x. fit propter circulum, ut ſupra, $yy \infty ax - xx + \frac{1}{4}bb$. Rurſus ſi GB ſeu KH vocetur v, erit ſumma quadratorum KH, HK, $vv + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$. cui ſummæ æquale eſt, propter hyperbolen æquilateram, quadratum ex KE. unde KE $\infty \sqrt{vv + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$, et BE ſive $x \infty - \frac{1}{2}a + \sqrt{vv + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$. Hoc eſt, $vv \infty ax + xx + \frac{1}{4}bb$: ſive (quia v, hoc eſt GB, eſt $y + b$) $yy + 2by + bb \infty ax + xx + \frac{1}{4}bb$, hoc eſt $yy \infty ax + xx - 2by - \frac{3}{4}bb$. Erat autem prius $yy \infty ax - xx + \frac{1}{4}bb$. Ergo jam $ax + xx - 2by - \frac{3}{4}bb \infty ax - xx + \frac{1}{4}bb$

[Fig. 43].



unde $2xx \infty 2by + bb$

hoc eſt $xx \infty by + \frac{1}{2}bb$

hoc eſt $\frac{xx}{b} - \frac{1}{2}b \infty y$

et quadrando partem utramque fit $\frac{x^4}{bb} - xx + \frac{1}{4}bb \infty yy$.

Erat autem, propter circulum, $yy \infty ax - xx + \frac{1}{4}bb$.

Ergo $\frac{x^4}{bb} - xx + \frac{1}{4}bb \infty ax - xx + \frac{1}{4}bb$

hoc eſt $\frac{x^4}{bb} \infty ax$

hoc eſt $x^3 \infty abb$ quod erat demonſtrandum.

B § 3. Facilius alia hyperbole circa aſymptotos invenietur quæ cum eodem rurſus circulo problema conſtruat. poſita enim æquatione $x^3 \infty abb$, fiet $xx \infty \frac{abb}{x}$. jam ſi utraque pars æquetur vb, poſitâ v incognitâ, fiet ex altera parte $xx \infty vb$. quæ eſt æquatio ad parabolam, cujus, ut in ſuperioribus, latus rectum eſt b. Ex altera vero $\frac{abb}{x} \infty bv$, hoc eſt $ab \infty xv$, quæ eſt æquatio ad hyperbolam ad aſymptotos, et quidem æqualium laterum ſi v et x angulo recto jungi intelligantur, quod ſemper in his fieri volumus. Poſita autem parabola AE, cujus ut antea latus rectum b, facile apparet quomodo collocanda ſit hyperbola de qua hic agitur. Quia enim æquatio parabolæ eſt

$xx \infty vb$, oportet AB vocari v, ut rectangulum vb æquetur quadrato BE, quod eſt xx. Quia porro æquatio hyperbolæ eſt $ab \infty xv$, hoc eſt $ab \infty$ rectang. AB, BE, apparet asymptotos eſſe AB, AM angulum rectum ad A conſtituentes, factoque rectangulo AL ex lateribus a, b, hyperbolam per L punctum deſcribendam, quæ circumferentiam AE in puncto E ſæpe dicto ſectura ſit. Faciliſque eſt demonſtratio.

Nam cum ſit, propter circulum, $yy \infty ax - xx + \frac{1}{4}bb$, poſita ut ſupra CB ∞y, et BE ∞x. Cumque hic ſit $ab \infty xv$ propter hyperbolam, ſed v ſeu BA ſit æqualis $y + \frac{1}{2}b$. Erit ergo $ab \infty xy + \frac{1}{2}bx$, hoc eſt $y \infty \frac{ab}{x} - \frac{1}{2}b$. Unde

$$yy \infty \frac{aabb}{xx} - \frac{abb}{x} + \frac{1}{4}bb.$$

Itaque et $$ax - xx + \frac{1}{4}bb \infty \frac{aabb}{xx} - \frac{abb}{x} + \frac{1}{4}bb$$

hoc eſt $$ax^3 - x^4 \infty aabb - abbx$$

et utrinque dividendo per $a - x$, fit $x^3 \infty abb$, ut oportebat.

B § 4. Poſita rurſus æquatione eadem $x^3 \infty abb$, ſive $x^4 \infty abbx$, ſive $\frac{x^4}{bb} \infty ax$, ſi utrinque addatur $-\frac{cxx}{b} + \frac{1}{4}cc$, et utraque pars æquationis æquetur vv fiet

$$vv \infty \frac{x^4}{bb} - \frac{cxx}{b} + \frac{1}{4}cc \infty ax - \frac{cxx}{b} + \frac{1}{4}cc \infty vv$$

$$v \infty \frac{xx}{b} - \frac{1}{2}c \qquad\qquad \frac{bax + \frac{1}{4}bcc - bvv}{c} \infty xx$$

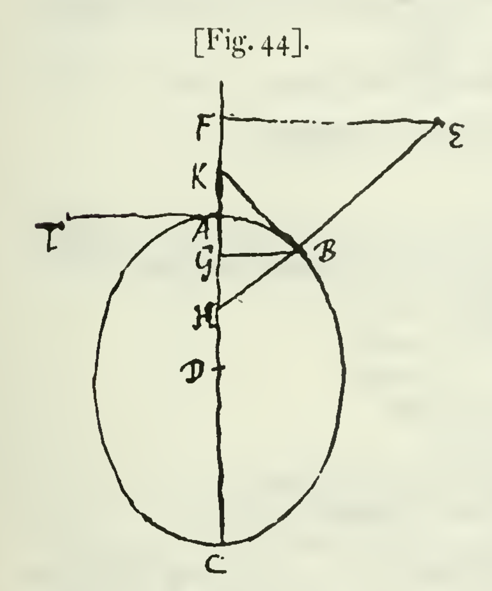
$$bv + \frac{1}{2}bc \infty xx \qquad\qquad \frac{1}{2}\frac{ab}{c} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\frac{aabb}{cc} + \frac{1}{4}bc - \frac{b}{c}vv} \infty x$$

Unde hinc quidem æquatio quæ locum ad parabolam deſignat cujus latus rectum b. Inde vero æquatio quæ ſignificat locum ad Ellipſin datæ cuivis ſimilem, cujus nempe latus rectum ad tranſverſum ut c ad b, nam c pro arbitrio ſumi poteſt. Dimidium vero lateris transverſi ellipſeos eſt $\sqrt{\frac{1}{4}\frac{aabb}{cc} + \frac{1}{4}bc}$ et linea x parallela lateri tranſverſo. Et quoniam in æquatione ad parabolam, latus rectum parabolæ eſt b, idem nempe quod in æquatione ſuperiori ad circuli circumferentiam, hinc oritur problematis conſtructio, ſeu inventio duarum mediarum inter duas datas, per circulum et ellipſin ſimilem datæ, eſtque eadem prorſus quæ in propos. 1 Sluſij in Meſolabo. Unde et altera, propoſitione ipſius ultimâ, per circulum et ellipſin quamlibet datam facile obtinetur. cum ſemper data conſtructione per circulum et ellipſin vel hyperbolen ſimilem datæ, facile abſque alio calculo inde deducatur conſtructio per circulum et ellipſin vel hyperbolen datam, quod videtur Sluſius non advertiſſe.

Hoc vero in ſequenti problemate Apolloniano manifeſtum fiet ubi ex dato puncto ad datam coni ſectionem lineam rectam perpendicularem ducemus, ipſius datæ ſectionis et circuli interſectione, quum Apollonius hyperbolæ deſcriptione utatur, eoque a geometris reprehendi meruerit [4]). Adnoto vero priuſquam eo progrediar, potuiſſe eadem facilitate conſtructionem duarum mediarum per circulum et hyperbolen datæ ſimilem dari, ſi utrinque addidiſſem $+\frac{cxx}{b}+\frac{1}{4}cc$. Indeque etiam per circulum et hyperbolen datam.

C [5]). § 1. *Data Ellipſi, ducere ex puncto intra vel extra eam dato, lineam rectam quæ occurrat ipſi ad angulos rectos.*

[Fig. 44].



Sit Ellipſis [Fig. 44] cujus axis major idemque latus tranſverſum AC, latus rectum AT, centrum D. deturque punctum E unde oporteat ducere rectam EB quæ ellipſi occurrat ad angulos rectos in B puncto.

Ponatur factum, occurratque productum EB axi AC in H. Tangens vero in puncto B ideoque recta ad BE, nempe BK, conveniat cum axe in K. Et ducantur ad axem perpendiculares EF, BG. Sit axis AC ∞ a, latus rectum AT ∞ b, DF ∞ c, FE ∞ d, quæſita DG ∞ x.

Erit ut a ad b ita rectang. CGA, hoc eſt $\frac{1}{4}aa - xx$, ad quadratum GB, quod erit $\frac{\frac{1}{4}baa - bxx}{a}$. Sicut autem DG, x ad DA, $\frac{1}{2}a$, ita hæc ad DK, $\frac{\frac{1}{4}aa}{x}$, propter tangentem

[4]) Voyez la note 6 de la p. 342.

[5]) Manuscrit 11, p. 16—41. Voyez sur la date la note 1 de la p. 130. C'est à la p. 122 du Manuscrit F que commencent les calculs qui servirent à Huygens pour composer la partie C du présent Appendice. On y trouve respectivement aux p. 122 et 127 des figures fort ressemblantes aux Fig. 44 et 45 du texte. De même les Fig. 46 et 48 se retrouvent respectivement aux p. 139 et 156 du Manuscrit F.

BK. Et à DK auferendo DG, x, fiet KG, $\frac{1}{4}\frac{aa}{x} - x$ five $\frac{\frac{1}{4}aa - xx}{x}$. Ut vero KG ad GB, ita haec ad GH, quæ erit $\frac{bx}{a}$. cui fi addatur GF, $c - x$, fiet HF $\frac{bx}{a} + c - x$.

Quod fi GB vocetur z, erit ut GH, $\frac{bx}{a}$ ad GB, z ita HF, $\frac{bx}{a} + c - x$ ad FE, d. Ideoque $\frac{dbx}{a} \infty \frac{bxz}{a} + cz - xz$, quæ æquatio docet locum puncti B effe hyperbolen, atque hinc conftructio breviffima quæ eft apud Apollonium, fed vitiofa[6]). Quare nos aliam meliorem jam inveftigabimus in qua non hyperbolâ fed tantum circuli circumferentiâ opus erit.

Eft nimirum ut quad. GH, $\frac{bbxx}{aa}$ ad quadr. GB, $\frac{\frac{1}{4}baa - bxx}{a}$, ita quadr. HF, quod (pofito $a - b \infty h$) eft $\frac{aacc - 2achx + hhxx}{aa}$, ad quadr. FE, da. Unde æquatio; quæ, fi reducatur, et fcribatur g pro $\frac{ac}{h}$ et ee pro $\frac{abdd}{hh}$, erit

$$\begin{array}{l} x^4 - 2gx^3 + ggxx + \frac{1}{2}aagx - \frac{1}{4}aagg \infty 0 \\ \qquad\qquad\quad + ee \\ \qquad\qquad\quad - \frac{1}{4}aa \end{array}$$

Jam ad tollendum terminum fub x^3, fi fiat $x - \frac{1}{2}g \infty y$, vel $\frac{1}{2}g - x \infty y$, quando apparet x minorem fore quam $\frac{1}{2}g$, hoc eft $\frac{1}{2}g - y \infty x$; habebitur æquatio

$$\begin{array}{llll} y^4 - \frac{1}{2}ggyy & - \frac{1}{4}aagy & + \frac{1}{16}g^4 & \infty 0 \\ \quad - \frac{1}{4}aa & - eeg & + \frac{1}{4}eegg & \\ \quad + ee & & - \frac{1}{16}aagg & \end{array}$$

vel, pofito abbreviandi caufa $\frac{1}{2}gg + \frac{1}{4}aa - ee \infty pp$,

et $\frac{1}{4}aag + eeg \infty ppq$,

et $\frac{1}{16}g^4 + \frac{1}{4}eegg - \frac{1}{16}aagg \infty \frac{1}{4}ppgr$

erit $y^4 - ppyy - ppqy \pm \frac{1}{4}ppgr \infty 0$

vel $y^4 + ppyy - ppqy + \frac{1}{4}ppgr \infty 0$

Quod fi ad tollendum terminum fub x^3 pofuiffem $x - \frac{1}{2}g \infty y$ ut faciendum eft fecundum regulam; quo nempe fiat radix y vera, hoc eft ut ab extrema linea $\frac{1}{2}g$ accipienda fit y in partem eandem quo vergit DG, x: fuiffet æquatio

$y^4 - ppyy + ppqy \pm ppgr \infty 0$

vel $y^4 + ppyy + ppqy + \frac{1}{4}ppgr \infty 0$.

---

[6]) Voyez les notes 5 et 6 de la p. 82 du T. XII.

Nempe tantum terminus $ppqy$ habuisset signum $+$ cum prius habuerit signum $-$, quod etiam cognoscere licet ex Cartesij Regula, quæ jubet mutari signa locorum parium (qualis hic sub y, cum y^3 non inveniatur) ut radices veræ fiant falsæ et contra. Falsæ enim et hic fiunt radices prius veræ y, cum ponimus $\frac{1}{2}g - x \propto y$. quoniam jam $\frac{1}{2}g$ major intelligitur quam x, ideoque y in partem negatam accipienda, hoc est in contrariam ejus quo vergit DG. ponendum autem $\frac{1}{2}g - x \propto y$ quando animadvertimus $\frac{1}{2}g$ majorem fore quam x.

Quod autem utrobique, si habeatur $+ ppyy$, fiat etiam $+ \frac{1}{4}ppgr$, facile ostenditur. Etenim, si habeatur $+ ppyy$, hoc est si ee majus quam $\frac{1}{2}gg + \frac{1}{4}aa$, fiet etiam $\frac{1}{16}gg + \frac{1}{4}ee$ majus quam $\frac{1}{16}aa$, ideoque $+ \frac{1}{4}ppgr$. at si habeatur $- ppyy$ poterit esse vel $+ \frac{1}{4}ppgr$, vel $- \frac{1}{4}ppgr$.

C § 2. *Ad divisionem porro in duos locos.*

Siquidem sit $$y^4 - ppyy - ppqy + \tfrac{1}{4}ppgr \propto 0,$$
hoc est $$y^4 \propto ppyy + ppqy - \tfrac{1}{4}ppgr,$$
addatur utrinque $- 2ppyy + p^4$, et dividatur per tt; posito $\frac{tt}{pp} \propto \frac{a}{b}$; fietque

$$\frac{y^4 - 2ppyy + p^4}{tt} \propto \frac{- ppyy + p^4 + ppqy - \frac{1}{4}ppgr}{tt}$$

quæ pars utraque æquationis ponatur æqualis quadrato vv incognitæ quæ sit ipsi y perpendicularis; eritque ex altera parte

$$\frac{y^4 - 2ppyy + p^4}{tt} \propto vv$$

et $$\frac{yy - pp}{t} \propto v$$

sive $$yy \propto tv + pp$$

quæ æquatio designat locum ad parabolam cujus latus rectum t.

Vel etiam $\frac{- yy + pp}{t} \propto v$, unde $yy \propto pp - tv$.

Ex altera vero parte erit

$$\frac{- ppyy + ppqy + p^4 - \frac{1}{4}ppgr}{tt} \propto vv$$

unde $$qy + pp - \tfrac{1}{4}gr - \frac{ttvv}{pp} \propto yy$$

$$\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + pp - \tfrac{1}{4}gr - \frac{ttvv}{pp}} \propto y$$

qui est locus ad ellipsin similem datæ. nam quia ut pp ad tt ita est axis minor, cui per-

pendicularis y, ad latus rectum sibi conveniens; erit contra axis major ad latus rectum suum ut tt ad pp, hoc est ut a ad b. Est autem axis major hujus ellipsis

$$\sqrt{qq + 4pp - gr}.$$

Quod si vero in æquatione fuisset $+ppyy$, ac proinde $y^4 \infty -ppyy + ppqy - \frac{1}{4}ppgr$ tantummodo utrimque divisissem per tt, ponendo ut ante $\frac{tt}{pp} \infty \frac{a}{b}$; fuissetque

$$\frac{y^4}{tt} \infty \frac{-ppyy + ppqy - \frac{1}{4}ppgr}{tt}.$$

Et æquando rursus utrasque æquationis partes quadrato vv, habuissem hinc $vv \infty \frac{y^4}{tt}$ hoc est $v \infty \frac{yy}{t}$ vel $tv \infty yy$ qui locus est ad parabolam cujus latus rectum t.

Ex altera parte vero habuissem $\frac{-ppyy + ppqy - \frac{1}{4}ppgr}{tt} \infty vv$

hoc est $$qy - \tfrac{1}{4}gr - \frac{ttvv}{pp} \infty yy$$

et $$\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{4}gr - \frac{ttvv}{pp}} \infty y$$

qui similiter locus est ad ellipsin similem datæ.

C § 3. Habemus jam constructionem problematis per ellipsin similem datæ et per parabolam. Nunc porro alia quærenda est per parabolen eandem et circulum, qua inventa, habebimus etiam constructionem per ellipsen similem datæ et per circulum, atque inde per ellipsin ipsam quæ data est, et per circulum.

Repetita igitur æquatione superiori

$$y^4 - ppyy - ppqy + \tfrac{1}{4}ppgr \infty 0$$

unde $$y^4 - ppyy \infty ppqy - \tfrac{1}{4}ppgr$$

dividatur per tt, fit $$\frac{y^4 - ppyy}{tt} \infty \frac{ppqy - \frac{1}{4}ppgr}{tt}$$

Subtrahatur utrinque yy sive $\frac{ttyy}{tt}$. Ergo

$$\frac{y^4 - ppyy - ttyy}{tt} \infty \frac{ttyy + ppqy - \frac{1}{4}ppgr}{tt}.$$

Jam, ut ab altera parte fiat quadratum, addendum insuper $\frac{1}{4}$ quadrati ex $\frac{pp + tt}{t}$ quod vocetur s, itaque addito utrinque ss fiet

$$\frac{y^4}{tt} - \frac{syy}{t} + \tfrac{1}{4}ss \infty -yy + \frac{ppqy - \frac{1}{4}ppgr}{tt} + \tfrac{1}{4}ss.$$

Et æquata parte utraque æquationis quadrato incognitæ z, habebitur

$$zz \infty \frac{y^4}{tt} - \frac{syy}{t} + \tfrac{1}{4}ss \infty - yy + \frac{ppqy - \frac{1}{4}ppgr}{tt} + \tfrac{1}{4}ss \infty zz$$

$$z \infty \frac{yy}{t} - \tfrac{1}{2}s \text{ vel } \frac{-yy}{t} + \tfrac{1}{2}s \qquad \frac{ppqy - \frac{1}{2}ppgr}{tt} + \tfrac{1}{4}ss - zz \infty yy$$

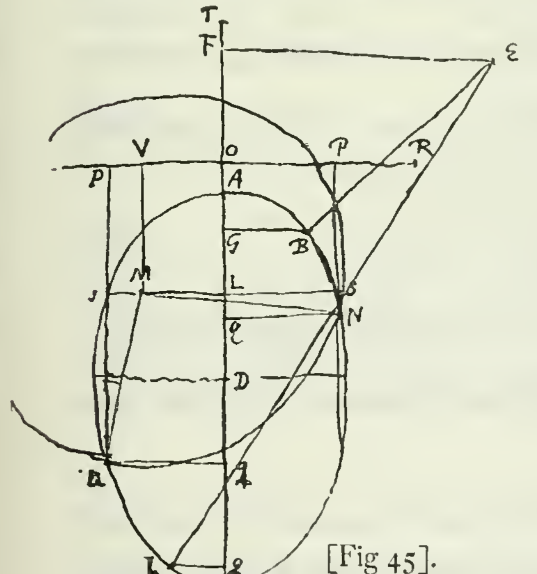
$$tz + \tfrac{1}{2}ts \infty yy$$

$$\text{vel} \quad \tfrac{1}{2}ts - tz \infty yy \qquad \text{vel} \frac{bqy}{a} - \frac{\frac{1}{4}bgr}{a} + \tfrac{1}{4}ss - zz \infty yy$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{bq}{a} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\frac{bbqq}{aa} - \tfrac{1}{4}\frac{bgr}{a} + \tfrac{1}{4}ss - zz} \infty y.$$

Hinc nimirum æquatio ad parabolam cujus latus rectum t. Inde æquatio ad circuli circumferentiam. Unde datur constructio problematis per hujus parabolæ et circumferentiæ interfectionem. Et quia etiam antea constructio inventa est per eandem parabolam et ellipsin similem datæ, ubi y similiter quoque ad axem applicata erat ut hic, sequitur jam constructionem haberi per ellipsin datæ similem et per circuli circumferentiam postremo inventam.

Oportet autem, sicut in præcedentibus diximus, ad constructionem hanc; positis parabolæ axe et vertice, cujus latus rectum t, quod æquale $\sqrt{\frac{ppa}{b}}$ quia posuimus $\frac{tt}{pp} \infty \frac{a}{b}$; oportet inquam velut si utramque cum parabola hac constructionem propositam habeamus, tam quæ ellipsin quam quæ circulum requirit, definire calculo lineas rectas quibus ad eas suis locis constituendas opus est, quales æquationes inventæ præscribunt. Ita enim cum ad eandem parabolam tam ellipsis quam circuli positus cognoscetur, etiam utriusque horum inter se positus innotescet.



[Fig 45].

Ut autem per ellipsin datam et circulum res absolvatur, opus est tantum ut proportionaliter augeantur vel minuantur lineæ quæ circuli radium et positionem ipsius ad axem ellipsis similis definiunt, secundum rationem qua ellipsis datæ axis superat vel minor est axe ellipsis similis. ac deinde inventa radix reducenda rursus proportione contraria ad obtinendam radicem y.

Nempe in constructione per parabolam et ellipsin similem datæ, cujus vicem nunc referat ipsa ellipsis ANC [Fig. 45], apparet per-

pendicularem à centro ellipsis D in axem parabolæ (quem referat OP) ductam debere intercipere portionem axis illius ad verticem RO æqualem $\frac{pp}{t}$, propter æquationem ad parabolam $yy \propto tz + pp$ vel $yy \propto pp - tz$. Ipsam vero perpendicularem OD, quæ est in axe ellipsis, esse $\frac{1}{2}q$.

Rursus in constructione per parabolam eandem et circulum apparet perpendicularem à centro circuli M in axem parabolæ intercipere partem VR axis ejus ad verticem, æqualem $\frac{1}{2}s$, propter æquationem ad parabolam $yy \propto \frac{1}{2}ts \pm tz$. Ipsam vero perpendicularem MV esse $\frac{1}{2}\frac{bq}{a}$.

Itaque differentia duarum $\frac{1}{2}q$ et $\frac{\frac{1}{2}bq}{a}$, hoc est duarum DO, MV, erit pars axis DL, à centro ellipsis, quam intercipit perpendicularis a centro circuli in ipsum axem educta. adeoque DL erit $\frac{1}{2}\frac{hq}{a}$ quia $h \propto a - b$. Ipsa vero perpendicularis LM erit differentia duarum $\frac{1}{2}s$ et $\frac{pp}{t}$, hoc est duarum RO, RV. Ideoque LM $\propto \frac{\frac{1}{2}ht}{a}$ quia $h \propto a - b$ et $s \propto t + \frac{pp}{t}$ et $tt \propto \frac{ppa}{b}$. Radius vero circuli erit $\sqrt{\frac{1}{4}\frac{bbqq}{a} - \frac{1}{4}\frac{bgr}{a} + \frac{1}{4}ss}$ ut patet ex æquatione.

In hac autem ellipsi simili perpendiculares ab interfectionibus N in OP ductæ essent radices veræ y. Jam vero ut constructio fiat per ellipsin ipsam quæ data est, oportet facere sicut axis major ellipsis similis, qui erat $\sqrt{qq - gr + 4pp}$ (vocetur autem l) ad a, axem ellipsis datæ, ita DL $\propto \frac{1}{2}\frac{hq}{a}$ ad $\frac{\frac{1}{2}hq}{l}$ quæ erit vera DL qua utendum in ellipsi data. Item ut l ad a ita LM $\propto \frac{\frac{1}{2}ht}{a}$ ad $\frac{\frac{1}{2}ht}{l}$, quæ erit vera LM in data ellipsi adhibenda. Ac denique ut l ad a ita radius circuli inventus ad

$$\frac{a}{l}\sqrt{\frac{1}{4}\frac{bbqq}{aa} - \frac{1}{4}\frac{bgr}{a} + \frac{1}{4}ss},$$

radium circuli quo utendum in ellipsi data.

Itaque in ellipsi data [Fig. 45] accipiatur in axe a centro D recta DL æqualis $\frac{1}{2}\frac{hq}{l}$. sitque axi perpendicularis LM æqualis $\frac{1}{2}\frac{ht}{l}$. Erit M centrum circuli, radius vero æqualis $\frac{a}{l}\sqrt{\frac{1}{4}\frac{bbqq}{aa} - \frac{1}{4}\frac{bgr}{a} + \frac{1}{4}ss}$.

Ab interfectione autem circuli hujus et ellipsis quæ sit in puncto N, ducenda perpendicularis NP in rectam OP, axi normalem et abscindentem DO $\propto \frac{1}{2}\frac{aq}{l}$ à D versus

L. quia diximus centrum ellipsis similis ab axe parabolæ distare $\frac{1}{2}q$; quæ reducta, sicut reliquæ lineæ, secundum proportionem l ad a, facit $\frac{\frac{1}{2}aq}{l}$. refert enim sic rursus recta AP axem parabolæ. ad quem ducta perpendicularis NP erit $\frac{ay}{l}$. quam reducendo rursus secundum proportionem contrariam a ad l, habebitur y; et ponendo DT ∞ $\frac{1}{2}g$ et TG ∞ y, unde DG ∞ $\frac{1}{2}g - y$, erit DG ∞ x quæsitæ; quare axi perpendicularis GB quæ ellipsi occurrat, ostendet punctum B, ad quod ab E puncto dato ducendo rectam EB, occurrat ipsi ellipsi ad angulos rectos. Potest autem contingere intersectio ellipsis et circuli in punctis quatuor, unde ductis perpendicularibus in OP, ijsque reductis similiter sient singulæ y quæ ablatæ ab $\frac{1}{2}g$, ut accipiantur à T versus D, dabunt totidem radices x, quæ ostendent puncta ellipsis ad quæ ipsi ad angulos rectos ducantur à puncto E.

C § 4. Et hæc quidem rationem methodi perspicue explicant. Si vero breviter solutionem problematis tradere velimus, ponenda sunt tantum quæ pag. 16 et 17 continentur [7]), vel etiam quæ paginis 18, 19, 20, 21 [8]). Dein ita pergendum.

Quodsi $y^4 - ppyy - ppqy + \frac{1}{4}ppgr \infty 0$, ponatur $t \infty \sqrt{\frac{ppa}{b}}$, $s \infty \frac{pp}{t} + t$, $l \infty \sqrt{qq - gr + pp}$ [lisez $\sqrt{qq - gr + 4pp}$], $h \infty a - b$, sicut jam ante positum fuit. Tum a centro ellipsis datæ D ponatur in axe ejus, versus F, recta DL ∞ $\frac{\frac{1}{2}hq}{l}$; et erigatur ad axem perpendicularis LM ∞ $\frac{\frac{1}{2}ht}{l}$, statuenda in partem contrariam ejus ubi E punctum. Deinde centro M radio MN ∞ $\frac{a}{l}\sqrt{\frac{1}{4}\frac{bbqq}{aa} - \frac{1}{4}\frac{bgr}{a} + \frac{1}{4}ss}$ circumferentia describatur, et a punctis N, ubi illa ellipsi occurrit, ducantur NP perpendiculares in OP, quæ axem secat ad rectos angulos, abscinditque DO ∞ $\frac{\frac{1}{2}aq}{l}$, idque versus F. Singulæ NP vocentur m et ut a ad l ita sit m ad aliam quæ vocetur y, et fiat DG ∞ $\frac{1}{2}g - y$, sumpta $\frac{1}{2}g$ a D versus F. Denique ducta perpendiculari ad axem rectâ GB, quæ occurrat ellipsi in B, jungatur EB: hæc occurret ellipsi ad angulos rectos.

Si ponatur axis ellipsis AC seu $a \infty 1$; latus rectum $b \infty \frac{1}{2}$; DF sive $c \infty 1$; FE seu $d \infty \sqrt{\frac{1}{2}}$. fit æquatio $y^4 - \frac{5}{4}yy - \frac{5}{2}y + \frac{7}{4} \infty 0$. In cujus constructione signa + et — ita sese habebunt ut in ea quam construere docuimus, quia ipsius æquationis signa

---

[7]) C. à. d. le § 1 de C (p. 341) jusqu'au dernier alinéa de la p. 342 (non compris).
[8]) C. à. d. du dernier alinéa de la p. 342 au dernier alinéa de la p. 345 (non compris).

respondent signis æquationis $y^4 - ppyy - ppqy + \frac{1}{4}ppgr \infty 0$. Fiunt autem hinc $h \infty \frac{1}{2}$, $g \infty 2$, $pp \infty \frac{5}{4}$, $tt \infty \frac{5}{2}$, $q \infty 2$, $gr \infty \frac{28}{5}$, $ss \infty \frac{45}{8}$, $l \infty \sqrt{\frac{17}{5}}$, DO ∞ $\sqrt{\frac{5}{17}}$, DT ∞ 1, DL $\infty \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{17}}$, LM $\infty \frac{5}{4}\sqrt{\frac{1}{34}}$. Radius NM $\infty \frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}$ sive $\frac{3}{4}$ axis minoris. Sicut autem a ad l, hoc est sicut 1 ad $\sqrt{\frac{17}{5}}$, ita est NP ad $\sqrt{\frac{17}{5}}$ NP sive y. Unde DG sive $\frac{1}{2}g - y$ erit $1 - \sqrt{\frac{17}{5}}$ NP. Quod si ab altera parte centri ponatur Dg $\infty \sqrt{\frac{17}{5}}$ np $- 1$ (est autem np perpendicularis ab altera ellipsis et circuli intersectione, ducta in OP) sitque axi perpendicularis gb. Erit b alterum in ellipsi punctum, ad quod ducta Eb occurrat ipsi ad angulos rectos.

Ad demonstrationem, sit NQ perpendicularis ad axem ellipsis. Item sit MS perpendicularis in NP. ut autem a ad l ita sit NQ ad v. Ergo NQ $\infty \frac{av}{l}$. Quia autem ut a ad l, ita est NP, sive m ad y, erit m sive NP $\infty \frac{ay}{l}$.

Jam vero, propter ellipsin, rectangulum CQA, hoc est quadratum DA minus quadrato DQ, est ad quadr. QN, ut axis ellipsis ad latus rectum, hoc est ut a ad b. Sed quadratum DA est $\frac{1}{4}aa$: quadr. DQ, sive ab DO — NP, est $\frac{\frac{1}{4}aaqq + aaqy - aay^2}{l}$, item quadr. QN, sive mm, est $\frac{aavv}{ll}$. Hinc igitur, ex proportione ista, datur æquatio

$$\tfrac{1}{4}bll - \tfrac{1}{4}bqq + bqy - byy \infty avv.$$

Et restituto $qq - gr + 4pp$ in locum ll fit $\frac{bqy - \frac{1}{4}bgr + bpp - byy}{a} \infty vv$.

Jam porro ut a ad l ita sit MS ad aliam z. Ergo MS $\infty \frac{az}{l}$. Est autem, propter circulum, quadr. MN æquale quadratis MS et SN. Sed quadr. radij MN est $\frac{\frac{1}{4}bbqq - \frac{1}{4}abgr + \frac{1}{4}aass}{ll}$ ex constructione, quadratum vero MS est $\frac{aazz}{ll}$. Et quadr. SN $\frac{aayy - abqy + \frac{1}{4}bbqq}{ll}$ quia SN ∞ NP minus PS sive OL, hoc est $\frac{ay}{l} - \frac{\frac{1}{2}bq}{l}$. quod enim OL $\infty \frac{1}{2}bq$ patet quia DL est $\frac{\frac{1}{2}hq}{l}$ hoc est $\frac{\frac{1}{2}aq - \frac{1}{2}bq}{l}$; DO vero $\frac{1}{2}\frac{aq}{l}$. Fit igitur æquatio

$$\frac{\frac{1}{4}bbqq - \frac{1}{4}abgr + \frac{1}{4}aass}{ll} \infty \frac{aazz + aayy - abqy + \frac{1}{4}bbqq}{ll}$$

quæ reducta facit $\frac{bqy - ayy - \frac{1}{4}bgr}{a} + \frac{1}{4}ss \infty zz$.

Sed quoniam LM erat $\infty \frac{\frac{1}{2}ht}{l}$, LS vero sive NQ $\infty \frac{av}{l}$, erit MS $\infty \frac{\frac{1}{2}ht + av}{l}$.

Eſt autem $\frac{\frac{1}{2}ht}{l} \infty \frac{\frac{1}{2}as}{l} - \frac{app}{lt}$ ut facile eſt oſtendere, quia $h \infty a - b$, et $s \infty t + \frac{pp}{t}$, et $\frac{pp}{t} \infty \frac{bt}{a}$. Ergo fit MS $\infty \frac{\frac{1}{2}ast - app + tav}{lt}$. Sed erat MS $\infty \frac{az}{l}$. Ergo hæc æqualia; unde fit $z \infty \frac{1}{2}s - \frac{pp}{t} + v$. Ideoque $zz \infty \frac{1}{4}ss - \frac{spp}{t} + \frac{p^4}{tt} + sv - \frac{2ppv}{t} + vv$. Sed erat inventum $zz \infty \frac{bqy - ayy - \frac{1}{4}bgr}{a} + \frac{1}{4}ss$. Unde, ſubſtituto in alterutra harum æquationum eo cui æquatur zz in altera, invenitur

$$\frac{bqy - \frac{1}{4}bgr - ayy}{a} - \frac{p^4}{tt} + \frac{spp}{t} - sv + \frac{2ppv}{t} \infty vv.$$

ubi ſi pro $\frac{-p^4}{tt}$ ſubſtituatur $-\frac{bpp}{a}$, quia $\frac{pp}{tt} \infty \frac{b}{a}$, cum poſitum fuerit $t \infty \sqrt{\frac{ppa}{b}}$, atque etiam pro s reponatur ipſi æquale $\frac{pp + tt}{t}$, fiet

$$\frac{bqy - \frac{1}{4}bgr - ayy - bpp}{a} + \frac{p^4 + pptt}{tt} - \frac{ppv + ttv}{t} + \frac{2ppv}{t} \infty vv$$

ac proinde $\infty \frac{bqy - \frac{1}{4}bgr - byy - bpp}{a}$, quod ſuperius ipſi vv æquale invenimus. quæ æquatio ubi reducta fuerit, repoſitumque $\frac{pp}{tt}$ in locum $\frac{b}{a}$, fit

$$ttpp - p^4 + tppv - t^3v - ttyy + ppyy \infty 0$$

Et dividendo per $tt - pp$ fit $\quad pp - tv - yy \infty 0$

ſive $\quad \frac{pp - yy}{t} \infty v.$

Et quadrando utrinque erit $\quad \frac{p^4 - 2pyy + y^4}{tt} \infty vv,$

hoc eſt $\quad \infty \frac{bqy - \frac{1}{4}bgr - byy + bpp}{a}$

ubi ſi porro reſtituatur $\frac{pp}{tt}$ in locum $\frac{b}{a}$, invenietur

$$y^4 - ppyy - ppqy + \frac{1}{4}ppgr \infty 0.$$

Et hinc quidem facile reliqua demonſtratio abſolvitur per ſuperioris analyſeos regreſſum. Etenim in hac æquatione repoſitis pro pp, et ppq, et $\frac{1}{4}ppgr$, ijs quæ per hæc ſuperius deſignavimus, fiet æquatio ſuperior illa $y^4 - \frac{1}{2}ggyy$ &c. ∞ 0. Et rurſus poſito $y \infty \frac{1}{2}g - x$, habebitur æquatio prima $x^4 - 2gx^3$ &c. ∞ 0. Unde conſtat recte ſe habere conſtructionem. Et hæc quidem una omnia puncta B in ellipſi invenire docet, in demonſtratione autem non nulla ſed exigua erit diverſitas.

Si in æquatione ∞ o habeatur $-\frac{1}{4}ppgr$, hoc tantum in conſtructione mutandum, ut termini in quibus gr contraria ſigna accipiant ijs quæ nunc fuere. Sed ſi in æquatione y^4 &c. ∞ o fuerit $+ppyy$; quo caſu diximus etiam ſemper inveniri $+\frac{1}{4}ppgr$; fiet $l \infty \sqrt{\frac{1}{4}qq - gr}$, de cætero autem nihil omnino in conſtructione priori mutandum. Tunc enim LM quidem ſtatuenda $\infty \frac{1}{2}\frac{as}{lt}$; ſed s invenitur æqualis $t - \frac{pp}{t}$. unde LM, ſicut ante, fit $\frac{1}{2}\frac{at}{l} - \frac{1}{2}\frac{app}{l}$.

C § 5. *Problema idem in Hyperbola vel ſectionibus oppoſitis.* Sint ſectiones oppoſitæ AB, Cb [Fig. 46], axis idemque latus tranſverſum AC, centrum D. Punctum datum E unde oporteat ducere EB quæ occurrat hyperbolæ ad angulos rectos.

[Fig. 46].

Præparatione eadem adhibita quæ fuit in Ellipſi, ſint etiam nomina lineis ſimiliter impoſita; ut ſit AC ∞ a; latus rectum ∞ b; DF ∞ c; FE ∞ d; DG ∞ x.

Jam erit rurſus ut quadr. GH. ad quadr. GB ita qu. FH ad qu. FE. Invenientur autem qu. GH $\infty \frac{bbxx}{aa}$. qu. GB $\infty \frac{bxx - \frac{1}{4}aab}{a}$. Qu. FH, poſito $a + b \infty h$, erit $\frac{hhxx - 2achx + aacc}{aa}$, qu. verò FE eſt dd. Itaque hinc æquatio orietur, quâ reductâ, et poſito $x - \frac{1}{2}g \infty y$ (fiet autem $y \infty \frac{ac}{h}$) ad auferendum ſecundum terminum, fiet tandem æquatio

$$y^4 - \frac{1}{4}ggyy + \frac{1}{4}aagy + \frac{1}{16}g^4 \infty 0, \text{ ubi } ee \text{ ponitur } \infty \frac{abdd}{hh}.$$

$$\begin{matrix} -\frac{1}{4}aa & -eeg & -\frac{1}{4}eegg \\ -ee & & -\frac{1}{16}aagg \end{matrix}$$

Et poſito brevitatis cauſa $\left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}gg + \frac{1}{4}aa + ee \infty pp \\ \frac{1}{4}aag - eeg \infty ppq \\ \frac{1}{16}g^4 - \frac{1}{4}eegg - \frac{1}{16}aagg \infty \frac{1}{4}p^2gr \end{matrix} \right.$

erit $y^4 - ppyy \pm ppqy \pm \frac{1}{4}ppgr \infty 0$

hoc eſt $y^4 \infty ppyy \mp ppqy \mp \frac{1}{4}ppgr$.

Dividatur per tt indeterminatum; et utraque pars æquetur quadrato incognitæ v. Fit

$$vv \infty \frac{y^4}{tt} \infty \frac{ppyy \curlyvee ppqy \curlyvee \frac{1}{4}ppgr}{tt} \infty vv$$

et $\qquad vt \infty yy \qquad$ et $\qquad \curlywedge qy \curlywedge \frac{1}{4}gr + \dfrac{ttvv}{pp} \infty yy.$

Altera æquatio ad parabolam cujus latus rectum t; altera ad hyperbolam fimilem datæ fi ponatur $\frac{tt}{pp} \infty \frac{a}{b}$. cujus hyperbolæ axis erit $\sqrt{qq \curlywedge gr}$, quod appelletur l. apparet autem fieri $t \infty \sqrt{\frac{app}{b}}$.

Porro ut æquationes ad circumferentiam circuli, et ad parabolam eandem habeantur, pofito rurfus $y^4 \infty ppyy \curlyvee ppqy \curlyvee \frac{1}{4}ppgr$, auferatur utrinque $ppyy + ttyy$ et dividatur per tt; fietque $\frac{y^4 - ppyy - ttyy}{tt} \infty \frac{-ttyy \curlyvee ppqy \curlyvee \frac{1}{4}ppgr}{tt}$.

Jam ut ab altera parte, ubi eft y^4, fiat quadratum, addendum infuper $\frac{1}{4}$ quadrati ex $\frac{pp+tt}{t}$ quod vocetur s. Itaque addito utrimque $\frac{1}{4}ss$, et æquata parte utrâque quadrato incognitæ z, fiet

$$zz \infty \frac{y^4}{tt} - \frac{syy}{t} + \frac{1}{4}ss \infty -yy + \frac{\curlyvee p^2qy \curlyvee \frac{1}{4}ppgr}{tt} + \frac{1}{4}s^2 \infty zz$$

$$z \infty \frac{yy}{t} - \frac{1}{2}s \qquad \curlyvee \frac{p^2qy}{tt} \curlyvee \frac{\frac{1}{4}p^2gr}{tt} + \frac{1}{4}ss - zz \infty yy$$

$$tz + \frac{1}{2}ts \infty yy$$

vel $z \infty \frac{1}{2}s - \frac{yy}{t}$ unde $yy \infty \frac{1}{2}ts - tz$

$$\curlyvee \frac{1}{2}\frac{bq}{a} \pm \sqrt{\frac{\frac{1}{4}bbqq}{aa} \curlyvee \frac{\frac{1}{4}bgr}{a} + \frac{1}{4}ss - zz} \infty y.$$

Altera æquatio ad parabolam cujus latus rectum t; altera ad circuli circumferentiam cujus radius $\sqrt{\frac{1}{4}\frac{bbqq}{aa} \curlyvee \frac{1}{4}\frac{bgr}{a} + \frac{1}{4}ss}$.

Quia autem in hyperbola fimili inventus eft axis $\sqrt{qq \curlywedge gr}$; patet, fi habeatur $\sqrt{qq+gr}$, vel fi fuerit $\sqrt{qq-gr}$, dummodo qq fit majus quam gr, ad conftructionem facere hyperbolam fimilem datæ, ideoque et datam. Erit autem hic $+gr$, fi in æquatione ∞ o fuerit $+\frac{1}{4}ppgr$, hoc eft fi $\frac{1}{4}gg$ majus quam $\frac{1}{4}aa + ee$.

Quomodo autem hyperbola data adhibeatur, etiam cum hic invenitur qq minus quam gr, poftea oftendetur. In cafibus vero jam dictis conftructionem cum data hyperbola difcemus, ficut in ellipfi, ex conftructione cum hyperbola fimili quam hic ipfa data referat. Ponatur æquatio $y^4 - ppyy + ppqy + \frac{1}{4}ppgr \infty$ o. Si OP recta referat

axem parabolæ cujus vertex o, latus rectum t, oportet perpendicularem DO [Fig. 47] in axem parabolæ a centro hyperbolæ ductam cadere in ipsum verticem O, propter æquationem ad parabolam $vt \infty yy$. sunt enim OP ∞ v, PN ∞ y.

[Fig. 47].

Ipsa vero OD erit $\frac{1}{2}q$, propter æquationem ad hyperbolen ℞ qy &c. Et patet haberi $+ qy$, cum in æquatione ∞ o habeatur $+ ppqy$, ut hic positum; ideoque OD accipiendam in partem affirmatam, hoc est in quam cadit y sive TG sumpta à puncto T ubi terminatur $\frac{1}{2}g$ ∞ DT.

Rursus in constructione per circulum, oportet perpendicularem a centro circuli M abscindere portionem axis parabolæ ad verticem, VO æqualem $\frac{1}{2}s$, propter æquationem ad parabolam $yy \infty \frac{1}{2}ts$ ℞ tz. est enim VP ∞ z. Ipsa vero perpendicularis MV erit $\frac{1}{2}\frac{bq}{a}$, sumenda in partem negatam, quia hic erit $-\frac{1}{2}\frac{bq}{a}$ propter $+ ppqy$ in æquatione ∞ o. adeo ut VM sive OL, et OD, semper cadant in partes contrarias.

Radius porro circuli MN erit

$$\sqrt{\frac{1}{4}\frac{bbqq}{aa} - \frac{1}{4}\frac{bgr}{a} + \frac{1}{4}ss},$$

quia $\frac{1}{4}\frac{bgr}{a}$ debet habere signum contrarium ejus quod, in æquatione ∞ o, præfixum est $\frac{1}{4}ppgr$.

Notetur vero quod OL + OD, hoc est $\frac{1}{2}\frac{bq}{a} + \frac{1}{2}q$ æquatur $\frac{1}{2}\frac{hq}{a}$ quia $h \infty a + b$. ut proinde DL sit $\frac{1}{2}\frac{hq}{a}$. Item VO sive ML, quæ erat $\frac{1}{2}s$, æquari $\frac{1}{2}\frac{ht}{a}$, quia $s \infty \frac{pp}{t} + t$; et $\frac{pp}{t} \infty \frac{tb}{a}$, quia $\frac{pp}{tt} \infty \frac{b}{a}$.

Et jam quidem perpendiculares NP ab intersectionibus N in rectam OP erunt ipsæ radices y in hyperbola data adhibendæ; quarum quæ sunt a parte affirmata statuendæ sunt in axe ejus hyperbolæ a puncto T (ubi terminatur DT ∞ $\frac{1}{2}g$), in partem affir-

matam, velut TG; quæ vero NP sunt à parte contraria, etiam a puncto T in contrariam partem accipiendæ, ut Tg. Et excitatis (in hyperbola nimirum data) perpendicularibus GB, gb, invenientur omnia puncta B ad quæ ductæ a dato puncto E sint hyperbolæ perpendiculares, quæ quidem quatuor esse possunt at lineæ notatæ 1, 2, 3, 4.

Jam porro ut Hyperbola data uti possimus et circulo ad easdem y inveniendas, reductio proportionalis facienda. Nempe augendus vel minuendus radius circuli, itemque rectæ quæ centrum ipsius definiunt, respectu centri D hyperbolæ datæ, secundum proportionem l ad a, ponendo l pro $\sqrt{qq - gr}$, quod æquale erat axi hyperbolæ similis datæ. Ergo DL quæ erat $\frac{1}{2}\frac{hq}{a}$, jam erit $\frac{1}{2}\frac{hq}{l}$, accipienda in partem contrariam puncti F, quia in æquatione prima est $+ ppqy$. Item LM, quæ erat $\frac{1}{2}\frac{ht}{a}$, erit $\frac{1}{2}\frac{ht}{l}$. Et radius circuli fiet $\frac{a}{l}\sqrt{\frac{1}{4}\frac{p^4qq}{t^4} + \frac{1}{4}\frac{ppgr}{tt} + \frac{1}{4}ss}$. DO vero, quam abscindit recta OP, cum fuerit $\frac{1}{2}q$, erit jam $\frac{1}{2}\frac{aq}{l}$. Radices vero NP, hinc inventæ erunt $\frac{ay}{l}$, quæ reductæ contraria proportione a ad l, dabunt radices veras y sive TG statuendas, ut diximus, à puncto T. Et hæc constructio tantum adhibenda. Nam priorem idcirco proposui ut inventionis ratio perspiceretur. Sicut autem constructio hæc quadrat illi quam in ellipsi dedimus ita et demonstratio eadem via procedit, nec fere nisi signis + et — differet. quamobrem hic omittetur.

Porro ut etiam casum illum de quo diximus, expediamus, ubi æquatio ad hyperbolam est $\wp\, qy - \frac{1}{4}gr + \frac{ttvv}{pp} \infty yy$. ac proinde $y \infty \wp\, \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}gr + \frac{ttvv}{pp}}$ (minus autem qq quam gr). Sciendum hic designari locum ad hyperbolam in qua recta y ad axem ordinatim applicatur, cujusque latus rectum ad transversum ut tt ad pp ut facile est ostendere. Latus transversum verò, sive axis, fit $\sqrt{\frac{ppgr - ppqq}{tt}}$ qui nunc vocabitur l. Ut vero hæc hyperbola similis fiat hyperbolæ datæ, oportet tantum ponere tt ad pp sicut b ad a; cum priori casu fuerit tt ad pp ut a ad b. unde tantùm quantitas lineæ t mutatur quæ fiet $\infty \sqrt{\frac{bpp}{a}}$. In æquatione autem ad circuli circumferentiam, observando item quod tt ad pp ut b ad a, invenietur $y \infty \gamma\, \frac{1}{2}\frac{aq}{b} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\frac{aaqq}{bb} + \frac{1}{4}\frac{agr}{b} + \frac{1}{4}ss - zz}$ unde radius circuli $\infty \sqrt{\frac{1}{4}\frac{aaqq}{bb} + \frac{1}{4}\frac{agr}{b} + \frac{1}{4}ss}$ qui adhibendus cum hyperbola simili datæ.

Aequationes ad parabolam sunt eædem quæ priore casu.

In constructione autem per hyperbolam et parabolam imaginariam, observandum

hìc axem parabolæ parallelum esse axi hyperbolæ, quia eadem y ad utriusque axem ordinatim applicatur. Denique reductio omnium facienda ut prius secundum rationem l ad a.

Posita exempli gratia æquatione $y^4 - ppyy + ppqr - \frac{1}{4}ppgy \infty 0$ fiunt æquationes ad parabolam et ad hyperbolam similem datæ

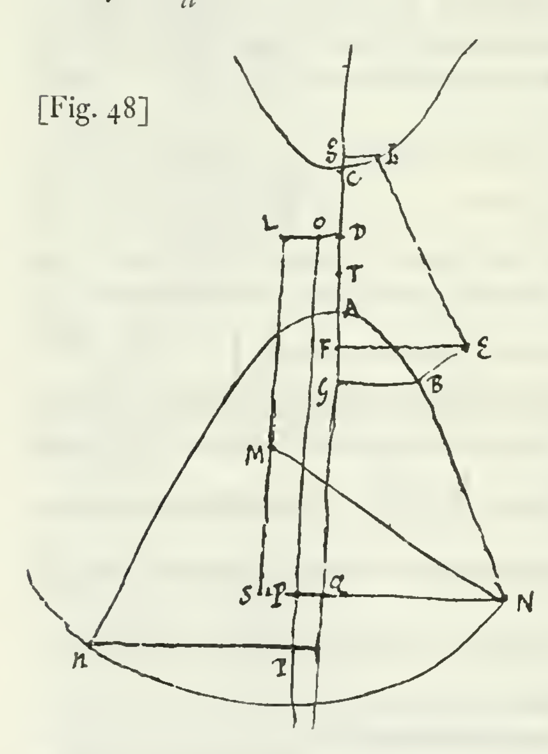
$$vt \infty yy, \text{ et } \tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{4}gr + \frac{ttvv}{pp}} \infty y.$$

Æquationes autem ad parabolam et ad circumferentiam

$$\tfrac{1}{2}ts \pm tz \infty yy, \text{ et } -\tfrac{1}{2}\frac{aq}{b} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\frac{aaqq}{bb} + \tfrac{1}{4}\frac{agr}{b} + \tfrac{1}{4}ss - zz} \infty y.$$

Eritque l, sicut dictum fuit, $\infty \sqrt{\dfrac{agr - aqq}{b}}$. Item $s \infty \dfrac{pp + tt}{t}$, hoc est $\dfrac{ta}{b} + t$, quia hic $\dfrac{pp}{tt} \infty \dfrac{a}{b}$. Sed $\dfrac{ta}{b} + t$ est $\infty \dfrac{th}{b}$, quia $h \infty a + b$. Ergo s jam erit $\infty \dfrac{th}{b}$, t vero $\infty \sqrt{\dfrac{bpp}{a}}$. Ex his igitur constructio oritur hujusmodi.

[Fig. 48]



A centro hyperbolæ D [Fig. 48] erigatur axi perpendicularis DL ∞ $\frac{1}{2}\dfrac{ahq}{lb}$. idque in partem contrariam ejus ubi punctum E, quoniam in æquatione prima habetur $+ppqy$. Deinde fit LM, axi parallela, æqualis $\frac{1}{2}\dfrac{aht}{lb}$, accipienda in partem ubi est punctum F. Centro autem M, radio MN ∞ $\frac{1}{2}\dfrac{a}{l}\sqrt{\dfrac{aaqq}{bb} + \dfrac{agr}{b} + ss}$ describatur circumferentia et à punctis N, ubi hæc occurrit hyperbolæ, cadant perpendiculares NP in rectam OP, axi parallelam, positâ DO ∞ $\frac{1}{2}\dfrac{aq}{l}$. Sicut autem a ad l ita sint singulæ NP, quæ vocentur m, ad alias $\dfrac{lm}{a}$ quæ dicantur y. Ac denique posita in axe DT ∞ $\frac{1}{2}g$, in partem ubi est E punctum, accipiantur ipsis

$\frac{lm}{a}$ æquales in axe TG, idque ita ut quæ ortæ ſunt à perpendicularibus NP ad partes puncti E poſitis, cadant à T verſus F, reliquæ vero in partem contrariam. Jamque axi perpendiculares rectæ GB oſtendent in hyperbolis oppoſitis puncta B, ad quæ, ductæ ex puncto E, occurrant ipſis ad rectos angulos. Si ponatur axis AC ſeu $a \infty 2$; latus rectum ∞ 1, DF ſive $c \infty \frac{3}{2}$, FE ſive $d \infty \frac{3}{2}$, fiunt $h \infty 3$, $g \infty 1$, $pp \infty 2$, $q \infty \frac{1}{4}$, $gr \infty \frac{5}{8}$. unde æquatio

$$y^4 - 2yy + \frac{1}{2}y - \frac{5}{16} \infty 0,$$

in qua ſigna + et — conveniunt ijs quæ paulo ante poſuimus. Porro hic ſit $t \infty 1$, $s \infty 3$, $l \infty \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$. Unde DL $\infty \sqrt{\frac{1}{2}}$. LM $\infty 4\sqrt{\frac{1}{2}}$. Radius MN $\infty 2\sqrt{\frac{7}{3}}$. DO $\infty \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}$, DT $\infty \frac{1}{2}$

C § 6. *Demonſtratio Conſtructionis.* Concurrant LM et NP in S, CA, NP in Q. Et ut a ad l ita ſit DQ ad aliam quæ dicatur v. eritque DQ $\infty \frac{av}{l}$. Quia autem ut a ad l ita fecimus m ad y, erit m ſive NP $\infty \frac{ay}{l}$.

Jam vero, propter hyperbolen, rectangulum CQA hoc eſt quadratum DQ minus quadrato DA, erit ad quadr. NQ, ut axis hyperbolæ ad latus rectum, hoc eſt ut a ad b. Atqui quadr. DQ eſt $\frac{aavv}{ll}$. quadratum vero DA $\infty \frac{1}{4}aa$. Quadratum denique NQ, hoc eſt ab NP minus DO, hoc eſt ab $\frac{ay}{l} - \frac{1}{2}\frac{aq}{l}$, eſt $\frac{aayy - aaqy + \frac{1}{4}aaqq}{ll}$. Ergo ut hoc ad $\frac{aavv}{ll} - \frac{1}{4}aa$ ita b ad a. unde æquatio exiſtit, per quam invenitur

$$vv \infty ayy - aqy + \frac{1}{4}aqq + \frac{1}{4}bll,$$

et reſtituto $\frac{agr - aqq}{b}$ pro ll, ſit $vv \infty \frac{ayy - aqy + \frac{1}{4}agr}{b}$.

Jam porro ut a ad l ita MS ad aliam, quæ dicatur z: Ergo MS $\infty \frac{az}{l}$. Eſt autem, propter Circulum, quadratum MN æquale quadratis ab MS et SN. Sed quadr. MN eſt $\frac{1}{4}\frac{a^4qq}{llbb} + \frac{1}{4}\frac{a^3gr}{llb} + \frac{1}{4}\frac{aass}{ll}$ ex conſtructione; quadratum MS $\infty \frac{aazz}{ll}$, quadratum vero SN, ſive ab NQ + QS, eſt $\frac{aayy}{ll} + \frac{a^3qy}{llb} + \frac{1}{4}\frac{a^4qq}{llbb}$. Nam ſi ad NQ, quæ erat $\frac{ay - \frac{1}{2}aq}{l}$, addatur QS ſive DL $\infty \frac{\frac{1}{2}ahq}{lb}$; hoc eſt $\frac{\frac{1}{2}aaq + \frac{1}{2}abq}{lb}$, quia $h \infty a + b$; fiet NS $\infty \frac{ay}{l} + \frac{\frac{1}{2}aaq}{lb}$. Ergo hinc rurſus æquatio exiſtit, quæ reducta relinquit $zz \infty \frac{1}{4}\frac{agr}{b} + \frac{1}{4}ss - \frac{aqy}{b} - yy$.

Quia vero erat LM $\infty \frac{\frac{1}{2}aht}{lb}$ ex conſtructione, hoc eſt $\frac{1}{2}\frac{as}{l}$, quia s erat $\infty \frac{th}{b}$; DQ vero ſive LS $\infty \frac{ay}{l}$. erit MS $\infty \frac{av - \frac{1}{2}as}{l}$. Erat autem MS $\infty \frac{az}{l}$. Ergo hæc inter ſe æqualia, unde $z \infty v - \frac{1}{2}s$; et $zz \infty vv - vs + \frac{1}{4}ss$. Sed erat $zz \infty \frac{1}{4}\frac{agr}{b} + \frac{1}{4}ss - \frac{aqy}{b} - yy$. Ergo hinc alia æquatio, ex qua fit $vv \infty \frac{\frac{1}{4}agr - aqy}{b} - yy + vs$. Sed invenimus antea $vv \infty \frac{ayy - aqy + \frac{1}{4}agr}{b}$. Ergo alia rurſus hinc æquatio. Ex qua invenitur $\frac{ayy}{b} \infty vs - yy$, hoc eſt $tv \infty yy$, quia $s \infty \frac{ht}{b}$ et $h \infty a + b$. Itaque eſt $v \infty \frac{yy}{t}$. Et proinde $vv \infty \frac{y^4}{tt}$. Sed erat $vv \infty \frac{ayy - aqy + \frac{1}{4}agr}{b}$; ſive, reſtituto $\frac{pp}{tt}$ pro $\frac{a}{b}$, $\qquad vv \infty \frac{ppyy - ppqy - \frac{1}{4}ppgr}{tt}$.

Ergo hoc æquale $\frac{y^4}{tt}$. unde denique

$$y^4 - ppyy + ppqy - \tfrac{1}{4}ppgr \infty 0.$$

Quæ cum ſit æquatio eadem quæ ex problematis analyſi reperta erat, apparet recte ſe habere conſtructionem.

C § 7. *Aliter utroque caſu*. Sit rurſus eadem quæ ſupra æquatio

$$y^4 - ppyy \pm ppqy \pm \tfrac{1}{4}ppgr \infty 0.$$

Ergo

$$y^4 - ppyy \infty \mp ppqy \mp \tfrac{1}{4}ppgr,$$

et addita utrinque $ttyy$ et dividendo per pp fit

$$\frac{y^4 - ppyy + ttyy}{pp} \infty \frac{ttyy \mp ppqy \mp \frac{1}{4}ppgr}{pp}.$$

Ut autem ab altera parte fiat quadratum ubi eſt y^4, addendum inſuper $\frac{1}{4}$ quadrati ex $\frac{tt - pp}{p}$ quod vocetur s, itaque addito utrimque $\frac{1}{4}ss$ et æquata parte æquationis utraque quadrato incognitæ v, fiet

$$vv \infty \frac{y^4}{pp} \pm \frac{syy}{p} + \tfrac{1}{4}ss \quad \infty \quad \frac{ttyy \mp ppqy \mp \frac{1}{4}ppgr}{pp} + \tfrac{1}{4}ss \infty vv$$

$$v \infty \frac{yy}{p} \pm \tfrac{1}{2}s \text{ vel } \infty \tfrac{1}{2}s \pm \frac{yy}{p} \qquad \mp \tfrac{1}{4}gr + \tfrac{1}{4}ss \mp qy + \frac{ttyy}{pp} \infty vv$$

$$pv \curlyvee \tfrac{1}{2}ps \infty yy \qquad \frac{\curlywedge \frac{1}{4}ppgr - \frac{1}{4}ppss \curlywedge ppqy}{tt} + \frac{ppvv}{tt} \infty yy$$

$$\curlywedge \tfrac{1}{2}\frac{ppq}{tt} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\frac{p^4}{t^4}qq + \frac{\curlywedge \frac{1}{4}ppgr - \frac{1}{4}ppss}{tt} + \frac{ppvv}{tt}} \infty y.$$

Quarum altera æquatio ad parabolam cujus latus rectum p, altera ad hyperbolen cujus latus rectum ad transversum ut tt ad pp quæque proinde similis erit datae, ponendo $\frac{pp}{tt} \infty \frac{a}{b}$, habebitque latus transversum $l \infty \sqrt{\frac{p^4}{t^4}qq + \frac{\curlywedge ppgr - ppss}{tt}}$, nempe si in quantitatibus hac radice comprehensis signa $+$ prævaleant signis $-$. Et tunc quidem linea y parallela intelligitur axi hyperbolæ.

Sed si prævaleant in radice signa $-$, tunc locus designat hyperbolam cujus latus rectum ad transversum ut pp ad tt, quæ, proinde, ut similis fiat hyperbolæ datæ, ponendum $\frac{pp}{tt} \infty \frac{b}{a}$. Ejus vero latus transversum sive axis erit $\sqrt{\frac{-ppqq}{tt} \curlyvee gr + ss}$; et recta y ad axem ordinatim applicata. Porro ad inveniendum locum ad circuli circumferentiam; cum sit ut prius

$$y^4 - ppyy \infty \curlyvee ppqy \curlyvee \tfrac{1}{4}ppgr;$$

auferatur utrimque $ppyy$, et divisio fiat per pp, eritque

$$\frac{y^4 - 2ppyy}{pp} \infty \frac{-ppyy \curlyvee ppqy \curlyvee \frac{1}{4}ppgr}{pp}.$$

Insuper, ad formandum ab altera parte quadratum, addatur utrimque pp, et pars utraque æquetur quadrato incognitæ z. fietque

$$zz \infty \frac{y^4 - 2ppyy + pp}{pp} \infty -yy \curlyvee qy \curlyvee \tfrac{1}{4}gr + pp \infty zz$$

$$z \infty \frac{yy}{p} - p \text{ vel } z \infty p - \frac{yy}{p} \qquad \curlyvee qy \curlyvee \tfrac{1}{4}gr + pp - zz \infty yy$$

$$pz + pp \infty yy \text{ vel } pp - pz \infty yy \curlyvee \tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}qq \curlyvee \tfrac{1}{4}gr + pp - zz} \infty y.$$

Quarum æquationum altera ad parabolam, cujus rursus latus rectum p. Altera ad circumferentiam cujus radius $\sqrt{\frac{1}{4}qqr \curlyvee \frac{1}{4}gr + pp}$. Notandumque nullam hic utroque casu esse differentiam, nempe in definiendo circuli radio, quia scilicet $+$ hic non habetur.

Ut constructionis ratio utroque casu appareat, ponatur inventa æquatio

$$y^4 - ppyy + ppqy + \tfrac{1}{4}ppgr \infty 0,$$

et esse $\frac{p^4qq}{t^4} + \frac{ppgr - ppss}{tt}$ quantitatem affirmatam, et a majus quam b. Fient igitur æquationes ad parabolam et hyperbolam similem

$$\tfrac{1}{2}ps \curlywedge pv \infty yy; \text{ et } \tfrac{1}{2}\frac{aq}{b} \curlywedge \sqrt{\tfrac{1}{4}\frac{aaqq}{bb} + \tfrac{1}{4}\frac{agr}{b} - \tfrac{1}{4}\frac{ass}{b} + \frac{avv}{b}} \infty y.$$

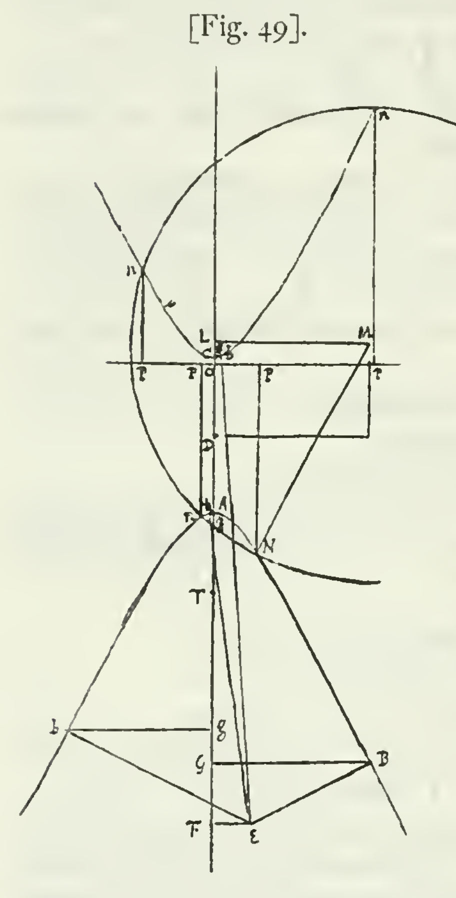
Aequationes vero ad parabolam et ad circumferentiam

$$pp \mathcal{R} pz \infty yy; \text{ et } -\tfrac{1}{2}q \mathcal{R} \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{4}gr + pp - zz} \infty y.$$

Item l erit $\infty \sqrt{\frac{aaqq}{bb} + \frac{agr}{b} - \frac{ass}{b}}$ et $s \infty p - \frac{bp}{a}$.

Hinc igitur primi casus constructio fiet hujusmodi. Ponatur DL [Fig. 49] in axe in partem contrariam puncti F, quoniam in æquatione prima habetur $+ ppqy$; sitque DL $\infty \frac{\frac{1}{2}ahq}{lb}$. Porro sit LM axi perpendicularis $\infty \frac{\frac{1}{2}ap}{l}$.

[Fig. 49].



Jam centro M radio

$$\text{MN} \infty \frac{a}{l}\sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{4}gr + pp}$$

describatur circumferentia. Et a punctis quibus ea hyperbolæ vel sectionibus oppositis datis occurrit, cadant perpendiculares in rectam OP, quæ ponatur axi ad angulos rectos, sumptâ DO $\infty \frac{1}{2}\frac{aaq}{lb}$. quæ perpendiculares NP singulæ vocentur m. Atque ut a ad l ita sit m ad aliam $\frac{ml}{a}$. ac denique sumto in axe intervallo DT versus F, quod sit $\frac{1}{2}g$, accipiantur TG æquales singulis $\frac{ml}{a}$, idque ita ut quæ TG sunt à perpendicularibus NP a parte puncti F positis, cadant ultra punctum T à centro D; reliquæ vero in partem contrariam. Jamque axi perpendiculares GB ostendent puncta B, ad quæ ductæ ex puncto E occurrant hyperbolæ ad angulos rectos.

Note ajoutée plus tard.

2 Oct. 1687. Inveni easdem constructiones hasce inveniri methodo Slusij; quæ est in Mesolabo ejus pag. 92. si suppleantur in hac methodo quæ ibi ad marginem annotavi. Et ex constructione per ellipsin aut hyperbolen datæ similem, deducatur constructio per ellipsin aut hyperbolen datam, uti hic fecimus, quod Slusius non videtur animadvertisse semper fieri posse absque novo calculo. Itaque ipsius methodum huic nostræ præfero, magis intricatæ.

Cette remarque ajoutée en 1687 au texte du Manuscrit 11 s'accorde avec ce que l'on trouve à la p. 291 du Manuscrit F, datant également de 1687 (la p. 285 est datée août 1687 et la p. 311 3 déc. 1687):

Aequationes meæ problematis Apolloniani reductæ ad locos secundum methodum Slusij pag. 92 Mesolabi.

Cum habetur $-ppyy$.

$y^4 - ppyy - ppqy + \frac{1}{4}ppgr \infty 0$ $\qquad yy \infty nz$

addatur hinc $2ppyy$ inde $2ppnz$ quæ æqualia. Et in eo suppleo hic methodum Slusij.

$nnzz + ppyy - ppqy \infty 2ppnz - \frac{1}{4}ppgr$ $\qquad$ AB ∞ z [Fig. 50]

$ppyy \infty ppqy + 2ppnz - \frac{1}{4}ppgr - nnzz$

EF EG BC

$p - n - z - \frac{pp}{n} \Big| \frac{nz}{p} - p$

$$yy \infty qy - \frac{1}{4}gr + 2nz - \frac{nnzz}{pp}$$

$$y \infty \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}gr + 2nz - \frac{nnzz}{pp}} \qquad \frac{nz}{p} - p \text{ qu.}$$

$$y \infty \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}gr + pp - pp + 2nz - \frac{nnzz}{pp}} \qquad \frac{nnzz}{pp} - 2nz + pp.$$

Ellipsis

$nnzz - ppnz \infty ppqy - \frac{1}{4}ppgr$

$$zz - \frac{ppz}{n} - nz \infty \frac{ppqy - \frac{1}{4}ppgr - yy}{nn} \qquad \text{Sit } \frac{pp}{n} + n \infty m.$$

$$yy \infty \frac{ppqy}{nn} - \frac{\frac{1}{4}ppgr}{nn} + mz - zz \quad \text{Circumferentia.}$$

$$y \infty \frac{\frac{1}{2}ppq}{nn} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\frac{p^4qq}{n^4} - \frac{1}{4}\frac{ppgr}{nn} + \frac{1}{4}mm - \frac{1}{4}mm + mz - zz}$$

quadr.

Cum habetur $+ppyy$

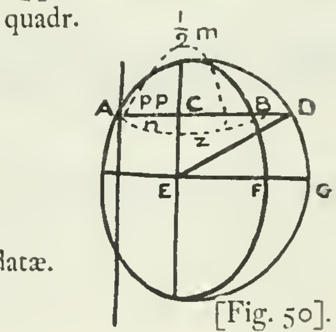
$y^4 + ppyy - ppqy + \frac{1}{4}ppgr \infty 0$

$nnzz + ppyy - ppqy + \frac{1}{4}ppgr \infty 0$

$$yy \infty qy - \frac{1}{4}gr - \frac{nnzz}{pp}$$

$y \infty \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}gr - \frac{nnzz}{pp}}$ ad Ellipsin similem datæ.

Et restituendo $ppnz$ pro $ppyy$ fit æquatio ad parabolam



[Fig. 50].

$$nnzz + ppnz - ppqy + \tfrac{1}{4}ppgr \propto 0.$$

Et auferendo æqualia $nz \propto yy$ fit $zz + \frac{ppz}{n} - nz \propto \frac{ppqy - \frac{1}{4}ppgr}{nn} - yy.$

Sit $n - \frac{pp}{n} \propto m.$ $yy \propto \frac{ppqy}{nn} - \frac{1}{4}\frac{ppgr}{nn} + mz - zz$ locus ad circumferentiam

$$y \propto \frac{\frac{1}{2}ppq}{nn} \,\&\, \sqrt{\frac{1}{4}\frac{p^4qq}{n^4} - \frac{1}{4}\frac{ppgr}{nn} + \tfrac{1}{4}mm - \underbrace{\tfrac{1}{4}mm + mz - zz}_{\text{quadr.}}}$$

Ex his intellexi meam methodum conſtruendi problema Apollonij de perpendiculari ex dato puncto in hyperbolam vel ellipſin ducenda eodem redire quo Sluſij illa pag. 92 Meſolabi, quæ non opus habet tantis ambagibus. Sed in ea ſupplendum quod ibi ad marginem notavi.

APPENDICE

À LA PIÈCE XIII DE LA P. 288

(THÉORÈME SUR LES POINTS D'INTERSECTION DES CONIQUES DONT LES AXES SONT PARALLÈLES OU À ANGLES DROITS, 1680)

Mars 1680.

A. En cherchant les points d'interfection d'une ellipfe et d'une parabole ayant fon axe parallèle à l'un des axes de l'ellipfe [1]), Huygens obtint un jour une équation du quatrième degré en y où le terme en y^3 faifait défaut (comparez la note 2 de la p. 288 qui précède). Il faifit tout de fuite la portée de cette découverte:

... in æquatione non habebitur nifi y^4, yy et y non autem y^3. Ergo ductis perpendicularibus in axem parabolæ a punctis interfectionum, erunt fummæ ex utraque parte æquales.

Si circulus parabolam fecet in quatuor punctis, vel parabola alia cujus axis axem prioris fecet ad angulos rectos, vel ellipfis vel hyperbole aut oppofitæ fectiones quarum axis vel parallelus fit vel ad rectos angulos axi parabolæ, a punctis interfectionis autem demittantur perpendiculares in axem parabolæ, fummæ perpendicularium ab utraque parte axis inter fe æquales erunt.

Ce théorème avait été énoncé pour le cas de la circonférence de cercle et de la parabole par F van Schooten dans fes „Commentarii in Librum III Renati Cartefii", comme nous l'avons indiqué. auffi à la p. 219 qui précède.

Ita quatuor puncta interfectionum [favoir ceux de la conique et de la parabole confidérées] erunt in circuli circumferentia. Nam circumferentia per tria illorum punctorum defcripta neceffario parabolam in quarto etiam fecabit, ut fummæ perpendicularium fiant æquales.

Si coni fectio coni fectionem in quatuor punctis fecet, funt autem axes utriufque paralleli vel fibi mutuo ad angulos rectos, quatuor puncta interfectionum erunt in circuli circumferentia.

En rédigeant fa Pièce en français [2]) — rédaction dont une grande partie s'accorde avec celle des

---

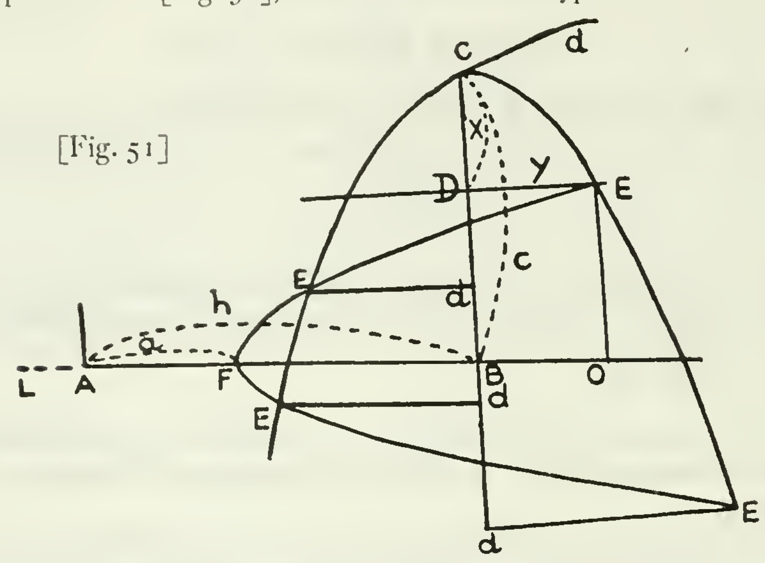
[1]) Manuscrit E, p. 232, portant la date 22 Mart. 1680.

[2]) Manuscrit E, p. 236—238.

p. 288—290 qui précèdent — Huygens s'exprime comme fuit au fujet de l'équation du quatrième degré dont le deuxième terme fait défaut, et de la conféquence qui en découle (il prend ici une hyperbole au lieu d'une ellipfe):

Soit la parabole CE [Fig. 51], dont l'axe eft CB et l'hyperbole FE dont l'axe FB

[Fig. 51]



faffe des angles droits avec CB. Et des 4 points E de leur interfection foient menees fur CB les perpendiculaires ED. Je dis que celles qui font d'un coftè feront enfemble egales a celles qui font de l'autre coftè.

Soit FL le diametre tranfverfe de l'hyperbole, et fon demi diametre tranfverfe AF foit ∞ a, fon demi coftè droit ∞ b. la diftance AB ∞ h, BC ∞ c, le coftè droit de la parabole ∞ d. CD ∞ x, DE ∞ y.

AO eft donc $h + y$ et fon quarrè $hh + 2hy + yy$

oftez le quarré AF aa

refte le $\square$ LOF $hh + 2hy + yy - aa$

a eft à b, comme $hh + 2hy + yy - aa \,/\, \frac{bhh + 2bhy + byy - baa}{a}$ qu. OE.

Mais OE eftant egale a DB elle eft $c - x$.

Donc fon quarrè $cc - 2cx + xx \infty \frac{bhh + 2bhy + byy - baa}{a}$

mais, à caufe de la parabole, DC eft egale à $\frac{yy}{d}$ c'eft a dire au quarrè DE appliquè au coftè droit d. Donc en fubftituant dans l'equation trouvée cette valeur au lieu de x, l'on aura $cc - \frac{2cyy}{d} + \frac{y^4}{dd} \infty \frac{bhh + 2bhy + byy - baa}{a}$

qui eſt une æquation quarrequarrée qui eſtant reduite manque de ſecond terme, puiſqu'il n'y aura point de y^3 [3]).

Et de quelque maniere que la parabole ſoit couppée par une ſection conique dont l'axe ſoit parallele ou a angles droits a celuy de la parabole il eſt aiſè de voir qu'il n'y pourra avoir dans la premiere equation que yy, y et xx et x. Et x eſtant touſjours $\infty \frac{yy}{d}$, il ne peut ij venir en ſubſtituant cette quantitè au lieu de x, que yy et y^4, et non y^3.

Or ce ſecond terme manquant a l'equation il eſt certain que les valeurs de la racine y affirmatives ſeront enſemble egales aux valeurs negatives de la meſme y. C'eſt a dire les perpendiculaires DE d'un coſtè de l'axe CB egales aux perpendiculaires DE de l'autre coſtè. Car ſi ces perpendiculaires de l'un coſtè ſont appellées l et m, de l'autre $-n$ et $-p$ . . . ou plutôt, pour reproduire exactement le texte, $\div n$ et $\div p$. En d'autres endroits auſſi on rencontre parfois chez Huygens, au lieu du ſigne —, le ſigne ÷ qui a peut-être été inventé par Albert Girard. On ne trouve toutefois ce ſigne, au lieu du ſigne —, qu'une ſeule fois dans l'„Invention nouvelle en l'algèbre" de Girard de 1629 (citée à pluſieurs repriſes par van Schooten dans ſes „Commentarii" et ailleurs et ſur laquelle on peut conſulter auſſi la note 120 de la p. 217 qui précède). C'eſt dans cette brochure que ſe trouvent les théorèmes ſur les relations entre les coëfficients et les racines d'une équation algébrique à une inconnue; mais nous n'oſons pas conclure de l'emploi du ſigne ÷ que Huygens l'avait ſous les yeux en ce moment.

donc puiſque $y \infty l$ et $y \infty m$, et $y \infty -n$ [4]) et $y \infty -p$ [4]) il ſ'enſuit que

$$y - l \infty 0$$
$$y - m \infty 0$$
$$y + n \infty 0$$
$$y + p \infty 0$$

Et le produit de ces quatre quantitez fera une æquation quarrè quarrée. dont chaque terme ſera neceſſairement egal a chaque terme de l'equation quarrè quarrée qui a eſte trouvée auparavant. Mais dans cette premiere le terme ſous y^3 eſtoit ∞ 0. donc dans l'autre equation le terme ſous y^3 qui eſt $+ny^3 + py^3 - my^3 - ly^3$ doit auſſi eſtre ∞ 0, et par conſequent $n + p$ egal à $m + l$.

Et la meſme choſe devroit eſtre ſi trois de ces racines eſtoient avec le ſigne contraire de la quatrieme, c'eſt a dire ſi trois perpendiculaires tomboient d'un coſtè et une ſeule de l'autre [5]).

Dans le Manuſcrit E il n'eſt pas encore queſtion de la deuxième Propoſition (ou deuxième lemme) de la Pièce XIII, et Apollonios n'y eſt pas cité.

---

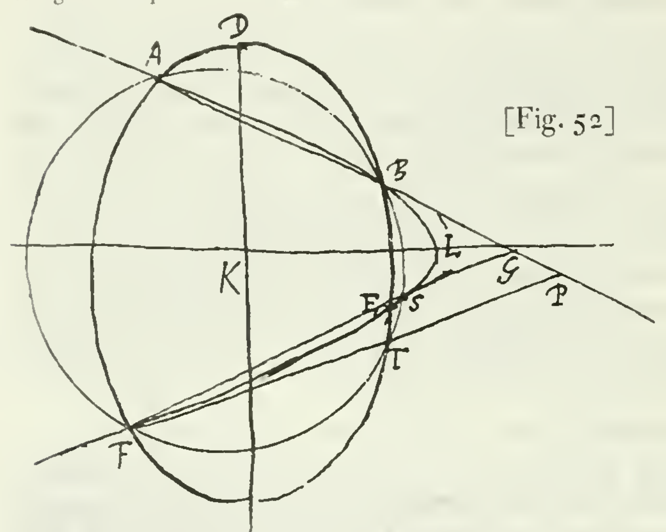
3) Ceci correspond au calcul de la p. 232 du Manuſcrit qui n'eſt que de trois ou quatre lignes.

4) Ici Huygens a réellement le ſigne —, comme partout ailleurs dans cette Pièce.

5) Notons encore qu'à la p. 235 du Manuscrit Huygens arrive par des calculs sur les interſections de coniques à la conclusion suivante: Non poteſt æquatio cubica conſtrui per hyperbolam datam et per parabolam, abſque immutatione proportionali radicis.

Comparez l'alinéa Inventa ſolutione etc. de l'Appendice précédent (poſtérieur en date), alinéa qui se trouve à la p. 335.

B. Ailleurs (Chartæ mathematicæ, f. 163) Huygens donne — évidemment un peu plus tard — une démonſtration du même théorème ſans faire uſage de géométrie analytique. Elle a déjà été publiée en 1921 par F. Schuh, avec notre „Pièce XIII", ſous le titre „Deux démonſtrations dues à Huygens de ſon théorème concernant les quatre points d'interſection de deux coniques à axes parallèles" dans le T. I de la revue „Chriſtiaan Huygens" (réd. F. Schuh, Noordhoff, Groningen). Schuh y parle, comme nous l'avons auſſi fait plus haut, de l'influence de de la Hire. Voici cette démonſtration géométrique des Chartæ mathematicæ:



[Fig. 52]

Si deux ſections coniques ADB, ALF [Fig. 52], s'entrecouppent en 4 points, A, B, E, F, et que leur axes DK, LK ſoient paralleles, ou à angles droits, les 4 points d'interſection ſeront dans un cercle.

Car ayant deſcrit par les 3 points F, A, B un cercle, ſi ce cercle ne paſſe pas par le 4e point E; il couppera donc les 2 ſections en deux points differents. En marge: Mais on prouvera que cela eſt impoſſible. Donc il les couppera au point E qui eſt leur interſection.

En marge: Poſons que le cercle couppe la ſection ALF au point S, et la ſection ADB au point T.

Ayant mené les droites AB, FS, poſons qu'elles ſe rencontrent en quelque point G. Et que FT rencontre la meſme AB en P.

Puiſque donc, à cauſe du cercle les rectangles AGB, FGS ſont egaux, il s'en ſuit par la 17.3. des Conica[6]) que les droites AG, FG ſont egalement inclinees ſur l'axe LK de la ſection ALF. Et par la meſme propoſition puiſque les rectangles APB, FPT

---

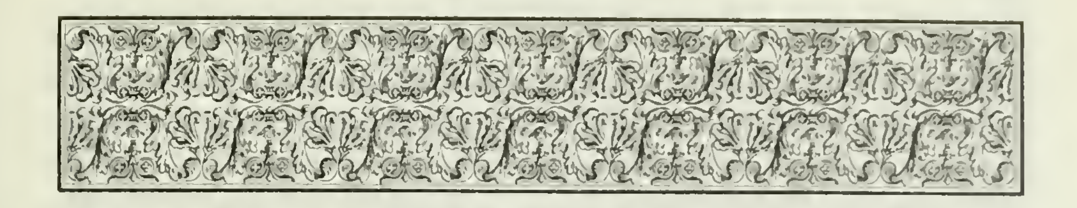
[6]) La 17.ieme proposition du Livre III des Conica d'Apollonios eſt ainsi conçue (texte latin de l'édition de Heiberg): „Si duæ rectæ coni sectionem vel ambitum circuli contingentes concurrunt, et in sectione duo quælibet puncta sumuntur, ab iisque in sectione contingentibus parallelæ ducuntur rectæ et inter se et lineam secantes, erunt, ut quadrata contingentium inter se, ita rectangula comprehensa rectis eodem modo sumptis". Dans la publication de F. Schuh de 1921 le théorème eſt énoncé plus clairement comme ſuit (nous prenons les lettres de la Fig. 52): „Si par un point G quelconque on mène deux sécantes GBA, GEF à une conique et qu'on mène des tangentes parallèles à GBA, GEF dont M, N soient les points de contact, on aura $\frac{GB \cdot GA}{GE \cdot GF} = \frac{CM^2}{CN^2}$, C étant le point de rencontre des deux tangentes".

ſont egaux à cauſe du cercle, les droites AP, FP feront egalement inclinees ſur la meſme LK, parce qu'elle eſt perpendiculaire ou parallele a l'axe DK de la ſection ADB. Donc puiſque AG, AP eſt la meſme ligne droite, il ſ'enſuit que FG, FP ſont auſſi une meſme droite; parce qu'autrement elles ſeroient differemment inclinees ſur LK. Les points S, T, ſont donc dans une meſme droite menée du point F. Et il ſ'enſuit que ces meſmes points S, T ſont coincidents en un, puiſqu'ils ſont dans une meſme circonference deſcrite par le point F. Car autrement il faudroit que la droite menee du point F rencontraſt la circonference en deux autres points que F.

Que ſi l'on dit que les droites AB, FS peuvent eſtre paralleles, je dis que ſi elles ſont paralleles, la droite qui joint leur points du milieu ſera le diametre du cercle, et ſera perpendiculaire a ces deux droites AB, FS. Mais la meſme ligne de jonction ſera auſſi l'axe de la ſection ALF parce qu'elle eſt ſon diametre a cauſe du parallelisme des AB, FS, et qu'elle eſt a angles droits aux appliquees. Donc les lignes AB, FS ſeront perpendiculaires a l'axe de la ſection ALF. Et cela eſtant je dis que la ligne FT ſera auſſi parallele à AB, car poſons qu'elles concourrent; elles ſeront donc egalement inclinees ſur l'axe de la ſection ADTF par la propoſition de Apollonios [6]). Mais AB eſtoit perpendiculaire à l'axe de la ſection ALF, donc auſſi FT, ce qui eſt abſurde puiſqu'on les a dit concourrir enſemble. Donc ſi AB eſt parallele a FS elle eſt auſſi parallele a FT, et ainſi FS, FT une meſme ligne. l'on montrera de meſme que ſi FT eſt parallele a AB, auſſi FS ſera parallele a AB. Donc ſi FS concourt avec AB, auſſi FT concourra avec AB. Mais toutes les 2, FS, FT feront egalement inclinees a l'axe de la ſection ALF, avec AB, donc toutes deux concourrent avec AB vers le meſme coſtè.

Lorsque le deuxième membre de l'équation, comme le premier, eſt égal à 1, de sorte que CM=CN, le point C se trouve nécessairement sur l'axe de la parabole (ou, dans le cas de l'ellipse ou de l'hyperbole, sur l'un des deux axes) et les deux tangentes, et par conséquent aussi les deux sécantes, font avec cet axe des angles égaux.

LES TROIS GRANDS PROBLÈMES DE L'ANTIQUITÉ.



Avertiſſement.

Dans l'Avertiſſement précédent [1]) nous n'avons voué que quelques mots au problème ancien de la quadrature du cercle dont l'impoſſibilité n'a pas été rigoureuſement démontrée au dix-ſeptième ſiècle [2]). Quant aux deux autres grands problèmes, celui de la triſection de l'angle dont Huygens s'était beaucoup occupé jadis [3]) et celui de la recherche de la duplication du cube, autrement dit de deux moyennes proportionnelles entre deux grandeurs données (problème déliaque), ils conduisaient tous les deux à des équations du troiſième degré; il a été queſtion du problème déliaque et de la réſolution graphique des équations qui s'y rattache, outre dans quelques Tomes précédents, dans pluſieurs pages du préſent Tome [4]).

Comme on peut le voir au Manuſcrit D, la diſpute avec Gregory amena Huygens à pourſuivre la recherche de solutions approchées pour la quadrature du cercle. Nous publions ici ſéparément (Pièce II) quelques pages de ce Manuſcrit qui auraient pu figurer parmi les Appendices [5]) à la Pièce VI dans leſquels on trouve également certaines approximations nouvelles. Ces pages ſe rattachent au traité „De Circuli Magnitudine inventa" de 1654.

---

[1]) Voyez la p. 213 ou nous renvoyons le lecteur à cet Avertissement-ci.

[2]) Consultez notamment sur l'„insuffisance de la démonstration de Gregory de l'impossibilité de la quadrature du cercle" l'article de 1914 de F. Schuh cité à la p. 259 qui précède.

[3]) Voyez le T. XII.

[4]) P. 13, 220, 286—287, 334 et suiv.

[5]) P. 303—327.

Il eft bien connu que déjà dans l'antiquité la recherche de la quadrature du cercle conduifit Archimède à celles de la quadrature de la parabole et de la fpirale qui porte fon nom. Dans le „De Circuli Magnitudine inventa" Huygens a conftamment préfentes à fon efprit des propofitions exprimant des égalités pour la parabole et donnant lieu par analogie à des théorèmes exprimant des inégalités pour le cercle ou fa circonférence. D'une façon générale on peut dire que dans l'efprit de Huygens comme dans celui de plufieurs de fes contemporains les quadratures d'autres furfaces planes et auffi les rectifications de certaines lignes courbes planes [6]), conftituaient des préparations, des *ἀπαγωγάς* — voyez p. e. ce mot (fi fouvent employé par Slufius) dans un paffage de Wallis cité plus haut [7]) — pour la quadrature efpérée du cercle.

Huygens, on l'a vu plus haut [8]), admet les nombres entiers, les nombres fractionnaires et les nombres fourds ou irrationnels quoiqu'en vérité ces derniers ne foient pas exprimables par des nombres déterminés de *chiffres* mais feulement par des *lignes* (on confidère évidemment généralement des lignes *droites*). Dans l'efprit de Huygens la queftion de la poffibilité de la rectification de la circonférence de cercle revient donc à celles-ci: 1. une ligne peut-elle avoir une longueur telle, par rapport à l'unité donnée de longueur, qu'elle ne foit exprimable ni par un nombre entier, ni par un nombre fractionnaire, ni par un nombre fourd? 2. dans l'affirmative, en eft-il ainfi, ou n'en eft-il pas ainfi, de la circonférence de cercle par rapport à fon rayon?

La première queftion peut être formulée plus brièvement (quoique moins clairement) comme fuit: exifte-t-il un nombre correfpondant à une longueur quelconque? Queftion à laquelle nous pourrions tout-de-fuite (en nous confidérant comme des gens du dix-feptième fiècle) donner une réponfe négative, fi nous n'avions pas adopté avec Huygens et tant d'autres la convention peut-être affez illogique de parler de „*nombres* fourds".

Depuis des temps fort reculés fans doute les penfeurs ont fait une diftinction entre la quantité difcrète et la quantité continue (voyez p. e. fur ce fujet la note 3 de la p.

---

[6]) Il en a été question à la p. 216.

[7]) Note 104 de la p. 215.

[8]) Voyez la p. 188 qui précède. Nous ne parlons pas ici des logarithmes auxquels il donne aussi le nom de nombres. Pour lui les logarithmes ne sont au fond, nous semble-t-il, que des nombres entiers: voyez les p. 215—216 et 264 qui précèdent. D'ailleurs ils portaient officiellement, depuis Neper, le nom de log*arithmes*; leur refuser le nom de nombres eût donc fait l'effet d'un purisme quelque peu bizarre.

11 qui précède). Depuis l'introduction par Ménæchme [9]) de courbes donnant par interfection deux longueurs (deux coördonnées, peut-on dire) repréfentant les deux moyennes proportionnelles entre deux quantités pouvant être, femble-t-il, non feulement des *longueurs*, mais auffi des *nombres*, il pouvait fembler défirable d'attribuer une valeur numérique à une longueur quelconque, malgré l'impoffibilité de dire exactement ce qu'il faut entendre par une telle valeur numérique. Nous avons dit plus haut [10]) qu'Ariftote ne craint pas d'appliquer le mot ἀριθμός à une quantité qui varie d'une manière continue. Il eft vrai que cet ἀριθμὸς τῆς κινήσεως, le *temps* qui s'eft „écoulé" depuis un inftant déterminé, n'eft pas une longueur *fpatiale*. Toutefois, après ce premier pas, d'autres — nous fongeons furtout à Barrow (note 19 qui fuit) — pouvaient avoir l'audace de parler auffi de nombres correfpondant à des longueurs *fpatiales* quelconques. D'ailleurs, vers le commencement du dix-feptième fiècle, plus précifément en 1585, Simon Stevin dans „le Premier Livre d'Arithmetique" avait déjà dit clairement, fans citer Ariftote, que „*nombre n'eft poinct quantite difcontinue*... à une continue grandeur correfpond le continue nombre qu'on lui attribue ... le nombre eft quelque chofe telle en grandeur, comme l'humidité en l'eau ..." [11]). Ceci mériterait, ajoute l'édition de 1634 de Girard, „un traicte particulier", mais „ce ne fera pas icy fon lieu" [12]). Nous ne trouvons pas que Stevin ait jamais tâché de juftifier

---

9) Voyez la p. 287 qui précède.

10) Note 27 de la p. 181.

11) „L'Arithmetique de Simon Stevin de Brvges: Contenant les computations des nombres Arithmetiques ou vulgaires: Aussi l'Algebre, auec les quatre premiers liures d'Algebre de Diophante d'Alexandrie, maintenant premierement traduicts en François..." A Leyde, de l'imprimerie de Christophle Plantin, MDLXXXV. Nous citons les p. 4—5.

12) „Oeuvres mathématiques de S. Stevin" publiées par Albert Girard en 1634 (Leyde, B. & A. Elsevier). Les paroles citées de Stevin, ainsi que la remarque ajoutée par Girard, s'y trouvent à la p. 2.

Stevin dit un mot sur le début de son „Arithmetique" dans son „Primus liber Geographiæ" („Hypomnemata mathematica" de 1608, p. 11 du dit livre, appartenant à la „6 definitio" qui a trait à l'„eruditum seculum"): „Alterum indicium *erudi* [lisez: *eruditi*] *sæculi*, est admirabilis numerorum peritia, quæ veteribus illis, & priscis viris fuit cognita ... Illustr. *Iosephus Scaliger* aliquando nobis ostendit ̄• punctum ab ipsis [Arabibus] dici, nostrique o vicem fungi. congruens cum eo quod non ita pridem 2 definitione Arithmeticæ nostræ Gallicæ de eodem disseruimus". En effet dans l'Explication de la dite Definition II („*Nombre est cela, par lequel s'explique la quantité de chascune chose*") Stevin avait dit que les nombres ne commencent pas par 1, comme on l'admet généralement, mais par o („o, commencement du nombre"). Ensuite il énonce en

ſes affirmations: dans ſa thèſe c'eſt le bon ſens, l'intuition, qui a la parole et non pas la logique. Le noeud gordien n'eſt pas défait, il eſt tranché par un coup d'épée [13]).

Huygens n'a jamais avancé pareil axiome. Il eſt vrai que chez lui, comme chez tant d'autres, lorſqu'il ſe ſert de l'expreſſion „quantitas" [14]), on peut parfois être en doute s'il entend parler excluſivement d'une longueur ou bien peut-être auſſi d'une quantité numérique [15]); ce qui certes ne ſuffit nullement pour le conſidérer comme un partiſan de la thèſe de Stevin [16]). Nous avons déjà dit [17]) qu'il déclare expreſſément ne pas être ſatisfait de certains raiſonnements, ou de certaines définitions, lui paraiſſant médiocrement logiques, de Wallis. Nous croyons donc auſſi pouvoir admettre qu'il eſt en déſaccord avec ce mathématicien là où celui-ci, traitant dans ſon „Arithmetica univerſalis" de 1655 [18]) de la „quantitas continua" ou „magnitudo" d'une part, de la „quantitas diſcreta" ou „numerus" de l'autre, penſe bien faire en effaçant plus ou moins cette diſtinction [19]). Notons que dans l'„Arithmetica infinitorum", datant également de 1655 [18]), Wallis dit [20]) être convaincu „rationem illam

---

grands caractères la thèse „que nombre n'est poinct quantite discontinue", qui fait encore partie de la dite Explication.

Stevin dit donc avoir publié cette thèse antérieurement à son entretien avec Scaliger, ce qui nous dispense de demander si ce que Scaliger lui avait communiqué correspondait bien certainement à la deuxième définition de l'„Arithmetique", et aussi de poser la queſtion si Stevin savait que les Arabes ont largement profité des lumières des philosophes grecs. En énonçant sa thèse, Stevin semble ne pas avoir conscience d'une autorité quelconque qui l'aurait amené à parler ainsi.

[13]) Il est à remarquer que beaucoup d'auteurs modernes introduisent bien moins brusquement ce parallélisme du nombre et de la longueur. Voyez p.e. le beau „Cours d'analyse" de M. C. Jordan (Paris, Gauthier—Villars, 1893), où l'auteur commence par traiter des propriétés des nombres discrets et nous propose ensuite la „ligne continue" décrite par un point mathématique se mouvant d'une manière continue — p. 90: „Une ligne étant définie comme le lieu des positions successives d'un point mobile ..."; comparez sur ce sujet la p. 191 qui précède — après quoi il admet, sans qu'il soit question d'„hypothèse" ou d'„axiome", la continuité des valeurs numériques correspondant aux longueurs.

[14]) P.e. l. 6 et 10 de la p. 233 qui précède.

[15]) Voyez aussi à la p. 73 du T. XVI (l. 6) l'expression „numeri lineæve".

[16]) Qu'il ne cite pas.

[17]) P. 13 et 213.

[18]) Ouvrage cité à la p. 258 qui précède.

[19]) I. Barrow, dans ses „Lectiones Mathematicæ" de 1664 (Lect. III, début) — p. 47 de „The Mathematical Works of Isaac Barrow, D.D." ed. W. Whewell, Cambridge, Univ. Press, 1860 — dit de même: „Etenim evicto numerum (illum saltem quem Mathematicus contemplatur) a quantitate, quam vocant, continuâ nil quicquam reverà differre, sed ei tantum exprimendæ declarandæque confictum esse, nec Arithmeticam proinde ac Geometriam circa diversam mate-

quæ quærebatur [le rapport de la longueur de la circonférence du cercle à fon diamètre] ejufmodi effe ut quæ nec veris numeris, nec quidem radicibus furdis (vulgo dictis) effet explicabilis... alium aliquem notationis modum quam qui adhuc receptus eft introducendum putavi, quo *numerus ille impoffibilis* [nous foulignons] indicetur".

Wallis fait allufion à fon célèbre théorème exprimant le „numerus impoffibilis" par la fraction $\frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \ldots}$ [21]) (à laquelle fe rapporte auffi la courbe fufpecte aux yeux de Huygens [22]) dont il fut queftion à la p. 234 qui précède) fraction dont Huygens dit admirer la découverte „utique fi vera eft", ce qui lui femble probable [23]).

On conçoit que Wallis, par cette découverte, croyait avoir *démontré* [24]) ce qui à

---

riam versari, sed communes uni subjecto proprietates utramque pari quasi passu demonstrare, plurima liquebit inde maximaque in rem Matheseos publicam commoda derivari... hâc admissâ numerorum et magnitudinum coalitione, locuples utrique disciplinæ [Geometriæ et Arithmeticæ] succrescet accessio, lautum accedet incrementum".

Dans les „Lectiones Mathematicæ" Barrow cite Aristote fort souvent (c. a. des passages sur le temps et le mouvement). Aux p. 30 et 34 il observe qu'Aristote applique l'expression ποσόν tant aux nombres qu'aux grandeurs („magnitudinis et multitudinis commune genus constituit"), tandis qu'auparavant on disait ποσόν pour les quantités discrètes et πηλίκον pour le continu (comparez la note 3 de la p. 11 qui précède).

Ni Wallis ni Barrow ne citent les paroles si claires de Stevin. Barrow doit cependant, nous semble-t-il, les avoir connues puisqu'il dit à la p. 59 de l'édition citée, en parlant des „numeri surdi" ou „irrationales": „Atqui satis ostendunt hi numeri, quos proinde non incongrue *Geometricos* appellat Stevinus [voyez l'„Argument" et la def. XXXI du 1. livre de l'„Arithmetique"], numerum a magnitudine nihil differre reipsâ; quos certe nec ipsâ mente putem abstrahi posse ab omni magnitudine". En lisant cette phrase, le lecteur n'apprend pas que Stevin avait *généralement* avancé dans son „Arithmetique" ce que Barrow exprime par les mots „numerum a magnitudine nihil differre reipsâ".

Nous saisissons cette occasion pour mentionner aussi en passant les „Lectiones geometricæ" de 1669 de Barrow: dans l'Appendicula de la Lectio XI il s'inspire de la cyclométrie de Huygens; voyez les notes 3 de la p. 1 et 3 de la p. 38 du T. VII. Huygens (T. VII, p. 43, 1670) n'exprime aucune opinion sur cette Appendicula.

[20]) P. 359 du T. I de 1695 des „Opera Omnia".

[21]) Ici il ne s'agit pas précisément du rapport de la longueur de la circonférence au diamètre (notre nombre π), mais de celui de la surface du carré circonscrit à celui du cercle $\left(\frac{4}{\pi}\right)$.

[22]) 1652—1653, lettres à van Schooten (T. I).

[23]) P. 459 de notre T. I (lettre de Huygens à Wallis de juillet 1656). Wallis en 1652 n'avait pas expliqué à Huygens la genèse de sa courbe dont d'ailleurs il ne voyait pas suffisamment lui-même les propriétés.

[24]) Lettre de Wallis à Brouncker de novembre 1668 (notre T. VI, p. 289): „the work is done allready, the thing itself being proved long since in my *Arithmetica Infinitorum*", etc.

fon avis comme à celui de Huygens n'était pas démontré dans un ouvrage poftérieur par Gregory, que le „numerus impoffibilis" n'eft pas un nombre dans le fens que Huygens attribuait à ce mot [25]).

Huygens, lui, n'a jamais accordé — voyez la Pièce IV qui fuit — qu'il fût prouvé que ce „numerus" dit „impoffibilis" ne peut pas être un nombre dans le fens reftreint dont il vient d'être queftion [26]). Ne réuffiffant pas à trouver ce nombre il a dû fe contenter d'obtenir par des artifices géométriques des valeurs approchées qui peu à peu perdaient leur intérêt. La Pièce II qui fuit repréfente un effort de ce genre dont le réfultat n'a pas été publié par lui [27]).

Lorfqu'il avait été démontré par Leibniz que le „numerus impoffibilis" — nous parlons toujours de notre nombre π (notation du dix-huitième fiècle) — peut être exprimé par la fomme algébrique d'une infinité de fractions numériques, Huygens put efpérer (Pièce III) que le problème de la quadrature du cercle fe montrerait réfoluble par la fommation effective des termes de cette férie.

Le traité d'algèbre de 1685 de Wallis fit connaître à Huygens les approximations de Newton déduites de développements en féries que Newton compare avec celles de Huygens („De Circuli Magnitudine inventa" de 1654). Wallis cite deux lettres de 1676 de Newton à Oldenburg, dont ce dernier envoya des copies tant à Leibniz, auquel elles étaient deftinées en premier lieu, qu'à lui. Wallis les avait reçues en juillet 1677 peu avant la mort d'Oldenburg (septembre 1677). On voit par la Pièce IV qui fuit que Huygens n'en reçut pas de copies et qu'il apprit feulement à les connaître (ou plutôt à connaître les grands extraits de ces lettres qui fe trouvent dans le livre de Wallis) en 1685 ou 1686. Il f'agit des lettres de Newton à Oldenburg du 13 juin et du 24 octobre 1676, quoique — foit dit en paffant — Wallis en deux endroits donne à cette dernière lettre la date du 24 août 1676 [28]). C'eft aux formules de Wallis et de Brouncker que fe rattache (même Pièce) le développement par Huygens du „nombre π" en une fraction continue.

---

[25]) Comparez sur ce sens les l. 11—13 de la p. 283 du T. VI.

[26]) Nous l'avons dit aussi aux p. 39—40 du T. XVIII.

[27]) Il s'agit ici d'une approximation obtenue à l'aide de la considération de centres de gravité, sujet auquel se rapporte la Deuxième Partie de l'article de F. Schuh mentionné à la p. 259 qui précède. Consultez surtout les §§ 167—169 qui se rapportent à ce que nous appelons ici la Pièce II. Schuh y discute le procédé de Huygens d'une façon détaillée.

[28]) Voyez la note 6 de la p. 391 qui suit. La dernière lettre d'Oldenburg à Huygens (T. VIII, p. 8) est de février 1676.

En 1691, ou plutôt déjà en 1689, Huygens revint dans le Manuſcrit G (notre Pièce V) ſur la „Progreſſio Leibnitsij ad Circuli Quadraturam" (Pièce III), l'étendant „ad ſectores quoſvis, quod ille neſcio an animadverterit" [29]). En d'autres termes il démontra, géométriquement, la ſérie arc tg $t = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}$ etc. [30]) pour des arcs quelconques inférieurs à 45° (ou = 45°).

Les conſidérations géométriques ſont de 1689; elles ſe rattachent à des conſidérations géométriques de 1674. La ſérie qui en réſulte eſt de 1691. Tandis que celle de Leibnitz (trouvée d'abord d'une autre façon) eſt le développement de arc tg 1 (notation moderne), Huygens propoſe de prendre plutôt arc tg $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ce qu'il appelle la „progreſſio optima ad quadrandum circulum".

Le développement en ſérie de l'arc tangente était connu depuis pluſieurs années à diverſes perſonnes: James Gregory [31]) en avait fait part à John Collins en 1670, mais ſans en donner aucune démonſtration. En novembre 1690 [32]) Leibniz écrit à Huygens que dans l'ouvrage qu'il avait „compoſé autrefois ſur la quadrature Arithmétique" [33]) il avait démontré une propoſition générale pour les ſecteurs des coniques qui, pour le cercle, revient à la formule arc tg $t = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3}$ etc. Huygens n'a peut-être pas eu cette formule ſous les yeux avant ce temps [34]). Le bout de phraſe cité plus

[29]) Fin de la Pièce V.

[30]) Sans se servir de l'expression courte „arc tg t" encore inconnue.

[31]) Mort en 1675. Gregory écrit $a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4}$ etc. Chez Huygens le rayon $r = 1$. On sait que la tangente t au dix-septième siècle est une longueur, non pas un rapport de deux longueurs.

[32]) T. IX, p. 534.

[33]) Voyez la Pièce III qui suit.

[34]) Aux p. 178 et 179 des „Acta Eruditorum" de 1691 Leibniz écrit (dans son article „Quadratura Arithmetica communis Sectionum Conicarum quæ centrum habent, indeque ducta Trigonometria Canonica ad quantamcunque in numeris exactitudinem à Tabularum necessitate liberata: cum usu speciali ad lineam Rhomborum nauticam, aptatumque illi planisphærium"): „Jam anno 1675 compositum habebam Opusculum Quadraturæ Arithmeticæ amicis ab illo tempore lectum ... in Opusculo nostro inedito *nec ipsi* [Hugenio] *visum* [nous soulignons], inter alias propositiones... etc." Il est vrai qu'en 1679 (T. VIII, p. 219) Leibniz écrit à Huygens des „choses qui appartiennent à l'Academie et particulierement ma Quadrature Arithmetique dont j'ay laisse meme le M.S. à Paris". Mais dans sa réponse de novembre 1679 (T. VIII, p. 244) Huygens parle de „cette Quadrature Arithmetique" comme d'une chose qui lui est inconnue. En 1682 (T. VIII, p. 403) P. van Gent écrit à Huygens, si nous le comprenons bien, que Tschirnhaus, chargé de rapporter le manuscrit en Allemagne, l'aurait perdu en route. S'il en a été ainsi, on n'a pas manqué de le retrouver, puisqu'on le possède encore à Hannovre.

haut „ad fectores quofvis [fecteurs de cercle], quod nefcio an ille [Leibniz] animadverterit" eft écrit *en marge* à la fuite d'une confidération géométrique de 1689 d'où Huygens peut déduire la formule générale de l'arc tangente. Nous ignorons fi cette remarque écrite en marge date de 1689 ou de 1691. Il en eft de même d'une autre remarque fur le même fujet, également écrite en marge (fin du § 3 de la Pièce V), où Huygens renvoie à la page ultérieure, datant de 1691, du Manufcrit G où fe trouve la férie arc tg $t =$ etc. Il eft évident que ce renvoi ne peut en tout cas pas être antérieur à 1691. Nous inclinons à croire que les *deux* remarques marginales datent de cette année. Dans ce cas le „nefcio an animadverterit" ne fe rapporte pas à un doute fur la connaiffance de Leibniz de la formule générale (nous parlons toujours du cercle), mais au fait que Leibniz peut ne pas avoir fu qu'elle peut être démontrée de la façon que Huygens indique.

La démonftration de Huygens revient à ceci. Il favait depuis 1674 qu'une certaine aire comprife entre trois droites et la courbe à équation $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}$ (la „verfiera", comme on dira plus tard) eft égale à un cercle de rayon $\frac{1}{2}a$ et peut d'autre part f'exprimer par $a^2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \text{ etc.}\right)$, d'où réfulte la formule de Leibniz. En 1689 il découvre qu'en calculant une aire moins étendue également limitée par trois droites et par la verfiera on obtient la furface d'un *fecteur* du même cercle. Or, cette aire peut auffi être exprimée par une férie analogue à la précédente. D'où réfulte la formule générale qu'il aurait pu déduire en 1689 mais qu'il n'a peut-être déduite en effet qu'en 1691.

Huygens dit que fa „progreffio optima" eft „fimplicior ac commodior" que la „progreffio Newtoniana". Il f'agit fans doute de la formule de Newton de la p. 392 qui fuit: arc AB [Fig. 57] $= d^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}}$ etc., où d eft le diamètre du cercle confidéré et x la flèche AD de la Fig. 57 [35]); formule dont Huygens peut avoir caufé avec Fatio de Duillier lorfque celui-ci le vifita en février 1691 — voyez la p. 396 qui fuit — puifque Fatio lui écrit en décembre 1691 [35]), en citant l'„Algebra de Mr. Wallis", en avoir trouvé la démonftration [36]).

---

[35]) T. X, p. 215 et note 6 de cette page.

[36]) Cette formule de Newton se trouve aux p. 297 et 324 du T. I de „I. Newtoni Opera" éd. S. Horsley, 1779 („Excerptum IV ex epistolâ Newtoni ad Oldenburgum primâ. De Problematis per Series Infinitas Resolvendis").

Nous n'avons pas de Pièce de 1666 ou poſtérieure à cette année qui traite ſpécialement de la triſection de l'angle.

Au ſujet du problème déliaque (Pièce VII) on pourrait ſe demander, en ayant égard à la première partie du préſent Tome, ſi Huygens ne l'a pas parfois conſidéré dans un rapport étroit avec l'interpolation de tons dans l'échelle muſicale. Il faut répondre à cette queſtion qu'il ſ'eſt borné à chercher des ſolutions géométriques, naturellement en faiſant uſage d'algèbre. Dans l'antiquité auſſi, malgré le rapport étroit exiſtant ſelon pluſieurs entre la mathématique et la muſique — on peut conſulter l'ouvrage de Théon de Smyrne, cité plus haut [37]) — ce problème, ſi nous nous en tenons aux textes, paraît avoir été conſidéré comme eſſentiellement de nature géométrique. Huygens n'a recours aux logarithmes que lorſque le nombre de termes à interpoler, ſoit en muſique, ſoit dans d'autres cas pratiques (voyez la p. 294 qui précède), devient plus grand.

---

[37]) P. 5, 10, 11, 177 et 180. Soit dit en passant: nous ne citons dans ce Tome que l'édition fragmentaire de Boulliau, la seule qui existât au dix-septième siècle.

LES TROIS GRANDS PROBLÈMES DE L'ANTIQUITÉ.

I. Huygens et Hobbes (1666).

II. Une quadrature approchée du cercle (1668).

III. Le développement du „numerus impossibilis" (π) en série par Leibniz (1674).

IV. Du livre de Wallis, Historia Algebrae anglicè [1]). Développement du „numerus impossibilis" (π) en une fraction continue (1686 ou 1687).

V. Progressio optima ad quadrandum circulum ac non tantum Leibnitiana multo citius appropinquans sed et Newtonianam post se relinquens, simpliciorque ea ac commodior[1]) (1691 et 1689).

VI. Huygens et Hubertus Huighens (1692).

VII. Investigatio duarum mediarum [1]).

[1]) C'est ainsi que Huygens lui-même intitule cette Pièce.

I.

HUYGENS ET HOBBES.

1666.

À la p. 13 qui précède (Pièce III: la compofition ou addition des rapports) nous avons fait ressortir que Huygens eft de l'avis de Hobbes, et non pas de celui de Wallis, dans la queftion de favoir s'il faut confidérer les „quantitates rationum" comme des *nombres* entiers ou fractionnaires.

Que perfonne n'en tire la conclufion que Huygens faifait grand cas de Hobbes mathématicien. Sa „Cenfura" de 1662, citée à la p. 13, du livre de Hobbes de la même année traitant e.a. de la duplication du cube et de la quadrature du cercle [1]) fait bien voir que les démonftrations vicieufes de Hobbes qui croyait être en état de réfoudre ces fameux problèmes ne lui femblaient nullement intéreffantes.

En 1666 Hobbes publia un traité „De principiis et ratiocinatione geometrarum, ubi oftenditur incertitudinem falfitatemque non minorem ineffe fcriptis eorum, quam fcriptis Phyficorum & Ethicorum, Contra faftum profefforum geometriæ" qui contient e.a. un chapitre XXI „De Magnitudine Circuli Hugeniana", où il fait au traité de Huygens de 1654 des objections qui ne tiennent pas debout; Huygens y eft dit „deceptus", „falfò ufus principio hoc, punctum effe nihil", ce que Huygens avance „confirmat id quod refutare voluit" etc. Déjà en 1662 Huygens écrivait (T. IV, p. 274): Je crains fort que la chofe ne foit defefperée, et luy au nombre des incurables.

---

[1]) „Problemata Physica una cum Magnitudine Circuli", London.

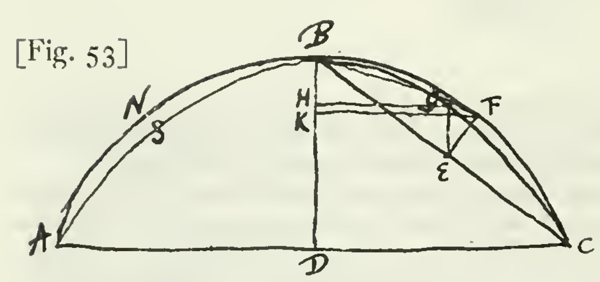
[2]) Voyez aussi sur Wallis et Hobbes la p. 258 qui précède. Nous y avons cité un écrit de 1657 de Wallis; en effet, Hobbes avait déjà traité de la duplication du cube dans son „De corpore" de 1655 et ailleurs. En 1660 Hobbes publia son „Examinatio et emendatio mathematicæ hodiernæ, qualis explicatur in libris Johannis Wallisii Geometriæ Professoris Saviliani in Academia Oxoniensi, distributa in sex dialogos". C'est le premier de ces dialogues que nous avons cité à la p. 13. La „Quadratura circuli, cubatio sphæræ, duplicatio cubi" de Hobbes parut en 1669. Le deuxième volume (de 1670?) des Oeuvres de Hobbes (le premier est intitulé: „Thomæ Hobbes Malmesburiensis Opera philosophica quæ latinè scripsit omnia", etc. I. Blaeu, Amsterdam, 1668, le second — exemplaire de la Bibliothèque de l'Université de Leiden — n'a aucun titre, et n'est pas daté) contient cette „Quadratura circuli etc. una cum responsione ad objectiones geometriæ professoris Saviliani Oxoniæ editas anno 1669". En effet, Wallis avait publié le 3 juin de cette année à Oxford la brochure: „Thomæ Hobbes quadratura circuli . . . etc. . . confutata" qui commence par les mots: „Accepi per Veredarium hesterna nocte, Hobbii Schediasma novum, solitis refertum nugis". Hobbes revenait toujours à la charge et Wallis ne cessa qu'en 1671 de lui répondre. Voyez encore sur ce sujet les p. 1 et 93 (note 21) du T. VII.

II.

UNE QUADRATURE APPROCHÉE DU CERCLE [1]).

Octobre 1668.

[Fig. 53]



Prop. 1.

ABC [Fig. 53] portio circuli. ASBGC parabolæ portio eandem basin et eundem verticem habens. BC bifariam secta in E. EF perpendicularis BC. EG parallela BD. Duæ FK, GH parallelæ DC. Dico BK majorem esse quam BH.

Jungatur BF. Ergo BK ad BD ut qu. BF ad qu. BC. Sed qu. BF magis est quam $\frac{1}{4}$ qu. BC. Ergo et BK major quam $\frac{1}{4}$ BD. Sed BH, propter parabolam est æqualis $\frac{1}{4}$ BD. Ergo BK major quam BH. quod erat demonstrandum.

Prop. 2.

Iisdem positis dico residuorum ANBS, BFCG centrum gravitatis minus abesse à puncto D quam punctum H.

Cum enim portionis parabolicæ BECG centrum gravitatis sit in diametro ejus GE, centrum vero gravitatis portionis circularis BECF sit in diametro ejus EF. necesse est centrum gravitatis residui BGCF esse ad eam partem rectæ EF quæ versus C. Sed non potest esse extra ambitum BECF. Ergo erit intra ambitum EFC, ac proinde minus distabit a basi DC quam punctum F. Ac proinde minus utique quam punctum G vel H. Quare et recta residuorum BFCG, BNAS centra gravitatis conjungens secabit diametrum BD inter H et D. quod erat demonstrandum.

Prop. 3.

ABC [Fig. 54] circuli portio, cujus diameter BD. circuli centrum M, diameter BL [2]). DR ∞ $\frac{2}{5}$ BD. Per 18 nostr. de Circ. Magn.[3]) si fiat

[Fig. 54]

[1]) La Pièce est empruntée aux p. 61-64 du Manusc. D. Les pages 63 et 65 portent resp. les dates 9 et 16 Oct.

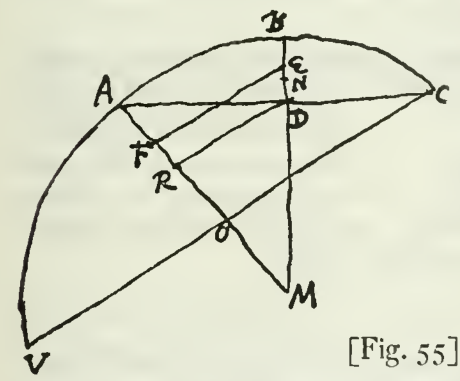
[2]) Nous omettons les mots qui suivent dans le Manusc.: Sit MD ∞ MB ∞ *b* [sic]. Les lignes suivantes du texte font voir que Huygens a pris MD $=$ *a* et MB $=$ *c*.

[3]) Theor. XV. Prop. XVIII, p. 167 du T. XII.

ut MR ad $\frac{2}{3}$ DL ita BD ad aliam, ea erit

$\frac{3}{5}a + \frac{2}{5}c$ ——	$\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}c$ ——	$c - a$ // $\frac{10cc - 10aa}{9a + 6c}$	altitudo trianguli majoris portione circ. ABC.
$3a + 2c$ ——	$\frac{10}{3}a + \frac{10}{3}c$	s.	
$9a + 9c$ ——	$10a + 10c$	$\frac{4}{3}c - \frac{4}{3}a$	altitudo trianguli æqualis parabolæ ASBGC.
		Rel. $\frac{2\text{qu. } c - a}{9a + 6c}$	majus altitudine trianguli æqualis refiduo inter portiones parabolæ et circuli.

Jam quia $\frac{10cc - 10aa}{9a + 6c}$ majorem rationem habet ad $\frac{4}{3}c - \frac{4}{3}a$ quam portio circuli ABC ad portionem parabolæ ASBGC: per converfionem rationis habebit $\frac{10cc - 10aa}{9a + 6c}$ ad $\frac{2\text{ qu. } c - a}{9a + 6c}$ minorem rationem quam portio circuli ABC ad refiduam BGCF, BSAH. Sit BQ ∞ $\frac{1}{4}$ BD. Ergo quia RD ∞ $\frac{2}{5}$ BD, ablatis utrifque BQ et RD, quæ faciunt $\frac{13}{20}$ BD, ab BD, relinquitur QR ∞ $\frac{7}{20}$BD, five $\frac{7}{20}c - \frac{7}{20}a$. Eft autem Q altius quam centrum gravitatis refiduorum BFCG: R vero centrum gravitatis parabolæ ASBGC. Ergo QR major quam diftantia inter centra gravitatis parabolæ et dictorum refiduorum. Quare fi fiat ut $\frac{10cc - 10aa}{9a + 6c}$ ad $\frac{2\text{qu. } c - a}{9a + 6c}$ ita QR, $\frac{7}{20}c - \frac{7}{20}a$ ad aliam RN $\frac{7\text{qu. } c - a}{100c + 100a}$ erit jam RN major quam diftantia inter centra gravitatis portionis parabolicæ et portionis circularis ABC. Adeoque N punctum altius centro gravitatis portionis circuli ABC. Quod fi vero ad RN ∞ $\frac{7\text{ qu. } c - a}{100c + 100a}$ addatur DR ∞ $\frac{2}{5}c - \frac{2}{5}a$, fiet DN ∞ $\frac{47cc - 14ac - 33aa}{100c + 100a}$.



[Fig. 55]

Prop. 4.

Sit VAC [Fig. 55] circuli portio cujus diameter AO. Et ducta fit AC. Et portionis ABCD fit diameter BD. Et fumatur diametri AO pars AF ∞ $\frac{2}{5}$ AO. ducaturque FE bafi OC parallela quæ diametro BD occurrat in E. Dico punctum E magis diftare ab D quod bafin AC bifecat quam centrum gravitatis portionis ABCD.

Sit enim DR parallela EF; et concurrant productæ AO, BD in M, quod erit centrum circuli VABC. Et fit MD ∞ a, MB ∞ c, AD ∞ d.

Ergo ut MA ad AD ita DA AR

$$c \text{———} d \text{———} d \;\Big|\; \frac{dd}{c}$$

Sed quia AF ∞ $\frac{2}{5}$ AO erit inde AF ∞ $\frac{4}{5}$ AR, ideoque FR ∞ $\frac{1}{5}$ AR, hoc eſt FR ∞ $\frac{1}{5}\frac{dd}{c}$. Ut autem RM ad MD, hoc eſt ut MD ad MA ita FR ad DE.

Ergo ut MD ad MA ita FR DE

$$a \text{———} c \text{———} \tfrac{1}{5}\frac{dd}{c} \;\Big|\; \tfrac{1}{5}\frac{dd}{a} \text{ hoc eſt } \frac{\frac{1}{5}cc - \frac{1}{5}aa}{a}.$$

Sit jam in diametro BD inventum punctum N ſicut in propoſitione præcedenti. altius nempe centro gravitatis portionis ABCD. Itaque cum MD ſit a, MB, c, erit

$$DN \infty \frac{47cc - 14ac - 33aa}{100c + 100a}.$$

At DE eſt $\frac{\frac{1}{5}cc - \frac{1}{5}aa}{a}$. Dico autem DN minorem eſſe quam DE. Si enim DN non minor quam DE,

eſſet $47cc - 14ac - 33aa$ non minor $\frac{20c^3 - 20aac + 20acc - 20a^3}{a}$

Eſſet $47acc - 14aac - 33a^3$ non minor $20c^3 - 20aac + 20acc - 20a^3$

Eſſet $27acc + 6aac$ non minor $20c^3 + 13a^3$.

Atqui eſt minor, cum c ſit major quam a. Sit enim $c \infty a + y$, fit

$27acc + 6aac \longrightarrow 27a^3 + 54aay + 27ayy + 6a^3 + 6aay$.

Et $20c^3 + 13a^3 \longrightarrow 20a^3 + 60aay + 60ayy + 20y^3 + 13a^3$.

Atqui $33a^3 + 60aay + 27ayy$ minor eſt quam $33a^3 + 60aay + 60ayy + 20y^3$

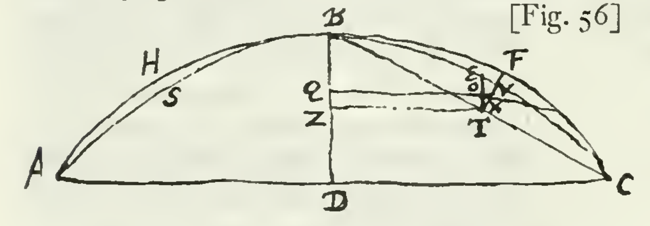
nam 0 minor quam $33ay + 20y^3$.

Eſt igitur DN minor quam DE, ac proinde punctum E ulterius diſtat à baſi AC quam centrum gravitatis portionis ABC, cum etiam N amplius diſtet.

Prop. 5 [4]).

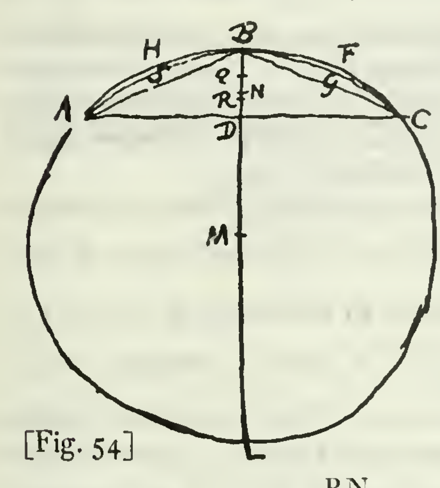
ABC [Fig. 56] portio circuli, cujus diameter BD, intra quam parabola deſcripta eſt ASBEC. Sit BQ ∞ $\frac{2}{5}$ BD. Dico reſiduorum AHBS, BFCE centrum gravitatis quod eſt in diametro BD ulterius diſtare a vertice B quam punctum Q.

[Fig. 56]



[4]) Huygens écrit par ereur: Prop. 6 (et de même Prop. 7 pour la proposition suivante).

Ducatur enim QOV parallela basi AC, et occurrat diametro portionis parabolicæ BECT, quæ sit TE, in O, et diametro portionis circuli BFCT, quæ sit TF, in V. Et sit TZ parallela quoque AC. Quia ergo BQ ∞ $\frac{2}{5}$ BD, hoc est ∞ $\frac{4}{5}$ BZ, erit QZ ∞ $\frac{1}{5}$ BZ. Sed ET propter parabolam, est dimidiæ BZ æqualis. Ergo QZ ∞ $\frac{2}{5}$ ET. Ideoque O centrum gravitatis erit portionis parabolicæ BECT. Atqui recta QOV ulterius distat a basi AC quam centrum gravitatis portionis circuli BFCT. Ergo portionis hujus centrum gravitatis cadet necessario inter puncta V et T, puta in X. Et centrum gravitatis residui BFCE, cadet in recta OX producta versus X. adeoque minus distabit a basi AC quam recta VQ; eademque ratione centrum gravitatis residui AHBS. Quare utriusque centrum gravitatis commune minus distabit à basi AC sive ulterius à vertice B, quam punctum Q, quod erat demonstrandum.



[Fig. 54]

Prop. 6.

Repetatur figura prop. 3 [Fig. 54] atque etiam argumentatio eadem usque ad determinationem longitudinis BQ, quæ hic ponatur $\frac{2}{5}$ BD. Unde sic porro dicemus. RD est similiter $\frac{2}{5}$ BD, cum R sit centrum gravitatis portionis parabolicæ ASBGC. Ergo restabit QR ∞ $\frac{1}{5}$ BD. Est autem Q altius quam centrum gravitatis residuorum AHBS, BFCG; ideoque QR major intervallo inter hoc centrum gravitatis et centrum gravitatis portionis parabolicæ ASBGC. Quare si fiat

$$\text{ut}\ \frac{10cc - 10aa}{9a+6c}\ \text{ad}\ \frac{2\,\text{qu. } c-a}{9a+6c}$$

$$\text{ita}\ \overset{QR}{\tfrac{1}{5}c - \tfrac{1}{5}a}\ \Big/\ \overset{RN}{\tfrac{1}{25}\,\frac{\text{qu. } c-a}{c+a}}$$

erit N punctum altius quam centrum gravitatis portionis circuli ABC.

Est autem RD ∞ $\frac{2}{5}c - \frac{2}{5}a$ et DM ∞ a. Ideoque RM ∞ $\frac{2}{5}c + \frac{3}{5}a$. cui si addatur RN ∞ $\frac{1}{25}\frac{\text{qu. } c-a}{c+a}$, fit NM ∞ $\frac{2}{5}c + \frac{3}{5}a + \frac{1}{25}\frac{\text{qu. } c-a}{c+a}$. Jam rursus per 18 de Circ. Magn. si fiat

ut MN ad $\frac{2}{3}$ LD ita BD ad aliam,

$$\tfrac{2}{5}c + \tfrac{3}{5}a + \tfrac{1}{25}\frac{\text{qu. } c-a}{c+a} \ \text{———}\ \tfrac{2}{3}c + \tfrac{2}{3}a \ \text{———}\ c - a \ \Big/\ \frac{10cc - 10aa}{6c + 9a + \tfrac{3}{5}\frac{\text{qu. } c-a}{c+a}}$$

$$6c + 9a + \tfrac{3}{5}\frac{\text{qu. } c-a}{c+a} \ \text{———}\ 10c + 10a$$

ea erit minor altitudine trianguli super AC, quod portioni ABC sit æquale. quia MN est major ea quæ a centro circuli ad portionis centrum gravitatis pertingit.

Hæc autem ad arcuum longitudinem inveniendam transferuntur ut in prop. 19 de

Circ. Magn.[5]). Adeoque si sinus arcus alicujus sit a, subtensa ejusdem c, erit arcus longitudo minor quam $a + \frac{10cc - 10aa}{6c + 9a}$, major autem quam $a + \frac{10cc - 10aa}{6c + 9a + \frac{3}{5}\frac{\text{qu. } c - a}{c + a}}$.

Ergo ad arcus propositi longitudinem inveniendam, fiat ut sexcupla subtensa cum noncuplo sinu, (quæ linea composita vocetur N) ad summam sinus subtensæque ita eorum differentia ad aliam, cujus decupla addatur sinui, habebiturque arcus longitudo vera major. Si vero linea N augeatur tribus quintis lineolæ quæ sit tertia proportionalis summæ et differentiæ dictæ, fiet, eadem faciendo, longitudo arcus vera minor.

Quanta autem in numerorum characteribus horum terminorum possit esse differentia, simili ratione ac pag. 9 hujus[6]) ostendemus. Nempe si in a et c primus characterum triens sit idem, differentia terminorum, inter quos arcus longitudo consistit, nunquam plurium quam unius erit characteris. Sæpe vero ne unius quidem, sed fractio tantum cujus numerator unum, denominator quinque characteres habebit.

Est enim additiuncula quæ ad a apponitur, in majori termino ad eam quæ in minori ut $6c + 9a + \frac{3}{5}\frac{\text{qu. } c - a}{c + a}$ ad $6c + 9a$. Ac proinde erit additiuncula major ad differentiam utriusque (quæ eadem etiam terminorum est differentia) ut $6c + 9a + \frac{3}{5}\frac{\text{qu. } c - a}{c + a}$ ad $\frac{3}{5}\frac{\text{qu. } c - a}{c + a}$. sive ut $\overline{6c + 9a}$ in $\overline{c + a} + \frac{3}{5}$ qu. $c - a$ ad $\frac{3}{5}$ qu. $c - a$.

Ponatur numerus characterum similium in a et c ∞ s. Ergo tam a quam c habebit characteres $3s$. atqui $6c + 9a$ majores sunt quam $10a$. Ergo $6c + 9a$ habebit characteres non pauciores quam $3s + 1$. Ergo et $6c + 9a + \frac{3}{5}\frac{\text{qu. } c - a}{c + a}$ non pauciores habebit quam $3s + 1$. Sed $c + a$ non habet pauciores quam $3s$. Ergo $6c + 9a$ in $c + a$, non habebit pauciores quam $6s$, per theor. 1 pag. 5[7]). Rursus quia $c - a$ non plures habet quam $2s$, habebit qu. $c - a$ non plures quam $4s$.

Est itaque ut numerus constans characteribus non paucioribus quam $6s$ ad $\frac{3}{5}$ numeri constantis characteribus non pluribus quam $4s$, ita additiuncula major ad differentiam majoris et minoris termini. Ista vero additiuncula non est major quam $\frac{2}{3}c - \frac{2}{3}a$, cum

---

[5]) Theor. XVI, Prop. XIX, p. 169 du T. XII.

[6]) Les pages du Manuscrit D qui sont indiquées aujourd'hui par les n°s 40—65, ont été numérotées 1—26 par Huygens. Sa pag. 9 correspond à la p. 48 où se trouve le début de ce que nous avons appelé plus haut (p. 316) „Appendice IV à la Pièce VI de la p. 259 (Insuffisance de la démonstration de Gregory de l'impossibilité de la quadrature du cercle, 1668)".

[7]) Voyez la p. 313 qui précède.

vix ſit major quam $\frac{4}{3}c - \frac{4}{3}a$, ideoque non plures characteres habet quam $\frac{5}{3}$ numeri conſtantis non pluribus quam $2s$ characteribus. Ergo ad inveniendam terminorum differentiam oportet ducere $\frac{3}{5}$ numeri non pluribus conſtantis characteribus quam $4s$, in $\frac{5}{3}$ numeri non plures habentis quam $2s$. unde orietur numerus non pluribus conſtans quam $6s$, cum ſractiones altera alteram tollant. Et hoc productum dividendum per numerum non pauciores habentem quam $6s$. unde quotiens, hoc eſt differentia terminorum dicta non plures uno habebit characteres.

Quod ſi vero a initialem characterem habeat ſupra 5. et $c - a$ habeat initialem 1; jam $6c + 9a$ in $c + a$ habebit ſaltem characteres $6s + 3$. Et qu. $c - a$ non plures quam $4s - 1$. eoque ducto in $c - a$, productum non plures quam $6s - 2$: quo diviſo itaque per $6s + 3$, fiet fractio cujus denominator ſuperabit numeratorem quinque characteribus, unde minor utique erit quam $\frac{1}{10000}$.

Notandum porro minorem terminum ſemper aliquanto accuratiorem fore majore. ut ſi c ſit latus 60anguli a $\frac{1}{2}$ lateris 30anguli, ſit major terminus circumferentiæ

totius	314159265 3775
minor autem	314159265 3565
cum verus ſit	314159265 3589.

III.

LE DÉVELOPPEMENT DU „NUMERUS IMPOSSIBILIS" [1]) (π) EN SÉRIE PAR LEIBNIZ.

[1674]

Leibnitzij quadratura [2]). quadratum eſt ad circulum ſibi inſcriptum ut

1 ad $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c in infinitum.

1 ad $\frac{2}{3} + \frac{2}{35} + \frac{2}{99} + \frac{2}{195}$ minor terminus

1 ad $1 - \frac{2}{15} - \frac{2}{63} - \frac{2}{143}$ major terminus

Si major terminus auferatur ab unitate, hoc eſt ſi circulus auferatur a circumſcripto quadrato, et reſiduum addatur minori termino, fiet rurſus quadratum circumſcriptum hoc eſt unitas.

$1 \infty \frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} + \frac{2}{99}$ &c.

ergo $\frac{1}{2} \infty \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99}$ &c.

Ayant appris de Leibniz cette „quadrature arithmétique" Huygens écrivit le 7 novembre 1674 (T. VII, p. 394): il ne paroiſtra pas impoſſible de donner la ſomme de cette progreſſion ni par conſequent la quadrature du cercle. Une des méthodes par leſquelles Archimède avait déterminé la ſurface d'un ſecteur de parabole, n'avait-elle pas été la ſommation des termes d'une ſérie?

Voyez encore sur le manuscrit de Leibniz „de quadratura arithmetica circuli, ellipſeos et hyperbolæ etc." datant du temps de ſon ſéjour à Paris, plus préciſément de 1675, la p. 214 (note 6) du T. VIII, ainſi que la p. 160 (note 15) du T. X. Leibniz déclare en 1691 ne pas avoir montré ce manuſcrit à Huygens: voyez la note 34 de la p. 375 qui précède.

Le théorème fut publié par Leibniz en 1682 dans le T. I des „Acta Eruditorum" dans ſon article „De vera proportione Circuli ad Quadratum circumſcriptum in Numeris rationalibus". Il en avait fait part à Oldenburg déjà en 1674.

Voyez auſſi ſur cette quadrature de Leibniz la Pièce V qui ſuit.

---

[1]) Voyez sur ce terme la l. 4 de la p. 373 qui précède.

[2]) La Pièce est empruntée à la f. 27 des Chartæ mathematicæ; voyez aussi sur cette feuille la p. 149 (note 12 de la p. 147) du T. XIX où nous avons déterminé sa date. On trouve d'ailleurs au verso l'adresse de Leibniz séjournant en 1674 à Paris: Libnitz [comparez la p. 605 du T. XVIII], Hoſtel des Romains, rue S. Marguerite. Notons encore qu'à la p. 440 du Manuscrit D se trouve la notice: 1673, 30 Dec. preſtè a Libnitz mon livre De Circuli Magnitudine et Gregorius de Vera Circuli quadratura.

IV.

DU LIVRE DE WALLIS, HISTORIA ALGEBRAE ANGLICÈ. DEVELOPPEMENT DU „NUMERUS IMPOSSIBILIS" (π) EN UNE FRACTION CONTINUE.

[1686 ou 1687][1])

Cap. 83. Que la quadrature du cercle ne peut eſtre exprimée par aucune maniere de notation reçuë [2]).

C'eſt a dire ni par raiſon de nombres ni de racines.

Dans ſon Arithmetica infinitorum, prop. 190, il appelle cecy ſententia noſtra aut conjectura [3]). Mais icy il pretend qu'on peut le conclure ſurement. ce que je ne

---

[1]) Manuscrit F, p. 255. Il y a des dates de 1686 avant cette page (à la p. 239 du Manuscrit Huygens discute un article de Leibniz de septembre 1686; voyez la p. 162 du T. XIX), la date 1687 se trouve à la p. 261. Il s'agit du livre mentionné dans le catalogue de vente de 1695 des livres de Huygens: „A Treatise of Algebra both Historical and Practical by John Wallis, London 1685" (Libri Mathem. in Folio, 81). Voyez sur l'édition latine du traité la note 1 de la p. 18 du T. X. Nous le citons d'après le texte latin („Tractatus ... auctus") des „Opera mathematica" (où l'on peut distinguer les additions du texte primitif).

[2]) Cap. 83: „Quadratura Circuli, non designanda secundum ullum antea receptum numeros Notandi modum".

[3]) C'est dans le Scholium appartenant à la Prop. CXC de l'„Arithmetica infinitorum" de 1655 que Wallis s'exprime comme suit: „Et quidem proclivis sum ut credam (quod & ab initio suspicatus sum) rationem illam quam quærimus talem esse ut quæ non poterit numeris exprimi juxta ullum adhuc receptum notationis modum, ne quidem per latera surda; (quale quid instruit Schootenius, de radicibus Aequationum quarundam cubicarum, in ipsius *Appendice* ad tractatum *de Organica Conicarum Sectionum Descriptione*, idque ad mentem Vietæi, Cartesii, & aliorum;) ut necesse videatur aliam ejusmodi rationem explicandi modum introducere, quam vel per numeros veros, vel etiam per recepta latera surda. Atque hæc quidem nostra sive sententia, sive conjectura, hinc confirmari videtur:" Etc.

Wallis cite l'„Appendix, de cubicarum æquationum resolutione" de van Schooten qui suit ses „Commentarii" sur les livres de Descartes dans son Recueil bien connu. Après avoir énoncé la règle dite de Cardan van Schooten parle de „ejus æquationis radices, aliàs numero non explicabiles".

croy pas, et je voudrois qu'il me demontraſt ſeulement que la circonference eſt incommenſurable au diametre.

Cap. 79. Il veut juſtifier ſa maniere de demontrer par Induction dont il ſe ſert dans ſon Arithmetica infinitorum. Mais en vain [ces trois derniers mots ont eté ajoutés après coup] [4]).

Lorſqu'il écrivit la préſente Pièce, Huygens avait ſans doute vu dans les „Acta Eruditorum" de juillet 1686 (p. 360) l'article de deux pages de Jaques Bernoulli, intitulé: „Bernoullii Demonſtratio Rationum, quas habent ſeries numerorum naturali progreſſione ſeſe inſequentium, vel quadratorum, cubicorum, &c. item trigonalium, pyramidalium &c. ad ſeries numerorum totidem maximo æqualium" et commençant par les mots: „Walliſius in Arithmetica infinitorum id ſola inductione inveſtigare docet, cui demonſtrandi modo, cum parum ſcientificus eſt, alium eumque facillimum hic ſubſtituam". Nous pouvons en effet admettre que Huygens avait lu cet article puiſqu'il eſt précédé par un article, également de Bernoulli, qui ſe rapporte à la controverſe entre Huygens et Catelan (le n° X de la note 1 de la p. 457 du T. XVIII) [5]).

---

[4]) Cap. 79 (ou plutôt LXXIX): „D. Fermatij Exceptionibus respondetur". Voyez sur les démonstrations par induction, outre la note suivante, la p. 213 qui précède (avec la note 92).

[5]) Dans son article „Sur l'œuvre mathématique de Blaise Pascal" („Revue des Questions scientifiques", janvier et avril 1924, Louvain, Fr. Ceuterick) H. Bosmans écrit: „L'induction complète [expression dont Bernoulli ne se sert pas encore; il désigne donc le procédé de Wallis non pas par les mots „induction incomplète" mais, on l'a vu, simplement par l'expression „induction", comme le fait aussi Huygens] était une méthode aussi ancienne que la Géométrie elle-même. Les Grecs la connaissaient et l'employaient souvent. Mais, de sa plume magique, Pascal lui donne un tour nouveau, lumineux, simple et alerte, qui est demeuré définitif. — Le lecteur en conclura peut-être, que la nouvelle forme donnée à la méthode de l'induction complète fit aussitôt fortune? — Qu'il ne se hâte pas trop. Elle passa au contraire presqu'inaperçue. Par une de ces bizarreries, dont l'histoire des mathématiques nous offre maint exemple, elle fut même si peu remarquée, que vingt et un an plus tard, dans le cahier de juillet 1686 des Acta Eruditorum, Jaques Bernoulli croyait visiblement l'inventer pour rendre rigoureux un raisonnement par induction incomplète de Wallis".

Citons encore sur ce sujet A. Prag écrivant en 1931 dans son article „John Wallis (1616—1703)" („Quellen und Studien zur Geschichte de Mathematik", Abt. B. Bd. 1, Berlin, J. Springer): „Wallis weiss, dass Induktion in ganzen Zahlen ein Characteristikum arithmetischer Schlussweise ist [observons que Prag sait fort bien que l'induction de Wallis ne se rapporte pas *seulement* aux nombres *entiers* dont il est question dans l'article de Bernoulli; ce n'est pas en dernier lieu d'exposants fractionnaires qu'il s'agit]. Er macht sich Gedanken über die prinzipielle Zulässigkeit solcher Schlüsse ... was Wallis hier sagt ist ... barer Unsinn [?] ... aber das Problem das hinter diesen Ueberlegungen steht ist überaus wichtig ... Darstellung der Funktion durch die Tabelle, die die Zuordnung stark betont ... Sicher gehört in den Bereich funktionaler Betrachtungen dieser zweiten Art die Begründung des Verfahrens der „vollständigen" Induktion. So weit konnte Wallis nicht vordringen".

Cap. 95. Approximationes quafdam Neutoni refert quas cum meis comparat quas in libello de Circuli Magnitudine demonftravi [6]).

[6]) Dans le Cap. 91: „Doctrina Serierum Infinitarum, ulterius à D. Newtono promota" Wallis dit: „Approximationes illæ (in Arithmetica Infinitorum) supra memoratæ (pro Circulo, Ellipsi & Hyperbola) occasionem fecerunt aliis ulterius in eam rem inquirendi; similesque approximationes exquirendi in casibus aliis. Quæ jam dici coeperunt Infinitæ Series, aut Series convergentes, aliisve nominibus tantundem indicantibus. Inter ea quæ ego hoc in genere conspexi: Non alium video qui speculationem hanc subtilius prosecutus est & cum meliori successu, quam Vir Clar. *Isaacus Newton*, Matheseos Professor meritissimus in Celeberrima Academia *Cantabrigiensi*. Qui circa annum (ut conjicio) 1664 aut 1665 speculationem hanc magna sagacitate prosecutus est (sed eam per aliquot annos ad alia studia avocatus intermiserat speculationem). Quod innotuit mihi ex duabus Epistolis ab eo ad Clar. Virum D. Henricum Oldenburgium (Regiæ Societatis Londinensis tum Secretarium) ea de re scriptis (13 Junii & 24 Augusti anni 1676), Societati Regiæ Communicandis, quas inde mihi impertivit Oldenburgius; ingenue quidem scriptas & luce publica dignissimas". Etc.

Nous avons déjà dit dans l'Avertissement (p. 374) qu'Oldenburg envoya aussi des copies de ces deux lettres de Newton à Leibniz. On les trouve aux p. 179 et 203, n°s XLIII et XLV, du recueil „Der Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern", éd. C. I. Gerhardt, I, Berlin, Mayer & Müller 1899, d'après les manuscrits conservés dans la Bibliothèque Royale de Hannovre. La date de la deuxième lettre n'est pas le 24 août, date que Wallis donne aussi dans la Préface du T. I de ses „Opera" (ce Tome parut en 1695, deux ans après le T. II), mais le 24 octobre. On voit clairement qu'il ne s'agit pas de deux lettres différentes, du 24 août et du 24 octobre, mais d'une seule lettre, tant par le contenu que par le fait que Wallis écrit plus loin dans la Prop. 95 déjà citée du T. II: „in dicta Epistola Octob. 24. 1676" sans qu'il ait été question d'une nouvelle lettre.

Les citations de Wallis ne sont pas absolument littérales, comme on le constate en les comparant avec le texte de l'édition des oeuvres de Newton par S. Horsley; voyez la note 36 de la p. 376 qui précède.

Cap. 92 et 93. „Hujus Applicatio ad Circulum & Ellipsin". — „Ejusdem Applicatio ad Hyperbolam".

Cap. 94. „Nova Methodus extrahendi Radices tum Simplicium tum Affectarum Æquationum".

Cap. 95. „Exempla hujus Methodi exhibet multa [Newton]. Quorum ego aliquot hic transcribo".

„Exemplum I". Etc.

„Per has methodos; Quando Problema reductum fuerit ad hujusmodi Seriem, infinite continuandam; multæ approximationes, usui commodæ, facile obtineantur [lisez: obtinentur], & labore non magno, quæ alias ægre obtineantur, magno temporis & laboris impendio. Hujus Specimen exhibet in exemplo subjecto, pro Circuli Quadratura; cum illo Clariss. *Christiani Hugenii*, super idem subjectum, comparando.

Exemplum X. Data cujusvis Arcus chorda A, arcusque dimidii chorda B; Invenire arcus longitudinem, proxime. Ponatur arcus $= z$; & circuli radius $= r$: tum per ea quæ supra ostensa sunt habemus (duplum sinum arcus $\frac{1}{2}z$)

Cap. 10 [7]). Il traite de la reduction de fractions en proportions a de moindres nombres. Il dit que quelques uns ont admirè comment Metius estoit tombè sur ces nombres 113 ad 355 qui approchent si fort a la raison du diametre a la circonference

---

$$A = z - \frac{z^3}{4 \times 6rr} + \frac{z^5}{4 \times 4 \times 120r^4} - \&c.$$

Et $$B = \tfrac{1}{2}z - \frac{z^3}{2 \times 16 \times 6rr} + \frac{z^5}{2 \times 16 \times 16 \times 120r^4} - \&c.$$

Tum multiplica B in n (numerum fictitium) & ex Producto deme A: & Residui secundum terminum $-\frac{nz^3}{2 \times 16 \times 6rr} + \frac{z^3}{4 \times 6rr}$ (quo evanescat) pone ∞ o. Unde prodibit $n = 8$, & $8B - A = 3z - \frac{3z^5}{64 \times 120r^4}$: Hoc est $\frac{8B - A}{3} = z$, proxime. Quippe Error (in excessu [l'édition „Isaaci Newtoni Opera quæ exstant omnia" de 1779 de Samuel Horsley observe, T. I, p. 323: „In defectu potius, sicut rectè statuit Hugenius"]) non major est quam $\frac{z^5}{7680r^4}$ - &c. Estque idem cum illo *Hugenii* Theoremate.

Il s'agit de la Prop. VII de „De Circuli Magnitudine inventa" (T. XII, p. 133).

Exemplum XI. Item. *In arcus* Bb [Fig. 57] *sinu verso* AD *indefinite producto, invenire punctum* G, *unde ductæ rectæ* GB, Gb *abscindant (in Tangente* Ee) *arcui æqualem proxime.* Esto Circuli centrum C, Diameter AK $= d$; & sinus versus AD $= x$. Tum est DB ($= \sqrt{\,}: dx - xx :$)

$$= d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16d^{\frac{5}{2}}} - \&c.$$

[Fig. 57].

Et AE ($=$ AB)

$$= d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{2}{5}}} + \&c.$$

Et AE — BD. AD :: AE. AG. Adeoque

$$AG = \frac{3}{2}d - \frac{1}{5}x - \frac{12xx}{157d} \pm \&c.$$

Ponamus ergo AG $\infty\ \frac{3}{2}d - \frac{1}{5}x$.

Eritque iterum, DG $\left(= \frac{3}{2}d - \frac{6}{5}x\right)$. DB :: DA. AE — DB.

Ergo $$AE - DB = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3d^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{3}{2}}} + \frac{23x^{\frac{7}{2}}}{300d^{\frac{5}{2}}} + \&c.$$

Adde DB; eritque

$$AE = d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{17x^{\frac{7}{2}}}{1200d^{\frac{5}{2}}} + \&c.$$

Deme hoc ex valore AE prius invento; Residuum est error $\frac{16x^{\frac{7}{2}}}{525d^{\frac{5}{2}}} \pm$ &c.

du cercle. Qu'un d[r]. Davenant luy avoit proposè ce probleme en 1663 et qu'il luy a envoiè un traitè de cette matiere qui a eſtè imprimè par maniere d'appendix derriere les ouvrages poſthumes d'Horrocks. Mais je ne trouve point la ce traitè [8]).

Il propoſe le Theoreme ainſi. Eſtant donnè une fraction en proportion, trouver une qui en approche autant qu'il eſt poſſible de faire en des nombres qui n'excedent point un nombre donnè, et dans les plus petits termes.

Sa methode eſt bien longue par de continuelles additions et differe beaucoup de celle dont je me ſuis ſervi [9]) a trouver les nombres des dents de mes roues du Planetologe. Il l'applique, comme moy, a chercher la proportion prochaine du diametre a la circonference et trouve par ſes additions les nombres de 7 a 22, de 133 a 355, de 33215 a 104348 (leſquels derniers ſelon moy ne ſont pas des bons). Puis 364913 a

---

Ergo in AG, sumptis AH $= \frac{1}{5}$ DA, & KG = HC, Rectæ GBE, Gbc abscindent Ee proxime æqualem arcui Bab. Quippe error non major est quam $\frac{16x^3}{525d^3}\sqrt{dx}$ [lisez: $2.\frac{16x^3}{225d^3}\sqrt{dx}$, texte de Gerhardt] $\pm$ &c. Qui multo minor est quam Hugenii".
(Etc. Cet „Exemplum", comme le précédent, est emprunté à la lettre de Newton de juin 1676).

Nous trouvons en effet que lorsque l'arc BAb est la huitième partie de la circonférence, de sorte que $x = r\,[1 - \cos. 22\tfrac{1}{2}°] = pr$, où $r = \tfrac{1}{2}d$, l'erreur de Newton $f = \frac{4\sqrt{2}}{525}p^{\frac{7}{2}}r$ (en ne tenant compte que de ce premier terme) a la valeur 0,00000083 r. Quant à l'erreur de Huygens, d'après le Probl. IV, Propos. XX de „De circuli magnitudine inventa", où il considère le cas de l'arc dont nous venons de parler, il est de 0,0000097 r (donc 11 ou 12 fois plus grand), vu que son „terminus minor accuratior" — chez Newton il s'agit également d'un terminus minor — est égal à 0,7853885 r et que $\tfrac{1}{4}\pi r = 0{,}7853982\ r$.

[7]) Cap. 10: „De Fractionum & Rationum Reductione ad minores terminos servato quam potest proxime valore".

[8]) Wallis parle en effet dans le sens indiqué de „Edwardus Davenant, S. Theologiæ Doctor, & Ecclesiæ *Sarisburiensis* tum Canonicus Residentiarius; magnæ eruditionis & modestiæ Vir, & in rebus Mathematicis sedulus, earumque bene gnarus", etc. .. Problema. Cujus solutionem (ante plures annos) ad ipsum [Davenant] misi; eamque subjunxi Schediasmatis quibusdam posthumis *Jeremiæ Horroccii*, quæ meæ curæ commendarunt *Societas Regia Londonensis*, in ordinem digerenda & edenda". Huygens possédait apparemment la première édition, celle de 1673, des „Opera Posthuma" de Horrocks (T. V, p. 41, note 12) et non pas la deuxième de 1678 (T. V, p. 73, note 8) qui contient vers la fin un chapitre „De rationum et fractionum reductione". Le catalogue de vente de 1695 des livres de Huygens mentionne en effet l'édition de 1673 (Libri Mathematici in Quarto, 92).

[9]) On trouve déjà des fractions continues, servant au calcul des nombres des dents de différents rouages, aux p. 13 et suiv., datant de 1680, du Manuscrit F où Huygens traite de la *Terræ et Mercurij periodorum proportio*, etc.

1146408 [10]). 1725033 a 5419351 et pluſieurs autres en ſuite. Il nomme ces nombres incrementa. item 52746197 a 165707065.

Il ſe propoſe auſſi cette proportion, 2684769 a 8376571, pour trouver la plus prochaine majeure ou mineure qui ſe puiſſe exprimer en nombres qui n'ayent que trois chifres. Et il conclut que la fraction $\frac{25}{78}$ eſt la plus prochaine majeure et $\frac{308}{961}$ la plus prochaine mineure ce qui eſt vray.

Huygens cite le livre de Wallis déjà à la p. 252 du Manuſcrit F et calcule enſuite diverſes fractions continues [9]). Notons que Brouncker avait réuſſi à développer en une fraction continue la formule de Wallis pour $\frac{4}{\pi}$ (p. 373 qui précède) ce dont Wallis traite dans ſon livre de 1685. A la p. 256 du Manuſcrit F ſe trouve pour le rapport de la circonférence du cercle au diametre (notre nombre π) la valeur

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{14\,.\,.}}}}}}}}}}}}$$

Huygens calcule même encore les dénominateurs ſuivants 2, 1, 1, 2, 2, 1. Sa „Deſcriptio Automati Planetarii" (dans la préſente Pièce il donne à cette conſtruction le nom de „Planetologe") auquel ce calcul était deſtiné — nous la publierons dans le Tome ſuivant — ne parut qu'en 1703 dans les „Opuſcula poſtuma". Il n'a pas jugé néceſſaire de publier ſéparément la préſente approximation du „numerus impoſſibilis".

---

[10]) Et avant ceux-ci les nombres 99532 et 312689 que Huygens mentionne à la p. 253 du Manuſcrit F.

V.

PROGRESSIO OPTIMA AD QUADRANDUM CIRCULUM AC NON TANTUM LEIBNITIANA MULTO CITIUS APPROPINQUANS SED ET NEWTONIANAM POST SE RELINQUENS SIMPLICIORQUE EA AC COMMODIOR.

[1691 et 1689].

§ 1 [1]).

[Fig. 58]

$\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3 \cdot 3\sqrt{3}} + \frac{1}{5 \cdot 9\sqrt{3}} - \frac{1}{7 \cdot 27\sqrt{3}} + \frac{1}{9 \cdot 81\sqrt{3}} - \frac{1}{11 \cdot 243\sqrt{3}}$ &c ∞ AD arc. [Fig. 58].

$\frac{1}{1} - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 9} - \frac{1}{7 \cdot 27} + \frac{1}{9 \cdot 81} - \frac{1}{11 \cdot 243}$. Hinc patet ortus numerorum progressionis.

$\frac{1}{1} - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \frac{1}{729} - \frac{1}{2673}$ &c summa divisa per $\sqrt{3}$ ∞ AD arc. quem si in 3 ducas fiet quadrans peripheriæ AE, hinc autem idem fit ac si summam progressionis ducas in $\sqrt{3}$.

Le rayon a la longueur 1, comme la figure l'indique. La formule donnée ici par Huygens sans explication correspond à ce que nous appelons le développement en série de l'arc tangente pour un arc de 30°: $\frac{\pi}{6} = \text{arctg}\,t = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} \ldots\ldots$ pour $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$; tandis que celle de Leibniz

---

[1]) Manuscrit G, f. 82 v. Les dates 1 Jan. 1691, Maj. 1691 et 26 Mart. 1691 se trouvent respectivement sur les feuilles 78, 88 et 93.

[2]) Huyens écrit aussi (f. 82 r) la progressio ad quadraturam circuli

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} - \frac{1}{78+45\sqrt{3}} + \frac{1}{1810+1045\sqrt{3}}$$

etc., où $78 + 45\sqrt{3} = 3(2+\sqrt{3})^3$, etc. et où $\frac{1}{2+\sqrt{3}} = $ tang. 15 gr. C'est donc le développement en série de arc tg. $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ donnant $\frac{\pi}{12}$ (nous avons corrigé $+\frac{1}{78+45\sqrt{3}}$ en $-\frac{1}{78+45\sqrt{3}}$). Il eût sans doute été plus simple d'écrire $2-\sqrt{3}$ au lieu de $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

(Pièce III qui précède) peut être appelée le développement de l'arc tangente pour un arc de 45°: $\frac{\pi}{4} = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \ldots$ pour $t = 1$ [2]).

Le § 3 qui fuit, lequel eft antérieur en date au § 1, indique comment Huygens a obtenu fa formule: voyez les dernières lignes du § 3. Le § 4 amplifie cette explication. Le § 2, moins important, fait fuite au § 1.

§ 2 [3]). Series quadratix

1us +	10000000000		
		2us —	1111111111
3us +	222222222		
		4us —	52910053
5us +	13717421		
		6us —	3741115
7us +	1054131		
		8us —	304831,6
9us +	89656,3		
		10us	29413
	8871		
			2699
	827		
			255
	10237093128		1168099478
	1168099478		
	906893650		
	17320507.. $\sqrt{3}$		
	. . . .		
	157079451188281342		
	2		
	314158902376562684		

Poteft quifque numerus feriei quadratricis inveniri ex promixe præcedenti, exigua multiplicatione et divifione unius vel duarum characterum, ufque ad numerum decimum quintum. inde ad quinquagefimum multiplicatione per duos characteres et divifione per tres. quo compendio in fuis progreffionibus utebatur D. Fatius.

Fatio de Duillier, fuiffe, vifita Huygens à la Haye en feptembre 1686 (T. IX, p. 134) et de nouveau en février 1691 (T. X, p. 21; il refta à la Haye jufqu'en feptembre, T. X, p. 440) après avoir féjourné en Angleterre et y avoir rencontré e.a. Newton. Voyez la note 1 de la p. 117 du T. IX et la fuite du préfent Tome.

[3]) Manuscrit G, f 82 v et 83 r.

Nam ſi in ſerie $\frac{1}{1.1} - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.9} - \frac{1}{7.27} + \frac{1}{9.81} - \frac{1}{11.243}$ &c fractionum, quarum ſingulis denominatoribus dividi debet numerus 10000000000, ponamus m pro numero hoc; et $\frac{m}{d \text{ in } p}$ ſignificet m diviſum per denominatorem aliquem fractionum ſeriei ut d ſit numerus progreſſionis 1, 3, 5, 7, &c. et p poteſtas ternarij (unde ſit numerus aliquis ſeriei quadratricis), erit numerus proximè ſequens hujus ſeriei $\frac{m}{d+2 \text{ in } 3p}$. quem dico ex præcedenti illo $\frac{m}{d \text{ in } p}$ facile inveniri. Eſt enim $\frac{m}{d.p}$ ad $\frac{m}{d+2.3p}$ ut $\overline{d+2}.3p$ ad $d.p$, hoc eſt ut $\overline{d+2}.3$ ad d. Eſt autem $d+2$ numerus ſeriei 1, 3, 5, 7 in fractione proxime ſequente.

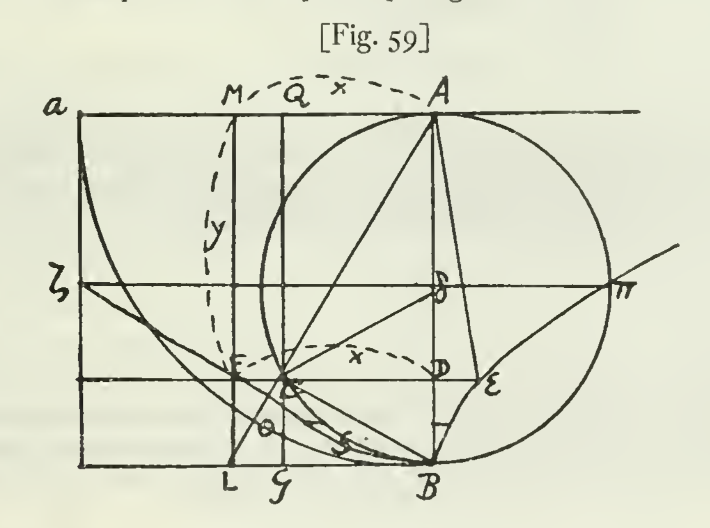
Ergo poſita ſerie 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 &c erit primus numerus ſeriei quadratricis nempe 10000000 &c ad ſecundum, ut triplum 3 ad 1, ſeu ut 9 ad 1. Secundus ad tertium ut triplum 7 ad 5, ſeu ut 21 ad 5 atque ita porro. Sed ſi in uno quopiam erratum fuerit, etiam in ſequentibus omnibus errabitur.

§ 3 [4]). BEπ [Fig. 59] ciſſoides. AD ad DC ut BD ad DE.

Pour entendre le préſent § on peut le comparer avec le § 1bis de la p. 149 du T. XIX datant de 1674. La Fig. 79 ter de la p. 148 du T. XIX, laquelle appartient à ce § 1bis, eſt analogue à la préſente Fig. 59. Dans cette Fig. 79 ter BE eſt la ciſſoïde et BGFζ la courbe qui correſpond à la courbe BFζ de la préſente Fig. 59.

Oſtendimus olim ſpatium AEB æquari triplo ſegmento circuli CBS. Ergo et ſpatium

[Fig. 59]



[4]) Manuscrit G, f. 21 v. La date du 20 déc. 1688 se trouve sur la f. 8 r, et les „Acta Eruditorum" d'avril 1689 sont cités sur la f. 28 v.

CEB æquabitur triplo fegmento CBS, nam triangulum CDB ∞ ADE. Ergo fpatium ECSB ∞ 4 fegmentis CBS. Ergo et fpat. DFB ∞ 4 fegm. CBS. quia, ex conftructione curvæ BFζ — voyez fon équation plus loin dans le préfent §, et auffi dans la note 2 de la p. 149 du T. XIX —, fpat. CSBF ∞ DEB. nam CF fumta eft æqualis DE, et fic ubique.

Ducatur AC et producta occurrat tangenti BG in L. Et fit QCG parallela AB. Quia ergo ut AD ad DC hoc eft ut BD ad DE ita CG ad GL; erit GL ∞ DE feu CF. Unde juncta LF, parallela erit BA. Producatur LF ad M. Jam trianguli δCB duplum eft triang. ACB. Ergo ▭ AG quadruplum trianguli δCB. Unde et ▭ DM quadruplum erit trianguli δCB. Sed fpat. FBD erat quadruplum fegmenti circuli CSB. Ergo totum fpatium MFBA ∞ 4 fectores δCSB. Eft autem 4 fector δCSB ∞ ▭ ab arcu CB et recta AB. Ergo fpat. MFBA ∞ huic rectangulo. Ergo ▭ MB ad fpat. MFBA ut LB ad arcum CB five ad arcum OB, cujus ipfa LB tangens &c.

Ex his facile perfpicitur fpatium Aaζ B æquari circulo ACB, five quadranti AaOB [5]).

Ceci correfpond à la dernière ligne de la p. 149 du T. XIX.

Quod fi continuetur curva Bζ ut et afymptotos Aa, fiet fpatium interjectum infinitum æquale quadruplo femicirculo ACB, hoc eft duplo circulo ACπ. ut facile ex his colligitur [5]).

Sit AB ∞ a, AM ∞ x, MF ∞ y. Quia ergo AD. DC:BD. DE [c.à.d. AD : DC = BD : DE] erit et AD.DC : AB.CE vel DF.

$$y \text{———} \sqrt{aa-yy} \text{———} a \text{———} x$$

$$yyxx \propto a^3y - aayy$$

$$\frac{a^3}{xx+aa} \propto y$$

C'eft l'équation, dont nous avons déjà parlé plus haut, de la courbe BFζ, connue plus tard fous le nom de verfiera. Il n'eft pas généralement connu que Huygens a confidéré la verfiera déjà en 1674.

En marge [6]): Ex hujus fractionis divifione numeris expreffa oritur quadratura Leibnitsij. Ex qua circulus eft ad quadratum circumfcriptum ut $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$ &c. ad 1.

---

[5]) Puisque „spatium MFBA ∞ 4 sectores δCSB" et de même par conséquent: „spatium Aa ζ B" = 4 fois le quart du cercle ACBπ = ce cercle entier, on a aussi: espace total compris entre le diamètre AB, l'asymptote Aa et la courbe BFζ continuée jusqu'à l'infini = 4 fois le secteur correspondant, qui est le demi-cercle ACB. En formules modernes:

$$\int_0^\infty \frac{a^3dx}{a^2+x^2} = a^2\int_0^\infty \frac{dz}{1+z^2}, \text{ où } z=\frac{x}{a}, = a^2\left[\text{arc tg } z\right]_0^\infty = \tfrac{1}{2}\pi a^2, \text{ tandis que } \int_0^a \frac{a^3dx}{a^2+x^2} = \tfrac{1}{4}\pi a^2.$$

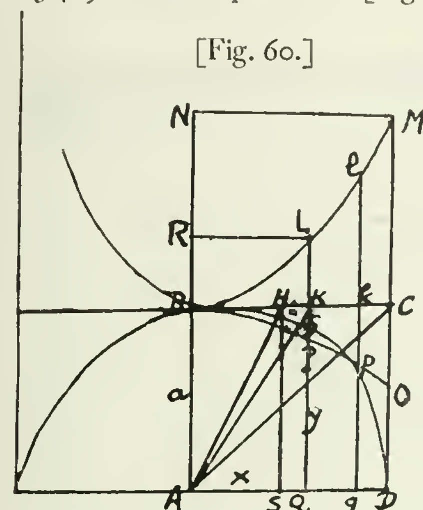
[6]) Voyez sur cette remarque marginale la note 10 de la p. 400 qui suit.

Voyez fur la „fractionis divifio" et fur la fommation qui fuit cette divifion, la note 57 de la p. 41 du T. X et la p. 147 du T. XIX. Confultez auffi la note 12 de cette dernière page. Et les p. 261—262 du préfent Tome.

Toujours en marge: Sed hæc approximatio lente procedit. Multo citius appropinquabit fi AM five BL ponatur tangens parvi arcus certorum graduum. Sed tunc femper erit irrationalis. Vide pag. infra.

Cette p. 63 du Manufcrit G — numération de Huygens — eft la f. 82 v à laquelle nous avons emprunté le § 1 qui précède.

§ 4 [7]). ABCD quadratum [Fig. 60]. BD quadrans circumferentiæ, centro A, BN ∞ AB, CM ∞ CD. BM parabola cujus latus rectum BN. LQ parallela BA fecans BC in K. LQ, KQ, PQ proportionales.



BPpO per puncta P inventa eft linea curva.

En marge: Haec curva BPO eft eadem quæ folio præcedente [Fig. 59] BFζ. AB ∞ a, AQ ∞ x, QP ∞ y, $\frac{a^3}{aa + xx}$ ∞ y.

Dico fpatium BODA æquale effe quadranti ABD [8]).

Item ductâ utcumque AK quæ fecet arcum in G, et ex K deinde rectâ KQ quæ fecet curvam BPO in P. dico effe $\frac{1}{2}$ arcum BD ad arcum BG ficut quadratum BD [lifez: quadrantem ABD] ad fpatium BPQA [8]).

Applicetur ordinatim LR. Ductâ jam AH quæ faciat minimum fectorem GAE et minimum fimul triangulum KAH, erit hoc triangulum ad illum minimum fectorem ut qu. KA ad qu. AG, hoc eft ut qu. AB + qu. BK ad qu. AB. hoc eft ut qu. AB + ▭ABR ad qu. AB. hoc eft ut RA five LQ ad KQ. Quod fi igitur tota BC divifa intelligatur in particulas æquales ipfi KH, et a divifionum punctis ducantur rectæ ad A, erit totum triangulum ABC divifum in totidem triangula æqualia. Et fi ab ijfdem divifionum punctis ducantur parallelæ ad BA, eæ fecabunt qu. BD in totidem rectangula æqualia. Et horum fingula ad partes interceptas ejufdem latitudinis de fpatio BODA, erunt ut rectæ KQ ad PQ. hoc eft ex conftructione ut rectæ LQ ad KQ, hoc eft ut △la KAH ad fectores GAE. Sed et rectangula HQ et △la HAK funt refpective omnia inter fe æqualia. Ergo ut omnia dicta ▭a ad omnia fpatia PS, ita omnia △la KAH ad omnes fectores GAE. hoc eft

---

7) Manuscrit G, f. 22 v. Voyez fur la date la note 4 de la p. 397.

8) Voyez la note suivante.

ut ▭ KA ad ſpat. BPQA ita △ KAB ad ſectorem GAB, ſive ita tangens KB ad arcum GB. &c. [9]).

En marge: Hinc ergo etiam per continuam diviſionem oritur Progreſſio Leibnitſij ad Circuli Quadraturam et ad ſectores quoſvis, quod ille neſcio an animadverterit [10]).

---

[9]) L'équation démontrée KB: arc GB = ▭ KA : spat. BPQA donne, lorsque K coïncide avec C, CB: $\frac{1}{2}$arc BD = ▭ ABCD: spat. BODA. Or, en posant CB = r, on a: $\frac{1}{2}$arc BD = $\frac{1}{4}\pi r$, et □ ABCD = r^2. Par conséquent spat. BODA = $\frac{1}{4}\pi r^2$, c. à. d. „spat. BODA æquale quadranti ABD" (note précédente).

Quant à la relation du texte $\frac{1}{2}$ arc BD: arc BG = quadrans ABD : spat. BPQA, elle résulte aussi de l'équation démontrée, puisqu'on a

$$KB : \tfrac{1}{2} \text{ arc BD} = ▭\ KA : \tfrac{1}{4}\pi r^2$$

c. à. d. $1 : \frac{1}{4}\pi r = r : \frac{1}{4}\pi r^2$.

[10]) Voyez sur cette remarque finale, ainsi que sur la remarque finale du § 3, la p. 376 de l'Avertissement qui précède.

VI.

HUYGENS ET HUBERTUS HUIGHENS.

1692.

Voyez ſur Huygens, Hubertus Huighens, et la quadrature du cercle les l. 17—19 de la p. 298 du T. X.

VII.

INVESTIGATIO DUARUM MEDIARUM [1]).

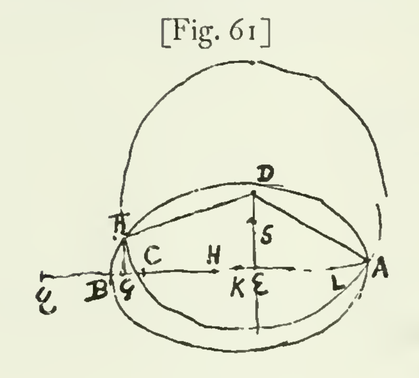
[?]

Sint datæ HC, HQ [Fig. 62] inter quas oporteat duas medias invenire. Sit CB ∞ $\frac{1}{3}$ CQ. CA ∞ 3 CH. BOA circulus. AL ∞ $\frac{1}{6}$ AB. LE ∞ HC. LD ∞ 2LE. DM (perpend. DE) ∞ $\sqrt{\text{qu. EL + EA}}$. MN ∞ 2DM.

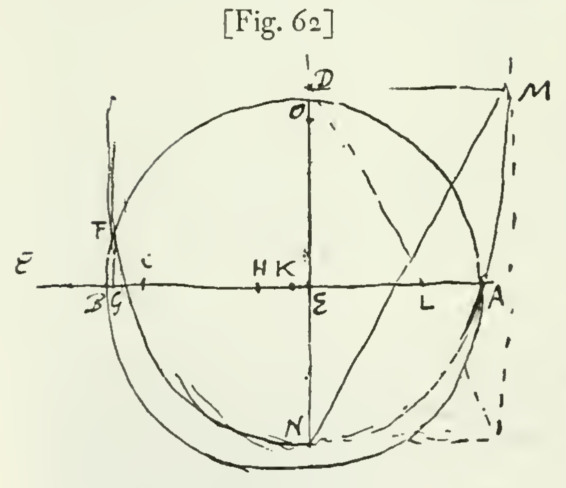
FNAM eſt ellipſis centro D. HG eſt minor duarum mediarum inter HC, HQ.

Inventum ex alia conſtructione, cujus figura ſuperior [Fig. 61] per modum perſpectivæ.

[Fig. 61]



[Fig. 62]



Dans le manuscrit les diamètres BA sont égaux dans les deux figures.

Nous publions ces lignes quoique la conſtruction ne ſoit pas correcte (ſans doute à cauſe d'une faute de calcul) [2]), puiſque c'eſt bien rarement que Huygens dans ſes démonſtrations ſe ſert de „perſpective" (il s'agit d'une projection oblique ſous l'angle arc cos $\frac{1}{\sqrt{3}}$, qui change l'ellipſe et la circonférence de cercle de la Fig. 61 reſpectivement en la circonférence de cercle et l'ellipſe de la Fig. 62): nous croyons remarquer ici une légère influence de Deſargues.

Voyez auſſi ſur la méthode de projection la note 8 de la p. 428 qui ſuit.

---

1) Chartæ mechanicæ, f. 100.

[2]) D'après le texte on a dans la Fig. 62, en posant HC $= a$ et HQ $= b$, CA $= 3a$, CB $= \frac{1}{3}(a-b)$; AB $= \frac{1}{3}(8a+b)$, KB $=$ KA $= r = \frac{1}{6}(8a+b)$, AL $= \frac{1}{18}(8a+b)$, LE $= a$, LD $= 2a$, donc DE $= a\sqrt{3}$, AE $= p = \frac{1}{18}(26a+b)$, HA $= 2a$, HE $= \frac{1}{18}(10a-b)$, DM $= \sqrt{a^2+p^2}$, MN $= 2\sqrt{a^2+p^2}$. En prenant les axes DX et DY comme l'indique la Fig. 62 bis, nous avons pour l'équation de l'ellipse de la Fig. 62 $3x^2+y^2 = 3(a^2+p^2)$ et pour celle de la circonférence de cercle de la même figure $(x-p)^2 + 2r(x-p) + (y-a\sqrt{3})^2 = 0$.

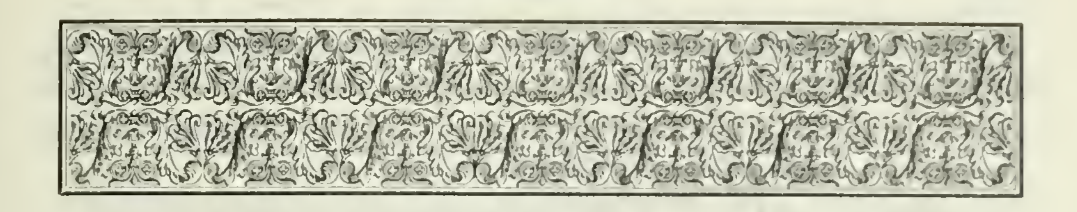
[Fig. 62 bis]

Les deux courbes passent par le point A. Suivant Huygens elles se coupent une deuxième fois en un point F pour lequel $x = -$GE $= -$(HE $+$ GH) $= \frac{1}{18}(b-10a) - \sqrt[3]{a^2b}$. En général il n'en est pas ainsi, quoique la chose soit vraie pour les valeurs particulières $a = 0$ et $a = b$.

Huygens n'indique pas comment il a trouvé la construction de la Fig. 61, du moins son raisonnement n'a pas été conservé. Il est connu que les équations du troisième degré se résolvaient généralement par l'intersection de deux coniques (Appendice de la p. 334 qui précède), dont l'une pouvait être une circonférence de cercle et l'autre une ellipse (voyez p.e. la Prop. Prima du „Mesolabum" de Slusius: „Inter extremas datas duas rectas medio loco proportionales per circulum & ellipsim, infinitis modis, exhibere").



MATHEMATICA VARIA 1666-1681.



Avertiſſement.

Comme on peut le voir dans la ſuite du préſent Tome, c'eſt ſurtout après ſa rentrée définitive en Hollande, donc après 1681, que Huygens ſ'appliqua de nouveau avec ardeur, comme dans ſa jeuneſſe, aux mathématiques pures[1]): c'eſt ſurtout vers la fin du ſiècle que le calcul infinitéſimal prit ſon eſſor triomphal.

La préſence de Roberval et de Frenicle de Beſſy[2]) à l'Académie ne ſemble pas l'avoir fortement incité à ſ'occuper dans la période françaiſe de ſa vie qui ſ'ouvre en 1666 de ſujets de mathématique pure intéreſſant ſpécialement l'un ou l'autre de ces collègues[4]). Voyez toutefois le nom de Roberval dans la Pièce I, 2, B qui ſuit et de même dans la Pièce 1, 2, A, datant également de 1668, celui d'un autre collègue, le phyſicien Mariotte. Roemer, membre depuis 1672, a été mentionné dans le T. XVIII[5]) là où il était queſtion de l'épicycloïde (année 1674); voyez auſſi à la fin de la Pièce III, 4 de 1676 qui ſuit la „methodus Romeri" rapportée par Huygens

---

[1]) L'Appendice à la Pièce XII (p. 334) appartient aussi à cette période hollandaise, mais il y a lieu, comme nous l'avons dit à la p. 207, de le rattacher aux dernières années (1678—1681) de la période française.

[2]) Qui décédèrent l'un et l'autre en 1675.

[3]) Pascal, Desargues et Fermat étaient déjà morts avant 1666.

[4]) Consultez sur les discussions entre Huygens et Roberval sur des sujets de mécanique les T. XVIII et XIX qui précèdent.

[5]) Consultez surtout sur Roemer et Huygens la p. 603 du T. XVIII. Voyez aussi la p. 216 et la Pièce XI à la p. 285 qui précèdent.

pour réfoudre un problème planimétrique. La préfence de de la Hire à l'Académie, depuis 1678, eut plus d'influence fur lui — nous parlons toujours de la mathématique pure — comme nous l'avons expofé aux p. 219—222 et dans la note 5 de la p. 335. Cette influence perfifta même après 1681 [6]).

Les Pièces III, 1 et IV, 2 fur la queftion des fignes dans les équations de géométrie analytique (la Pièce IV, 2 de 1676 ou 1677 n'eft qu'un développement un peu plus ample de celle, III, 1, de 1672) peuvent paraître bien fimples. Mais ce font précifément ces chofes fimples (équivalence des deux axes, celui des x et celui des y, et équivalence de leurs parties pofitives et négatives) qui ont de l'importance. Voyez auffi ce que nous avons dit à la p. 217 fur l'expreffion fimple: æquatio parabolæ, équation de la parabole [7]). C'eft auffi une remarque fimple, mais fur laquelle cependant une différence d'opinion était poffible, que celle de la Pièce I, 2, B (nous avons déjà dit qu'on y trouve le nom de Roberval), d'après laquelle les équations algébriques fervant à réfoudre un problème déterminé fourniffent fouvent fpontanément des folutions d'un problème plus général.

Les carrés magiques, ainfi que d'autres queftions fur les nombres, n'avaient pas d'attrait puiffant pour Huygens [8]). La compofition de fon article de 1668 „De combinationum mirandis" [9]) attefte-t-elle pourtant une certaine influence de Frenicle fur fa penfée? Nous avons déjà remarqué à la p. 20 du T XIV [10]) que jadis Huygens ne s'était pas fervi d'analyfe combinatoire (§ 2 de la préfente Pièce) dans fon traité „Van Rekeningh in Spelen van Geluck" de 1657. Voyez encore ce que nous difons fur Frenicle à la fin du préfent Avertiffement et confultez l'Appendice de la p. 419 qui fuit.

Au § 1 qui fe rattache à fa confidération de 1661 de la ligne logarithmique, Huygens établit les formules

Somme des logarithmes des nombres entiers jufqu'à log n (inclus)

$$> n \log n - (n-1) \, . \, 4342945$$

et „ „ „ „ $< (n+\frac{1}{2}) \log n - (n-1) \, . \, 4342945$

[6]) Confultez, outre la note 1 qui précède, la fin de la note 138 de la p. 221.

[7]) Comparez sur ce sujet la note 2 de la p. 442 qui suit.

[8]) Comparez ce que nous avons dit à la p. 214 du T. XI; voyez toutefois quelques carrés magiques aux p. 259—260, datant de 1650, du même Tome.

[9]) Pièce I, 1 à la p. 413 qui suit.

[10]) Où nous mentionnons aussi les travaux de Pascal et de Wallis.

(où log désigne le logarithme à base 10, celui de 10 étant 10 millions); on peut donc dire, en désignant le nombre 4342945 par log e (ce qui est un anachronisme), que suivant Huygens

$$n^n e^{-(n-1)} < n! < n^{n+\frac{1}{2}} e^{-(n-1)}.$$

La célèbre formule de Stirling de 1730, qui peut s'écrire

$$\sqrt{2\pi}.\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} < n!$$

ressemble beaucoup à celle de Huygens ainsi formulée: le rapport du „terminus minor” de Huygens à celui de Stirling (ce dernier étant plus exact) est $\frac{e}{\sqrt{2\pi n}}$. Quant au „terminus major” de Huygens il est au „terminus minor” de Stirling dans le rapport $\frac{e}{\sqrt{2\pi}} = 1{,}084$: c'est un „terminus major” fort exact, tandis que le „terminus minor” lui aussi n'est pas sans valeur.

La formule du § 2 pour le nombre de permutations possibles („numerus transpositionum”) lorsque les n lettres considérées ne sont pas toutes différentes, mais qu'il existe parmi elles p.e. trois groupes, aux nombres m_1, m_2 et m_3, de lettres égales entr'elles, savoir (en notation moderne) $\frac{n!}{m_1!\, m_2!\, m_3!}$, était loin d'être généralement connue puisqu'en 1666 Leibniz dans son œuvre de jeunesse „Dissertatio de arte combinatoria” commet une faute dans la considération d'un cas de ce genre, écrivant[11]) $6! - 5!$ au lieu de $\frac{6!}{2!}$ pour le nombre des permutations („variationes”) des syllabes ut ut re mi fa sol[12]). Mais cette formule n'est pas de Huygens: tout-le-monde pouvait la trouver chez Mersenne dans les „Harmonicorum libri” de 1635 ou bien dans l'„Harmonie Universelle” de 1636. Déjà dans „La Vérité des Sciences” de 1625

[11]) Dans le „Probl. VI”, intitulé: „Dato numero rerum variandarum, quarum aliqua vel aliquæ repetuntur variationem ordinis invenire”.

[12]) M. Cantor („Vorlesungen über Geschichte der Mathematik” III, 1901) observe (p. 45) que lorsqu'on réimprima la „Dissertatio” en 1690 à l'insu de Leibniz celui-ci protesta et indiqua e.a. une certaine erreur dans son œuvre de jeunesse, mais que même alors il ne fit pas mention de l'erreur dont il est question dans le texte.

Merfenne confidère les „combinations" en connexion avec fa théorie des plus beaux chants, dont nous avons parlé à la p. *66* qui précède; en cette année il connaît la formule n! mais pas encore la formule $\frac{n!}{m_1!\, m_2!\, m_3!}$. Dans fon article pofthume fur les combinaifons Frenicle cite au début les „Harmonicorum libri." [13])

---

[13]) Dans „La Vérité des Sciences" le Theoreme II du Liure III (nous ne citons que ce seul passage) pose déjà la question de „sçauoir combien une multitude de nombres, de lettres, de soldats, de mouuemens, de sons, & de toutes sortes d'obiets peuuent estre changez, & transposez d'un lieu en un autre". Dans les „Harmonicorum libri" Mersenne considère le cas général en discutant la Prop. VIII du Liber Septimus intitulée: „Cantilenarum varietatem explicare, cum in dato notarum numero duæ vel plures similes occurrunt". La même chose dans le Second Livre des „Traitez de la Voix et des Chants" qui font partie de l'„Harmonie Universelle".

Frenicle cite en marge les p. 116—117 (faisant partie du Liber Septimus) des „Harmonicorum libri" dans le traité posthume „Abregé des Combinaisons" („Divers ouvrages" de 1693 et „Memoires de l'Ac. R. d. Sciences, depuis 1666 jusqu'à 1699", T. V, Paris, Cie des Libraires, 1729).

MATHEMATICA VARIA 1666—1681.

I. A PARIS (MAI 1666 — AOÛT 1670)

1. DE COMBINATIONUM MIRANDIS [1]).
2. TROIS PROBLÈMES SUR DES TRIANGLES.

APPENDICE. SUR LA 15 PROPOSITION [DE FRENICLE] [1]).

II. A LA HAYE (SEPTEMBRE 1670 — JUILLET 1671)

. . . .

III. A PARIS (JUILLET 1671 — JUILLET 1676)

1. QUESTION DES SIGNES DANS LES ÉQUATIONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.
2. TROIS PROBLÈMES SUR LE TRIANGLE.
3. UN THÉORÈME SUR LA TANGENTE À L'ELLIPSE.
4. UN PROBLÈME SUR LE QUADRILATÈRE, AVEC EXTENSION DU THÉORÈME TROUVÉ EN CETTE OCCASION SUR LE QUADRILATÈRE INSCRIT DANS UNE CIRCONFÉRENCE DE CERCLE, À UN POLYGONE INSCRIT QUELCONQUE.
5. LES „QUANTITEZ IMAGINAIRES".

IV. A LA HAYE (JUILLET 1676 — JUIN 1678)

1. QUESTIONS SE RAPPORTANT AU TRAITÉ „VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK".
2. QUESTION DES SIGNES DANS LES ÉQUATIONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

V. A PARIS (JUILLET 1678 — AOÛT 1681)

QUESTION SE RAPPORTANT AU TRAITÉ „VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK".

---

[1]) C'est ainsi que Huygens lui-même intitule cette Pièce.

I.

À PARIS (MAI 1666—AOÛT 1670)

I, 1.

DE COMBINATIONUM MIRANDIS [1]).

[1668] [2])

1 *a* § 1. Si ſcire velim quot ſint combinationes 4 diverſarum notarum aut
literarum *a b c d*, notum eſt multiplicandas tantum eſſe continuè
2 *ab* numeros ab unitate ad quaternarium. Scilicet 1 in 2 facit 2, hoc
ba in 3 facit 6, hoc in 4 facit 24, qui eſt numerus combinationum
quæſitus.
6 *abc* Ergo ſi ſcire velim quot ſint combinationes centum mille nota-
bac rum differentium, oportet multiplicare in ſe continue numeros
acb omnes ab 1 ad 100000. quod infiniti laboris eſſet. Vel oporteret
bca addere in unam ſummam omnes logarithmos numerorum 1 ad
cab 100000, et ſumma illa eſſet logarithmus numeri combinationum
cba quæſiti. Sed et hoc immenſi laboris eſſet. Verum methodo mea
invenio facili negotio ſummam iſtam logarithmorum eſſe ma-
24 ... jorem quam 456571,9800000, minorem autem proximè quam
456573,5000000 poſito logarithmo denarij 1.0000000. adeo ut
ſit proxime 456572,0000000. Ergo cum characteriſtica hujus logarithmi ſit 456572, ſequitur numerum ipſi logarithmo convenientem habere characteres 456573. ac proinde numerus combinationum notarum 100000, tantus erit ut ſcribatur characteribus 456573. Ipſe vero numerus, neque etiam primi characteres, hac methodo inveniri non poſſunt.

Methodus autem inveniendi ſummam logarithmorum numerorum quotlibet ab unitate continuatorum eſt hæc. Fundamentum horum ex dimenſione ſpatij a linea logarithmica et aſymptoto ejus intercepti de qua in libro B.

Voyez les p. 439—442 et 460—471 du T. XIV. Huygens venait en outre de traiter en octobre 1668 de la ligne logarithmique, et de l'eſpace correſpondant, dans les p. 86—98 du Manuſcrit D que nous avons publiées aux p. 102—119 du T. XIX; il s'y agiſſait de la courbe de jet d'un projectile lorſque la réſiſtance eſt proportionnelle à la viteſſe.

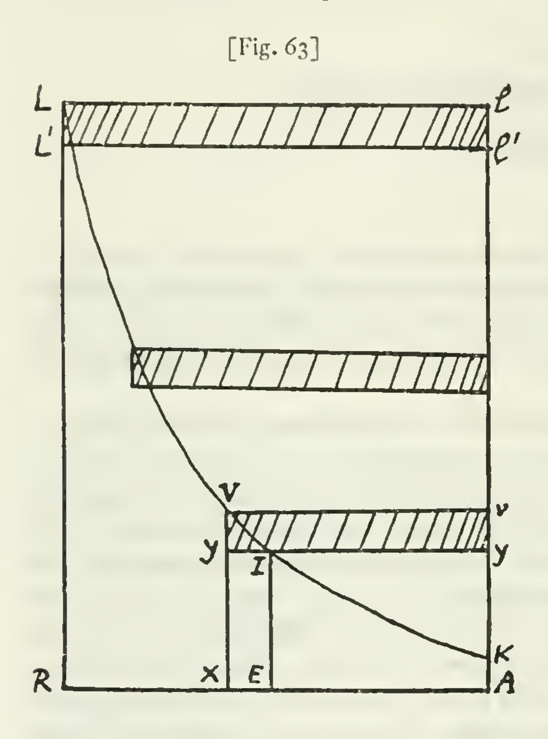
---

[1]) Manuscrit D, p. 108—110,

[2]) On trouve les dates 28 Oct. 1668, 1669 et 1 Febr. 1669 respectivement aux p. 86, 118, et 145 du Manuscrit.

Ducatur numerus maximus datorum in ſuum logarithmum et à producto auferatur alterum hoc quod ſit multiplicando numerum maximum unitate diminutum, in numerum 4342945 [3]), poſito nempe denarij logarithmo 1.0000000 [4]). Reſiduum minus erit ſumma logarithmorum quæſita. Addito vero ſemiſſe logarithmi numeri maximi, excedet dictam ſummam quæſitam.

[Fig. 63]



Soit KL, Fig. 63, la logarithmique (comparez la Fig. 1 de la p. 460 du T. XIV), AK = 1, RL = n (numerus maximus), AE = log EI, AX = log XV, où nous ſuppoſons que XV ſurpaſſe EI de l'unité, donc YV = AK = 1. Log XV eſt par conſéquent repréſenté par le rectangle VYyv et de même log RL par le rectangle LL'l'l. La ſomme cherchée eſt donc égale à l'enſemble des rectangles couvrant tout l'eſpace limité par les droites Ll, lK et la logarithmique, plus n—1 triangles tels que VYI. Or, „quod ſit multiplicando numerum maximum, unitate diminutum, in numerum 4342945" eſt l'eſpace RLVIKAR, et en retranchant cet eſpace du rectangle RLlA on obtient l'eſpace LVIKlL [5]) qui, comme le dit Huygens, eſt inférieur à la ſomme cherchée („terminus minor").

Or, la ſomme des triangles tels que VYI ſerait égale à $\frac{1}{2}$ RA, ſi les „hypoténuſes" de ces triangles étaient droites. Leur véritable ſomme eſt donc inférieure à $\frac{1}{2}$ RA et en ajoutant à l'eſpace LVIKlL cet $\frac{1}{2}$ AR („addito ſemiſſe logarithmi numeri maximi") on obtient, comme le dit Huygens, une grandeur qui ſurpaſſe la ſomme cherchée („terminus major"). On voit que ce „terminus major" ſe rapproche beaucoup plus de la vraie valeur que le „terminus minor".

---

3) Voyez sur ce nombre la p. 441 du T. XIV.

4) C.à.d. 10 millions; comparez la dernière ligne du texte de la p. 11 qui précède. Consultez aussi les p. 216 et 264. Ailleurs dans cette même Pièce Huygens prend apparemment le logarithme de 10 égal à 1.

5) Cet espace peut s'écrire $\int_1^n \mathrm{l}.x\,dx$, ou l. désigne le logarithme népérien. On a $\int_1^n \mathrm{l}.x\,dx = \mathrm{n\,l.n} - (\mathrm{n}-1)$; or, pour passer aux logarithmes à base 10, il faut encore multiplier par log e, ce qui donne n log n—(n—1) log e (où log e = 4342945), conformément à la valeur de l'espace LVIKIL déduite de la considération de la Fig. 63.

Auferendo autem 7 poſteriores characteres habebitur characteriſtica dictæ ſummæ, ad quam characteriſticam addita unitate, habebitur numerus characterum numeri facti continua multiplicatione omnium numerorum datorum.

Quod ſi ſeries datorum numerorum non incipiat ab unitate ſed ab alio quovis numero, ducatur numerus maximus in differentiam logarithmorum maximi et minimi. Rurſus differentia numeri maximi et minimi ducatur in numerum 4342945, et hoc productum a primo producto auferatur, eritque reſiduum minus quam ſumma logarithmorum quæſita. Addito vero ſemiſſe differentiæ logarithmi maximi et minimi, ſiet jam majus ſumma quæſita.

Ici Huygens s'eſt trompé. L'intégration $\int_{n_0}^{n} l.x\,dx$ (comparez la note 5), ou n_0 déſigne le „alius quivis numerus" ou „numerus minimus", donne $n l.n - n_0 l.n_0 - n(n - n_0)$, ou, en paſſant aux logarithmes à baſe 10, $n \log n - n_0 \log n_0 - (n - n_0).4342945$. Il aurait donc dû dire: „ducatur numerus maximus in logarithmum numeri maximi et ab hoc producto auferatur numerus minimus ductus in logarithmum numeri minimi auferatur item differentia numeri maximi et minimi ducta in numerum 4342945", ce que la conſidération de la Fig. 63 confirme. Pour la même raiſon que plus haut on trouve ainſi, comme le dit Huygens, un „terminus minor" qui ſe change en un „terminus major" par l'addition, ſemblable à celle du cas précédent, qu'il indique.

§ 2. Videri poſſet verſus hexametros pentametroſque innumeros eſſe qui compoſiti ſint vel componi in poſterum poſſint non deficiente tempore. Id vero contra habere hic oſtendam.

Si decem tantum eſſent literarum elementa, vox duarum literarum centum modis formari poſſet, vocalibus ac conſonantibus nullo diſcrimine habitis. quod hinc conſtat quum decem exiſtentibus notis arithmeticis, accerſito etiam 0, centum ſint numeri binis notis ſcribendi, ut 00, 01, 02 &c. 10, 11, 12 &c. Non enim plures ſunt infra centenarium, nec pauciores etiam, cum quilibet numerus ſit diverſus.

Simili ratione vox trium literarum tunc mille differentias haberet: vox quatuor literarum decem millia differentiarum. atque ita porro. quæ etiam aliter facile demonſtrari poſſunt.

Ita quoque cum ſint elementa 22, oſtendi poteſt vocem duarum literarum habere varietates 484 qui eſt quadratus ex 22. Vocem trium literarum varietates 10648 qui cubus eſt 22. Vocem 4 literarum varietates 234256 quod eſt quadratoquadratum 22. Ac denique etiam verſum 60 literarum habere varietates tot quot ſunt unitates in poteſtate ſexageſima numeri 22.

Logarithmus 22 eſt 1,3424227, qui ſexagies ſibi ſuperadditus facit 80,5453620, cujus logarithmi characteriſtica cum ſit 80, ſequitur hinc poteſtatem ſexageſimam numeri 22 habituram 81 characteres, eorumque primos patet fore 3510 &c. quia 0,545 eſt logarithmus 3510 &c. Itaque cum verſus nullus hexameter pentameterve pluribus quam 60 literis conſtet, nam vix inveniuntur qui 50 habeant, ſequitur numerum 3510(77) majorem eſſe numero omnium verſuum ejuſmodi vel illis breviorum qui ſieri unquam poſſint. Nam et breviores quam 60 literarum ita comprehendo, ut,

perfecto verſu, informes reliquæ literæ relictæ credantur. Itaque in iſto numero variationum omnes verſus Virgilij, Ovidij, Horatij atque omnes omnium qui unquam facti ſunt vel fieri poſſunt, ſcripti ſint neceſſe eſt. Sed et multo minore numero continentur, cum varietates inutilus utilibus longe plures ſint. Porro et Gallici, Belgici et omnium linguarum quæ 22 elementis ijſdem ſcribuntur aut ſcribi poſſunt verſus omnes non ultra 60 literas habentes eodem numero continentur.

Quod ſi ſcire libeat quot diverſa poëmata vel etiam opera proſa oratione ſcribi poſſint totidem literis quot continet Virgilij Aeneis, dico et illum operum numerum infinitum nequaquam eſſe, ſed facile numerum majorem aſſignari poſſe.

Sunt enim in Aeneide verſus non plures quam 9450, unde literæ non plures quam 500000, poſitis 50 literis et amplius in ſingulos verſus, etſi tot rariſſimè vel nunquam inveniantur. Hic igitur variationes erunt quot unitates in numero qui ſit 500000ma poteſtas numeri 22, quæ poteſtas ſcribitur 671212 characteribus, quorum primus 2, qui erit immanis numerus, ſed reſpectu infiniti minimus.

Numerus iſte characterum invenitur ut ſupra, ſed hìc logarithmus numeri 22, qui eſt 1,3424227 ducendus 500000^{es} et fit 671211,3500000; unde demtis 7 poſtremis notis relinquitur characteriſtica 671211, cui addita unitate fit 671212. Primus autem character erit 2, propter 35 poſt characteriſticam.

Quæcunque igitur opera tot quot Aeneis Virgilij literis ſcribi poſſunt vel paucioribus, certo illo numero variationum continentur, etiam ijs computatis quæ tota ex litera *a*, *b* vel alia conſtarent, immenſâque præterea multitudine nihil ſignificantium. Omnia itaque naturæ et artis arcana quæ vel ipſe Deus illo numero literarum vel minore perſcribere poſſet eodem variationum numero comprehenduntur.

Ad inveniendum quoties literæ verſus alicujus tranſponi poſſint, ut illius

Diſcite juſtitiam moniti et non temnere diuos[6]),

oportet videre primum quot literis conſtet, ut hic 39; quæ ſi omnes diverſæ eſſent, videndum quis tunc futurus ſit tranſpoſitionum numerus, per præcedentia, qui ſit hic 47 characterum. Deinde videndum quoties quæque litera repetatur, ut hic inveniuntur

d	i	ſ	c	t	e	m	n	a	o	r	u
2	8	3	1	6	5	3	4	1	3	1	2

His ſubſcribantur numeri tranſpoſitionum quas haberent ſingulæ literarum ſummæ ſi non ijſdem ſed diverſis literis conſtarent:

2 39920 6 1 720 120 6 24 1 6 1 2

ita duarum variationes ſunt 2, octo diverſarum variationes 39920 ex præcedentibus. Et ſic porro. Tum his infimis numeris omnibus in ſe ductis, per productum hoc dividatur numerus tranſpoſitionum primo inventus, et quotiens erit numerus tranſpoſitionum quæſitus. Hæc facile demonſtrantur.

---

[6]) Aeneis, lib. VI, vs. 620.

I, 2.

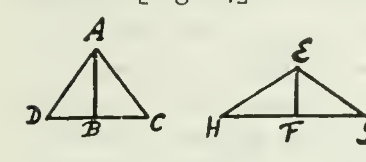
TROIS PROBLÈMES SUR LES TRIANGLES.

[1668 ou 1668—1669]

A[1]). Triangula duo reperire isofcelia, æqualia et isoperimetra, quorum latera fingula et perpendiculares numeris[2]) exprimantur. Hypothefes Mariotti.

Hypothefis laterum AC, CB, BA [Fig. 64]: $\overset{AC}{aa+bb}$, $\overset{BC}{aa-bb}$, ergo $\overset{AB}{2ab}$. Hypothefis laterum EG, GF, FE:

[Fig. 64]



$$\overset{EG}{aa+cc},\ \overset{FG}{aa-cc},\ \text{ergo}\ \overset{EF}{2ac}.$$

$$aa-bb \;\text{—}\!\!\vdash\!\text{—}\; aa-cc \;\text{———}\; 2ac \;\text{—}\!\!\vdash\!\text{—}\; 2ab$$

$$aab - aac \infty b^3 - c^3$$

$$aa \infty bb + bc + cc$$

Il s'agit donc de trouver des valeurs convenables, c. à. d. des nombres entiers ou fractionnaires, pour a, b et c qui fatiffaffent à cette dernière équation. A cet effet Huygens pose

$$bc + cc \infty dd - 2db$$

d'où

$$b \infty \frac{dd-cc}{c+2d}$$

$$[\text{et } a^2 = (d-b)^2]$$

Exemple: $c \infty 1$, $d \infty 2$, fit $b \infty \frac{3}{5}$, $a \infty \frac{7}{5}$.

B[3]). Invenire triangulum isofceles habens aream dato fpatio æqualem et crura una cum bafi æqualia lineæ datæ. ubi eadem æquatio invenietur atque cum crura demptâ bafi datæ lineæ æqualia exigentur, quoniam calculus analiticus non tam attendit quid geometrice propofitum fit, quam quid agat revera. Eft enim hic calculus idem ac fi proponatur datis rectis b et d invenire lineam x a cujus quadrato fi auferatur quadratum differentiæ inter b et x refidui radix ducta in dictam differentiam ipfarum b et x æquet rectangulum bd.

---

[1]) Manuscrit C. p. 262, juillet 1668.

[2]) Ici il s'agit apparemment de nombres entiers ou fractionnaires, non pas de nombres sourds (voyez sur ces derniers „nombres" les p. 188 et 370 qui précèdent).

[3]) Manuscrit D, p. 114, fin 1668.

Poteſt hic x major vel minor quam b ſumi ut tamen ad eandem æquationem cubicam deveniatur, cujus tres erunt veræ radices quæ propoſito ſatiſfacient.

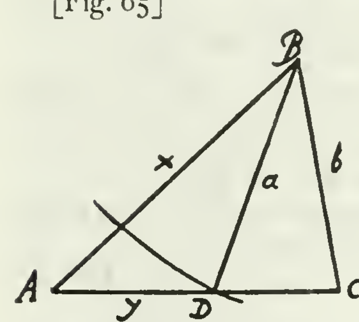
Robervallius negabat tertiam radicem utilem eſſe in hoc problemate.

Poteſt et ſic proponi. Invenire triangulum iſoſceles quod habeat aream æqualem ſpatio dato, et cujus tria latera contingant circumferentiam circuli dati. ubi triangulum etiam ſic ordinatum intelligi poteſt ut circulus ſit extra triangulum, et contingat baſin et latera ultra baſin producta. Et ſic rurſus 3 radices veras habebit æquatio.

Ita radix aliqua inutilis aliquando eſt intentione noſtra, ſed utilis tamen natura.

C [4]). In triangulo ABC [Fig. 65], dato latere BC ∞ b, angulo oppoſito BAC, et recta BD quæ angulum bifariam ſecat ∞ a, invenire triangulum.

[Fig. 65]



$$\frac{by}{x} \infty \text{DC}$$
$$y$$

$$\frac{byy}{x} + aa \infty bx$$

Sit $aa \infty bd$ $y \infty \sqrt{xx - dx}$

Patet ex hac æquatione quod punctum D ſeu terminus lineæ AD ∞ y, eſt ad hyperbolam quæ datam poſitionem habet ad rectam BA et punctum ejus B. Idem vero D punctum eſt quoque ad circumferentiam centro B radio BD ∞ a deſcripta. Ergo dabitur punctum D ad interſectionem circumferentiæ hujus et hyperbolæ datæ. Aſymptoti ſeſe ſecant ad angulos rectos.

Conſtructio. Etc.

---

[4]) Manuscrit D, p. 133, janvier ou février 1669.

APPENDICE.

SUR LA 15 PROPOSITION[1]).

[?]

L'hypotenuſe[2]) *de tout triangle primitif eſt la ſomme de deux quarrez inegaux et premiers entre eux, dont l'un eſt la difference des meſmes quarrez.*

S'il n'entend pas que ces deux quarrez ſoient des nombres entiers, s'il ne faut pas cela pour les propoſitions ſuivantes?

Il s'enſuit par la prop. 14[3]) que cette hypotenuſe ſera compoſee de deux nombres entiers ou rompus, qui ſeront entre eux comme quarrè a quarrè. Mais nous ne ſcavons pas encore s'ils seront entiers ou rompus. L'on peut donc ſoutenir qu'ils ſeront ou entiers ou rompus, juſqu'a ce qu'il ſoit prouuè qu'ils ne peuvent pas être rompus. Or comment prouvera-t-on qu'ils ne peuuent pas eſtre rompus ou des fractions, puis qu'ils le peuvent bien eſtre? Car poſons le triangle primitif 3, 4, 5. Il y a deux fractions, ſcavoir $\frac{16}{5}$ et $\frac{9}{5}$, qui ſont entre elles comme quarrè a quarrè et qui compoſent enſemble l'hypotenuſe. Il n'y a donc point d'impoſſibilitè que l'hypotenuſe d'un triangle primitif ſoit compoſè de deux fractions qui ſoient entre elles comme quarrè a quarrè. Et par conſequent la propoſition n'eſt pas prouuee vraye en nombres entiers.

---

[1]) Chartæ mathematicæ, f. 3. La feuille n'est pas datée. C'est pour cette raison que nous l'avons placée comme Appendice.

Ce que Huygens appelle la „15 Proposition" est la Proposition XX du „Traité [posthume] des Triangles rectangles en Nombres" de Frenicle, publié en 1676 et 1677 (voyez la p. 215 du T. VIII) et qui parut aussi en 1729 dans les „Memoires de l'Academie Royale des Sciences depuis 1666 jusqu'à 1699".

Il est possible que du vivant de Frenicle cette proposition ait été connue à ses collègues sous le nom de „15ième proposition".

[2]) En marge: Hypotenuſe et non pas hypothenuse comme il y a partout. Frenicle toutefois écrit partout correctement „hypotenuse" (ou parfois „hypoténuse").

[3]) Ici il semble s'agir réellement de la „Proposition XIV" du Traité de Frenicle, qui est la suivante: „Si on prend deux nombres quelconques premiers entre eux, dont l'un soit pair, & l'autre impair, le Triangle dont ils seront les générateurs sera primitif". La „Demonstration" commence comme suit: „Soient A & B premiers entre eux, dont l'un soit pair, & l'autre impair; je dis que le Triangle rectangle qu'ils formeront, sçavoir $A^2 + B^2$, $A^2 - B^2$ & 2AB, sera primitif". Comparez la Pièce I 2, A qui précède.

Il faut, pour bien faire, demonſtrer primitivement que l'hypotenuſe de tout triangle rectangle eſt compoſee de deux nombres entiers qui ſont entre eux comme quarrè a quarrè. ou bien il le faut montrer ſeulement du triangle primitif.

Tout triangle primitif a pour hypotenuſe et pour un des coſtez un nombre impair par la prop . . . . [4]), donc la ſomme de l hypotenuſe et du coſtè impair et auſſi leur difference ſeront des nombres pairs, et les moitiez de cette ſomme et difference ſeront des nombres entiers, mais le produit de cette ſomme et difference eſt un quarrè, ſcavoir le quarrè du coſtè pair, comme il eſt evident en mettant a pour l'hypotenuſe, b pour le coſtè impair et c pour le coſtè pair. Donc la dite ſomme $a + b$ et difference $a - b$ ſont entre elles comme quarrè a quarrè, et de meſme leur moitiez, que nous avons montrè eſtre des nombres entiers. Mais ces deux moitiez compoſent l'hypotenuſe, parce que $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ adjoutè à $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$ fait a l'hypotenuſe, donc l'hypotenuſe eſt compoſee de 2 nombres entiers qui ſont entre eux comme quarrè a quarrè. De plus la difference de ces moitiez c'eſt a dire $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ moins $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, fait b le coſtè impair. donc &c.

Maintenant il eſt aiſè de montrer que ces nombres entiers qui compoſent l'hypotenuſe, ſont des quarrez premiers entre eux. parce que s'ils avoient une commune meſure, elle meſureroit auſſi leur ſomme et leur difference qui ſont l'hypotenuſe et le coſtè impair, et ainſi le triangle ne ſeroit pas primitif, contre l'hypotheſe.

---

[4]) Il s'agit de la „Proposition XIX": „En tout Triangle rectangle primitif, l'un des deux costez est pair, & l'autre impair, & l'hypoténuse est aussi un nombre impair".

III.

A PARIS (JUILLET 1671 – JUILLET 1676)

III, 1.

QUESTION DES SIGNES DANS LES EQUATIONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE [1]).

[1672]

Parabola $ax \infty yy$ [Fig. 66]. Si $+x$ fit $+y$ vel $-y$.

[Fig. 66]

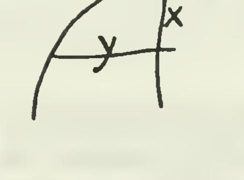
Si $-x$ eſt impoſſibile, nam y non poteſt habere $+$ nec $-$.

Parabola cubica $aax \infty y^3$ [Fig. 67].

Si $+x$ fit $+y$.

Si $-x$ fit neceſſario $-y$, ut fiat $-y^3$. Etc.

[Fig. 67]



Comparez la Pièce IV, 2 qui suit.

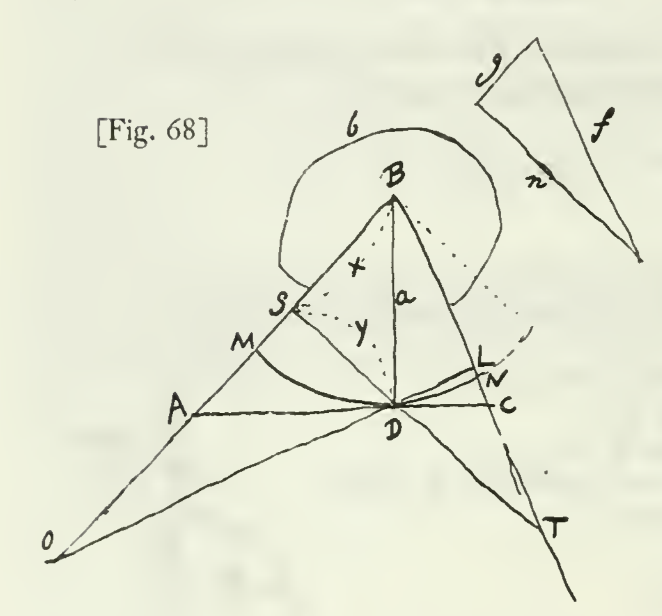
[1]) Manuscrit D, p. 308, avril 1672.

III, 2.

TROIS PROBLÈMES SUR LE TRIANGLE.

[1673—1674]

A[2]). Propofitum a d°. de Maubuiffon[3]). Data fumma laterum duorum trianguli, angulo ab ijs comprehenfo, et perpendiculari ab eodem angulo in bafin, invenire triangulum.



[Fig. 68]

Sive dato fectore circuli [Fig. 68], aptare inter ipfius latera producta rectam quæ circumferentiam tangat et faciat fummam abfciffcrum laterum æqualem lineæ datæ.

Ce probleme eftoit defia refolu vers le commencement de ce livre[2]), et trouvè plan[4]).

Summa laterum AB, BC trianguli ABC data fit ∞ *b*. Perpendicularis BD ∞ *a*. Et angulus ABC datus.

Ponatur inventum in arcu MDN punctum D per quod ducenda fit AC ut fiat triangulum quæfitum. Sit DS perpendicularis in BA, et BS ∞ *x*. SD ∞ *y*. Producatur SD donec occurrat productæ BC in T. Sit etiam ODL perpendicularis in BC.

---

[2]) Manuscrit D, p. 420—425, août, septembre ou octobre 1673. Ces pages suivent celles (p. 418—419) où Huygens traite de la „Problematis Alhazeni analysis brevissima" (comparez le début de l'Appendice II à la p. 330 qui précède); ce sont surtout les solutions de ce problème qui le familiarisèrent avec les équations du deuxième degré représentant des hyperboles.

Il avait d'ailleurs déjà considéré le même problème vers la fin de 1668 (Manuscrit D, p. 113 et suiv.).

[3]) Voyez la p. 410 du T. VII où Huygens dit avoir visité M. de Maubuisson, qui ne nous est pas connu autrement, en janvier 1675.

[4]) Voyez la note 6 de la p. 425 qui suit.

SB	BD	BD			BC	BD	BD	
x	a	a	$\frac{aa}{x}$ BA		$b - \frac{aa}{x}$	a	a	$\frac{aax}{bx - aa}$ BL

$$\frac{\text{ex } b}{b - \frac{aa}{x}} \text{ BC}$$

	DS				OB	
g	n	y	$\frac{ny}{g}$ SO	f — g	$\frac{ny}{g} + x$	$\frac{ny + gx}{f}$ BL

$$\frac{x}{\frac{ny}{g} + x} \text{ OB} \qquad \frac{aax}{bx - aa} \infty \frac{ny + gx}{f} \text{ BL}$$

fit $\frac{-nxy}{a} + \frac{fax + aax}{b} + \frac{any}{b} \infty xx$ Sit $g \infty a$

Sit $f + a \infty d$ $\frac{-nxy}{a} + \frac{dax}{b} + \frac{any}{b} \infty xx$ hyperbola

Quia igitur locus puncti D est hyperbola data, ejusdemque puncti D locus est circumferentia data MDN, erit ad intersectionem utriusque.

Si angulus ABC rectus, erunt termini in quibus g infinite parvi, ideoque tunc

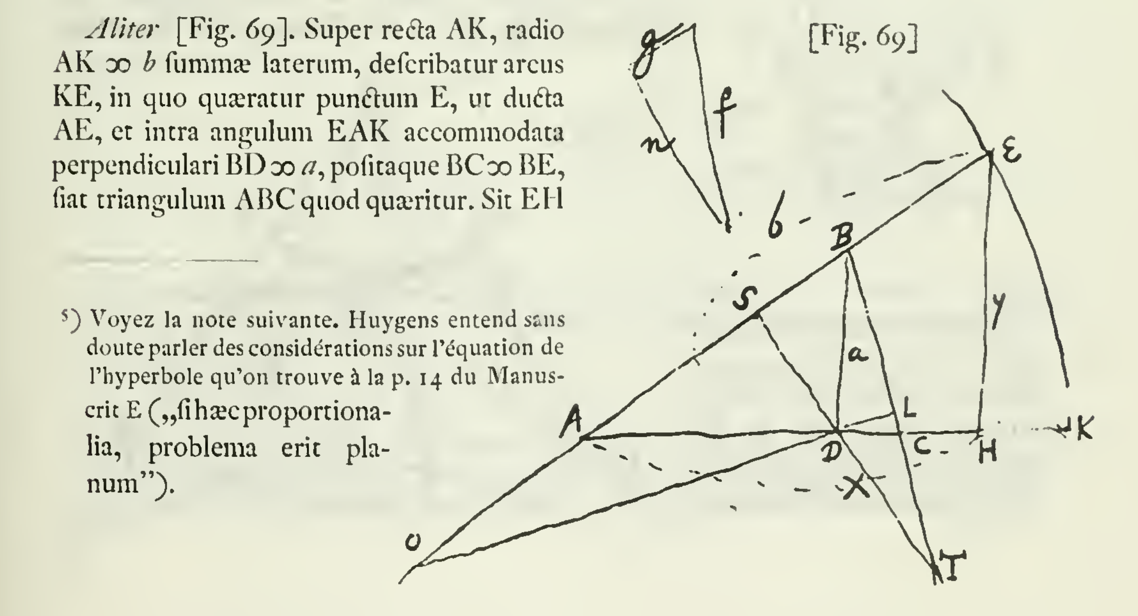
$$faax \infty bnxy - aany$$

sed et $f \infty n$, ergo $\frac{aax + aay}{b} \infty xy$ locus hyperbola.

Remarque ajoutée plus tard:

A° 1680. Facto examine per regulam in libro E traditam, invenitur problema planum esse, quia nempe regula ostendit punctum B esse in axe hyperbolæ [5]).

Aliter [Fig. 69]. Super recta AK, radio AK ∞ b summæ laterum, describatur arcus KE, in quo quæratur punctum E, ut ducta AE, et intra angulum EAK accommodata perpendiculari BD ∞ a, positaque BC ∞ BE, fiat triangulum ABC quod quæritur. Sit EH



[Fig. 69]

[5]) Voyez la note suivante. Huygens entend sans doute parler des considérations sur l'équation de l'hyperbole qu'on trouve à la p. 14 du Manuscrit E („si hæc proportionalia, problema erit planum").

perpend. AK. et AH ∞ x, HE ∞ y, reliqua conſtruantur ut prius.

DS SO

$$g \vdash n — \frac{ax}{b} \Big/ \frac{nax}{gb}$$

EA AH BD DS

$$b \vdash x — a \Big/ \frac{ax}{b}$$

BD

$$b \vdash y — a \Big/ \frac{ay}{b}\ \text{BS}$$

HE EA DB BA

$$y \vdash b — a \Big/ \frac{ab}{y}$$

$$f \vdash g — \frac{nax}{gb} + \frac{ay}{b} \Big/ \frac{nax + gay}{bf}\ \text{BL}$$

Ergo $b - \frac{ab}{y} \infty$ BC

BC BD BD

$$b - \frac{ab}{y} \vdash a — a \Big/ \frac{aay}{by - ab}\ \text{BL}$$

$$\frac{nax + gay}{bf} \infty \frac{aay}{by - ab}$$

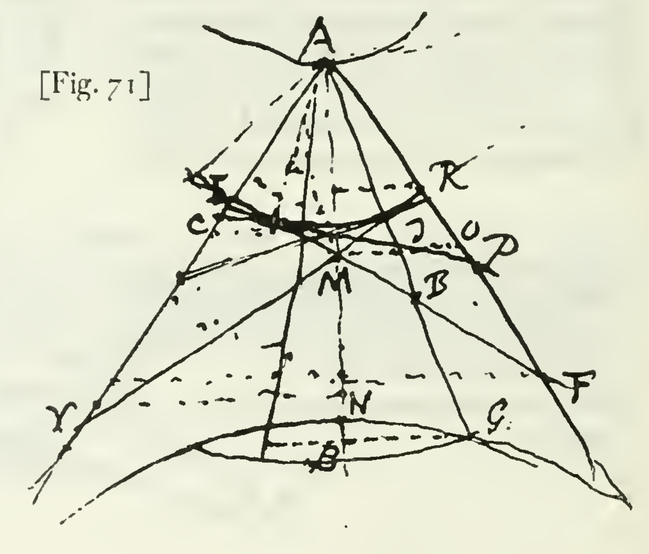
Sit $g \infty a$, ſit $a + f \infty d$ $\quad yy \infty -\frac{nxy}{a} + dy + nx$

$$y \infty -\tfrac{1}{2}\frac{nx}{a} + \tfrac{1}{2}d + \sqrt{\tfrac{1}{4}dd - \tfrac{1}{2}\frac{dnx}{a} + nx + \tfrac{1}{4}\frac{nnx^2}{aa}}$$ hyperbola

Conſtructio problematis folij præced.

[Fig. 70]

Angulus datus IAR [Fig. 70]. Perpendic. AR ∞ AI. RY perpend. AR. AC perpend. AI. IM parall. AC. IM, MY ſunt aſymptoti. Hyperbola tranſit per A, altera oppoſit [arum ſectionum]. AG ∞ ſummæ laterum. AG ſecat hyperbolam. BC ∞ BG. Triang. ABC quæſitum.



[Fig. 71]

Melius. [Fig. 71]. Sit angulus datus CAR, perpendicularis data ∞ AI vel AR. Summa laterum AG. Sit IF perpend. AI. Et RY perpend. AR. Interſectio in M eſt cen-

trum oppoſitarum ſectionum. Aſymptoti RY, IF. A puncto in hyperbola cui oppoſita NG (ſcilicet ſumpta MN ∞ MA) ſecabit circumf. radio AG deſcriptam in G. Eritque ductâ AG quæ ſecat IF in B, alterum latus trianguli quæſiti AB, alterum BG. Sumtiſque AP ∞ AB, et AC ∞ BG, junctâque CP, erit ipſum triangulum CAP. Cum centrum circumfæ ſit in axe hyperbolæ conſtat hinc problema eſſe planum [6]).

MO ∞ d, AN ∞ $2a$, AG ∞ b, Aβ ∞ x.

$$aa \;\text{—}\!\!\!\text{|}\text{—}\; dd \;\text{——}\; xx - 2ax \;\text{—}\!\!\!\text{|}\text{—}\; \frac{ddxx - 2addx}{aa} \quad \text{qu. } \beta G \Big\} \text{ ad.}$$

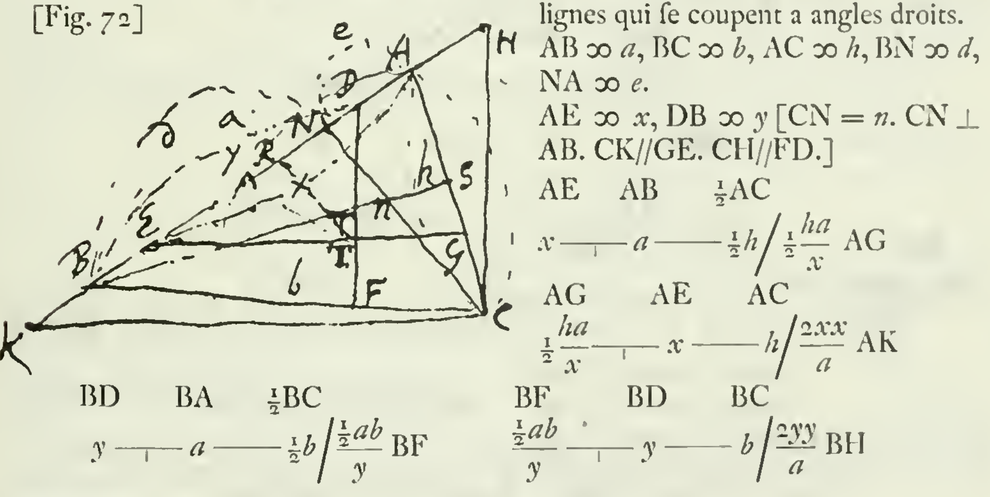
$$xx \quad \text{qu. A}\beta$$

$$\frac{ddxx + aaxx - 2addx}{aa} \infty\ bb \text{ qu. AG}$$

$$xx \infty \frac{2addx + aabb}{aa + dd}$$

B [7]). Couper un triangle donnè ABC [Fig. 72] en 4 parties egales par deux lignes qui ſe coupent a angles droits.

[Fig. 72]



AB ∞ a, BC ∞ b, AC ∞ h, BN ∞ d, NA ∞ e.

AE ∞ x, DB ∞ y [CN = n. CN ⊥ AB. CK//GE. CH//FD.]

AE AB $\frac{1}{2}$AC

$$x \;\text{—|—}\; a \;\text{——}\; \tfrac{1}{2}h \Big/ \tfrac{1}{2}\frac{ha}{x} \text{ AG}$$

AG AE AC

$$\tfrac{1}{2}\frac{ha}{x} \;\text{—|—}\; x \;\text{——}\; h \Big/ \frac{2xx}{a} \text{ AK}$$

BD BA $\frac{1}{2}$BC

$$y \;\text{—|—}\; a \;\text{——}\; \tfrac{1}{2}b \Big/ \frac{\frac{1}{2}ab}{y} \text{ BF}$$

BF BD BC

$$\frac{\frac{1}{2}ab}{y} \;\text{—|—}\; y \;\text{——}\; b \Big/ \frac{2yy}{a} \text{ BH}$$

---

[6]) Ailleurs (Chartæ mathematicæ, f. 139, voyez ſur cette feuille la note ſuivante) Huygens écrit de même: Problema Pappi apparet hinc planum eſſe quod centrum circuli BE cadat in axem hyperbolæ OA.

Voyez ſur Pappus et les problèmes plans les p. 15—16, 213 et 240 du T. XI, 7, 82 et 107—108 du T. XII, et 421 du T. XIV.

[7]) Chartæ mathematicæ, f. 139 et Manuſcrit D p. 427—433 et 435—436, août, ſeptembre ou octobre 1673. La Fig. 72 eſt empruntée à la f. 139 nommée, qui doit avoir fait partie du Manuſcrit D: les calculs de la p. 427 ſe rapportent à cette figure. Deux feuillets qui précédaient la

$\frac{1}{2}a$ —— AE ut AG —— AC ut AE —— AK

$\frac{2xx}{a} - a$ BK

d BN

$\frac{2xx - aa + ad}{a}$ KN

$\frac{2xx}{a}$ AK

$\left.\begin{array}{c}\frac{2yy + 2xx}{a} \\ a\end{array}\right\}$ ſubtr.

$\frac{2yy + 2xx - aa}{a}$ KH

$\frac{4x^4}{aa} - 4xx + aa$ qu. BK

bb qu. BC

$\frac{4dxx}{a} - 2ad$ $2\,\square$ KBN

$$\sqrt{\frac{4x^4}{aa} - 4xx + \frac{4dxx}{a} + aa + bb - 2ad} \infty \text{KC}$$

$$\sqrt{\frac{4x^4}{aa} - 4xx + \frac{4dxx}{a} + hh} \infty \text{KC} \infty z$$

AK KC AE

$\frac{2xx}{a}$ —— z —— x / $\frac{az}{2x}$ EG

ED EA $\frac{1}{2}$EG / ET

$x - a + y$ —— x —— $\frac{az}{4x}$ / $\frac{az}{4x - 4a + 4y}$

KH KC DE

$\frac{2yy + 2xx - aa}{a}$ —— z —— $x - a + y$ / $\frac{azx - a^2z + zya}{2yy + 2xx - aa}$ ET ∞ $\frac{az}{4x - 4a + 4y}$

$$\begin{array}{l} 4axx - 4aax + 4axy \\ - 4aax + 4a^3 - 4aay \\ + 4axy - 4aay + 4ayy \end{array} \infty 2ayy + 2axx - a^3$$

$$2axx - 8aax + 8axy - 8aay + 2ayy + 5a^3 \infty 0$$

$$xx \infty 4ax - 4xy + 4ay - yy - \tfrac{5}{2}aa$$

$$x \infty 2a - 2y + \sqrt{\tfrac{3}{2}aa - 4ay + 3yy}$$ bon. ad hyperbolam.

p. 427 du Manuscrit D ont été coupés. À la p. 427 Huygens écrit inventum pag. præced. à propos d'une certaine équation de la f. 139. Nous remarquons encore qu'on voit dans la f. 139 nommée le même filigrane que dans les feuillets 429—430 et 433—434 (et beaucoup d'autres feuillets) du Manuscrit D.

Hæc una æquatio. Jam inventio alterius ſequitur conſiderando ſectionem fieri ad angulos rectos.

$$\begin{array}{ccccc} \text{BF} & & \text{BD} & & \text{BC} \\ \frac{\frac{1}{2}ab}{y} & \text{———} & y & \text{———} & b \end{array} \Bigg/ \left.\begin{array}{ll} \frac{2yy}{a} & \text{BH} \\ a & \text{BA} \end{array}\right\} \text{s.}$$

$$\frac{2yy - aa}{a} \quad \text{AH}$$

$$\begin{array}{ll} \frac{4y^4 - 4aayy + a^4}{aa} & \text{qu. AH} \\ hh & \text{qu. AC} \\ \frac{4eyy - 2eaa}{a} & 2 \square \text{ HAN} \end{array}$$

$$\frac{4y^4}{aa} - 4yy + \frac{4eyy}{a} + aa + hh - 2ea \ \text{qu. CH.}$$

qu. CH + qu. CK (factum ad ſimilitudinem qu. CH) ∞ qu. HK

$$\frac{4y^4}{aa} - 4yy + \frac{4eyy}{aa} + hh + \frac{4x^4}{aa} - 4xx + \frac{4dxx}{a} + bb \infty 4y^4 + 8yyxx - 4aayy + 4x^4 - 4aaxx + a^4$$

$$\frac{4eyy}{a} + \frac{4dxx}{a} + bb + hh \infty \frac{8yyxx}{aa} + aa$$

$$bb + hh - aa \infty 2hh - 2ae \qquad \frac{2eyy}{a} + \frac{2dxx}{a} + hh - ae \infty \frac{4xxyy}{aa}$$

Videndum quæ natura curvæ hujus loci.

Poſant $x \infty y$, Huygens tire de ſa première équation $x \infty 2a - 2y + \sqrt{\frac{3}{2}aa - 4ay + 3yy}$ la valeur $y \infty \frac{5}{6}a$. Subſtituant cette valeur de x et de y dans ſa deuxième équation, où $e = d = \frac{1}{2}a$, il obtient

$$162hh + 162bb \infty 337aa.$$

Sit $h \infty b$ ad inveniendum quantitatem rectæ quæ ab angulo verticis ad mediam baſin ducitur.

$$bb \infty \frac{337}{324} aa$$

[Sit] $aa \infty 324$. Ergo $a \infty 18$. $bb \infty 337$

$$\begin{array}{ccccc} \text{AB} & & \text{NC} & & \\ a & \text{——} & \sqrt{bb - \frac{1}{4}aa} & \text{——} & \text{18 ad 16 ſive 9 ad 8.} \end{array}$$

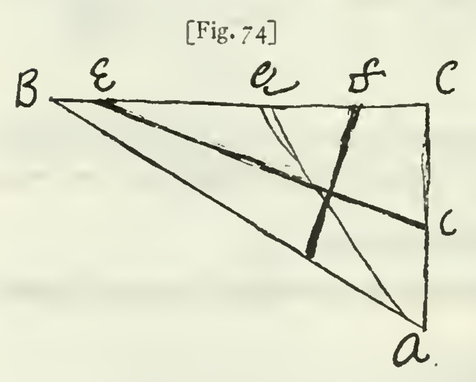
Quand dans un triangle la raifon de AB a NC qui eſt menee de l'angle oppofè au point de bifection de la bafe AB eſt de 9 à 8, l'on aura les points D et E dont il faut mener les lignes cherchees DF, EG, en prenant AD et BE chacune $\frac{1}{6}$ de AB. Car en menant DF, EG en forte qu'elles coupent chacune le triangle en 2 parties egales, elles fe couperont a angles droits et diviferont le triangle en 4 parties egales. Ce cas a eſtè remarquè par M. Maubuiffon.

Nous obfervons (voyez fur ce fujet le dernier alinéa de la note 8) que les calculs de Huygens qui précèdent ne démontrent ce théorème plus général de Maubuiffon que dans le cas où le triangle eſt ifofcèle. Avant de fuppofer AC = BC, Huygens avait déjà pris dans la Fig. 72 NC comme une perpendiculaire à la bafe AB et non pas comme la droite „menee de l'angle oppofè au point de bifection de la bafe" [8]).

$$\frac{2xx}{a} - e \quad \text{KN}$$
$$\frac{2yy}{a} - d \quad \text{HN}$$
$$\frac{4xxyy}{aa} - \frac{2eyy}{a} - \frac{2dxx}{a} + ed \propto nn$$
$$xxyy - \tfrac{1}{2}aeyy - \tfrac{1}{2}adxx + \tfrac{1}{4}aade \propto \tfrac{1}{4}aann$$
$$\tfrac{1}{2}an \propto \sqrt{xx - \tfrac{1}{2}ae}\,\sqrt{yy - \tfrac{1}{2}ad}. \text{ Hinc descriptio curvæ.}$$

[8]) Une feuille séparée qui se trouve dans le Manuscrit D contient encore la figure 74 et quelques équations qui ne sont pas de la main de Huygens, non plus que les lettres de la figure. Est-ce la main de Maubuisson? Cela semble probable.

[Fig. 74]



Une de ces équations (à laquelle satisfait $x = \frac{5}{8}a$ lorsque $y = x$) $xx \parallel 8ay + 8ax - 4yx - 10aa - yy$ (où $\parallel$ désigne l'égalité des deux membres) correspond à la première équation de Huygens $xx \propto 4ax - 4xy + 4ay - yy - \frac{5}{2}aa$, lorsqu'on y change a en $2a$. On trouve en effet sur la feuille les indications BF $\parallel x$, CE $\parallel y$, BC $\parallel 2a$ [Fig. 74], tandis que chez Huygens [Fig. 72] le côté BA qui correspond à BC de la Fig. 74 était égal à a.

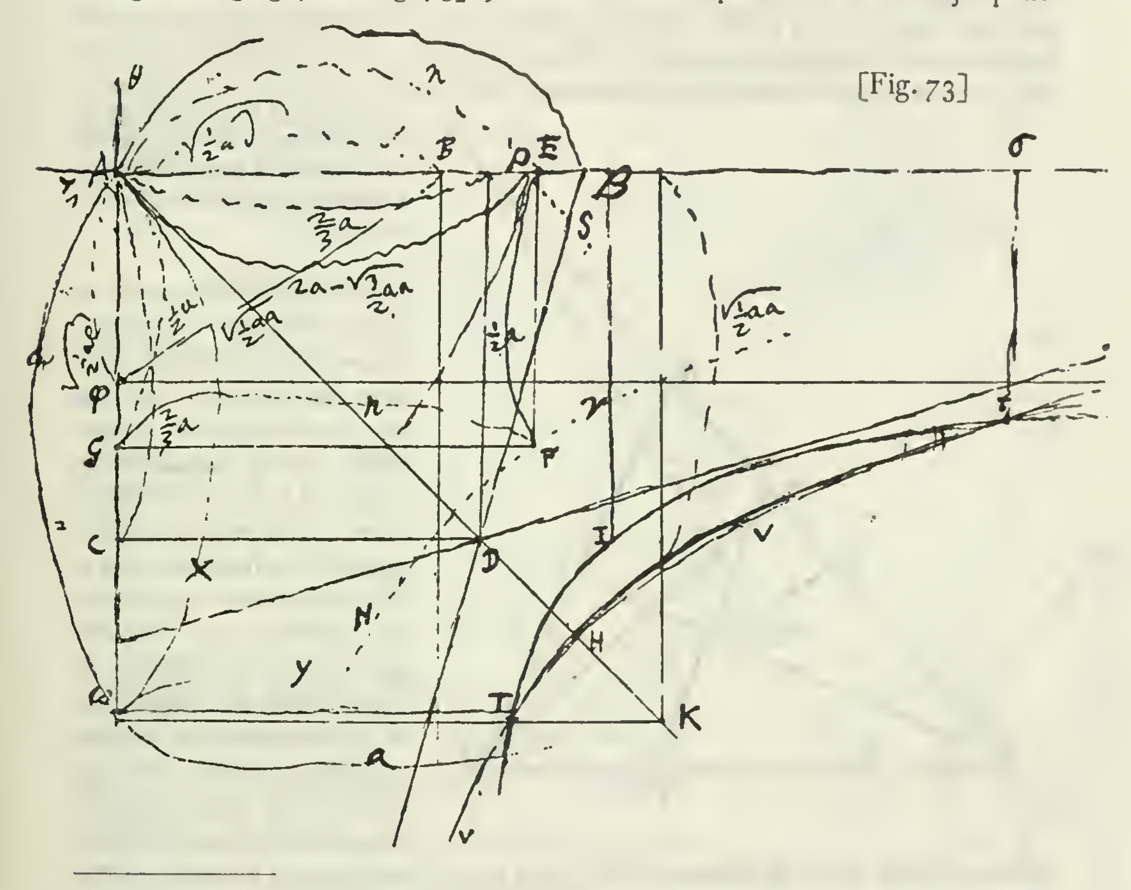
Huygens y a ajouté ce qui suit: BC bifariam in Q. Ratio BC in QA ut 9 ad 8. Sumantur BF et CE mediæ proportionales inter BQ et BQ + QA. fiunt fingulæ BE, FC $\propto \frac{1}{6}$ BC.

Nous ignorons si Huygens a remarqué qu'on peut passer du cas considéré par lui au cas plus général considéré par Maubuisson en projetant son triangle isoscèle sur un plan quelconque

C'eſt une autre forme de la deuxième équation trouvée plus haut: Huygens obſerve: Nota quod

$$nn - ed \infty \frac{bb + hh - aa}{2} \text{ ſive qu. NC} - \square \text{ BNA} \infty \frac{\text{qu. AC} + \text{CB} - \text{qu. AB}}{2}.$$

Ex prima æquatione concurſus linearum x et y ſuper rectis AB, AC [Fig. 73] perpendiculariter ductarum eſt ad hyperbolam VHV quæ eadem manet manente baſi trianguli AB [Fig. 72 et Fig. 73] [9]). Ex altera vero æquatione concurſus ejus punc-



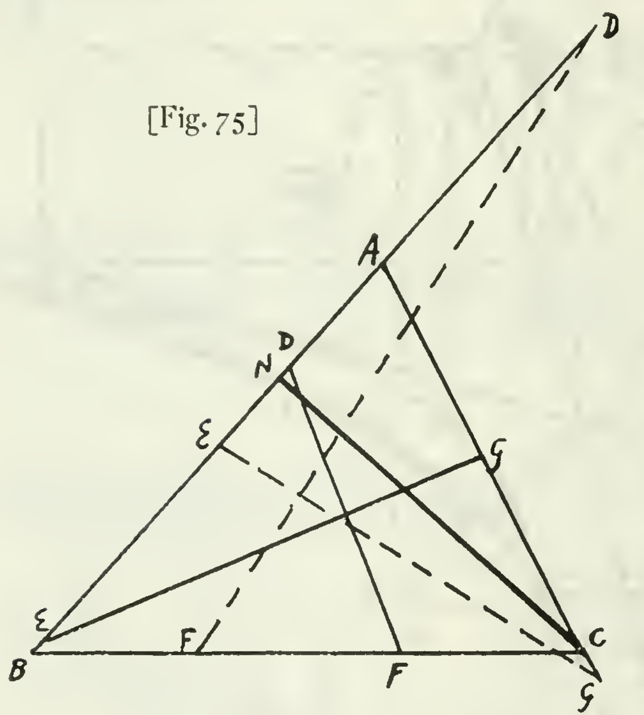
[Fig. 73]

parallèle à l'une des deux sécantes orthogonales entr'elles considérées qui divisent le triangle isoscèle en quatre parties égales. En effet le rapport entre la base et la médiane correspondante, qui était de 9 à 8, reste le même après la projection puisque ces deux lignes font l'une et l'autre dans le triangle isoscèle des angles de 45° avec les sécantes. Il résulte de cette démonstration, ce qui n'est pas de toute évidence dans la Fig. 74, que dans le cas considéré par Maubuisson les sécantes orthogonales se coupent toujours sur la médiane et sont toujours parallèles aux bissectrices des angles Q.

[9]) Puisque cette première équation, celle de l'hyperbole, ne contient d'autre paramètre que a.

tum eſt ad curvam TI, quæ deſcribitur ope hyperbolæ FN cujus rectangulum habet latera $\frac{1}{2}a$ et n. Nam ſumpta Aω ∞ x ad arbitrium, auferatur à qu° Aω qu. Aϕ ∞ $\frac{1}{2}ae$ et reſidui radici ſit æqualis Aβ, et applicetur $\beta\gamma$ ad hyperbolam FN. Et addatur qu° $\beta\gamma$ qu. AB ∞ $\frac{1}{2}ad$, ſummæ radix erit ωT ∞ y. Ita enim ▭ ſub Aβ ∞ $\sqrt{xx-\frac{1}{2}ae}$ et ſub $\beta\gamma$ ∞ $\sqrt{yy-\frac{1}{2}ad}$ erit æquale $\frac{1}{2}an$ ſive AF.

Jam interſectio igitur hyperbolæ HV et curvæ TI indicabit y ∞ T ω, et x ∞ ω A. Debet autem interſectio cadere intra quadratum AK cujus latera ∞ a baſi dati trianguli, quia nec x nec y poſſunt excedere ipſam baſin. quod ſi extra cadat, indicio eſt ſectionis puncta utraque non cadere in illam baſin, ſed in alterum e lateribus. Dans la Fig. 75 p.e. le point D tombe ſur le prolongement de la baſe BA et le point G ſur le prolongement du côté AC pour l'une des deux manières de diviſer le triangle ABC en quatre parties égales par les droites perpendiculaires entr'elles DF et EG.



[Fig. 75]

Ob æquationem $xxyy$ ∞ $\frac{1}{2}adxx + \frac{1}{2}aeyy - \frac{1}{4}aade + \frac{1}{4}aann$ videtur curva ex quatuor lineis conſtare quarum hic una deſcripta eſt, reliquæ ſimiles huic in angulis BAϑ, CAζ, ϑAB ſint deſcribendæ. Poteſt enim eadem exiſtere æquatio ſive ſumantur $+x$ et $+y$, ſive $-x$ et $-y$, ſive $+x$ et $-y$, ſive $-x$ et $+y$. Sed tres reliquæ hic inutiles videntur quia in altera æquatione ad hyperbolam non poſſunt mutari ſigna affectionis x nec y, ut maneat eadem æquatio. Ergo hic ea tantum interſectio utilis quæ cadit intra quadrantem AK, (cadit autem nonnunquam utraque) et quæ extra ut hic t, ita ſolvit problema ut ſatisfiat poſtulatis quæ in analyſi conſideravimus, nempe ut [Fig. 72] ▭ ſub EA, AG ſit ∞ $\frac{1}{2}$ ▭ ſub BA, AC, et ▭ EDT ∞ $\frac{1}{2}$ ▭ BDF et anguli ad T recti.

C [10]). Data base trianguli AB ∞ *a* [Fig. 76] angulo ad basin BAC et rectangulo a lateribus ACB, invenire triangulum.

[Fig. 76]

CG perpend. AB. Ratio CG ad GA et ad CA data est, sit CG ad GA ut *a* ad *b*, et CG ad CA ut *a* ad *c*.

ut CG ad GA FD

$a \;\text{—}\; b \;\text{—}\; y \;\Big|\; \frac{by}{a}$ DE

ut CG ad CA FD

$a \;\text{—}\; c \;\text{—}\; y \;\Big|\; \frac{cy}{a}$ EF } m.

$x + \frac{by}{a}$ EB a FB

cy ☐ EFB

qu. EB — ☐ EFB — qu. AB — ☐ ACB datum cp

$$xx + \frac{2bxy}{a} + \frac{bbyy}{aa} \;\text{—}\; cy \;\text{—}\; aa \;\text{—}\; cp$$

$$pxx + \frac{2pbxy}{a} + \frac{pbbyy}{aa} \infty aay$$

[Fig. 77]

Sit $\frac{a^4}{pbb} \infty 2q$

$$yy \infty \frac{a^4 y}{pbb} - \frac{2axy}{b} - \frac{aaxx}{bb}$$

$$yy \infty 2qy - \frac{2axy}{b} - \frac{aaxx}{bb}$$

$$y \infty q - \frac{ax}{b} \;\&\; \sqrt{qq - \frac{2aqx}{b}} \text{ parabola}$$

Constructio. Angulus datus BAQ [Fig. 77]. BQ perpend. AB. Ut AR, *p* ad BQ, $\frac{aa}{b}$ ita hæc ad aliam $\frac{a^4}{pbb} \infty 2q$ cujus dimidium BI ∞ *q*. IL parallela AC, IM $\infty \frac{1}{2}$IL. M est vertex parabolæ. BS perpend. IL. IS $\infty \frac{aq}{c}$, $\frac{1}{2}$ latus rectum. Diameter parabolæ MI. F intersectio parabolæ et circumferentiæ centro B radio BA descriptæ. BF recta secans AQ in C. Triangulum quæsitum est ACB. Parabola transit per punctum B.

[10]) Manuscrit E, p. 14—15, datant probablement de la fin de 1674 (la p. 26 porte la date du 19 Dec. 1674).

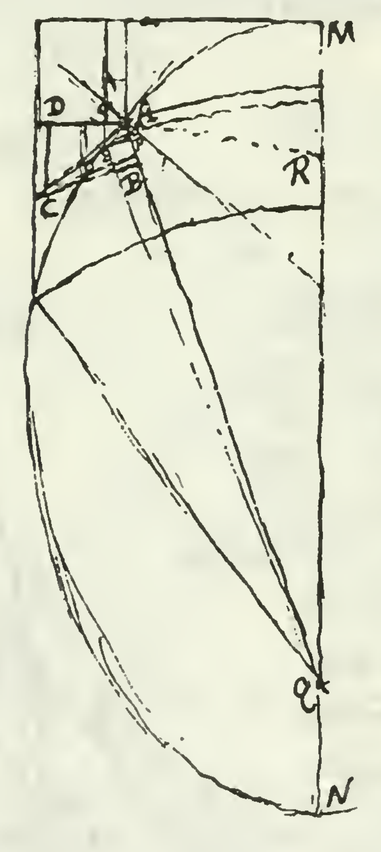
III, 3. [1])

UN THÉORÈME SUR LA TANGENTE À L'ELLIPSE.

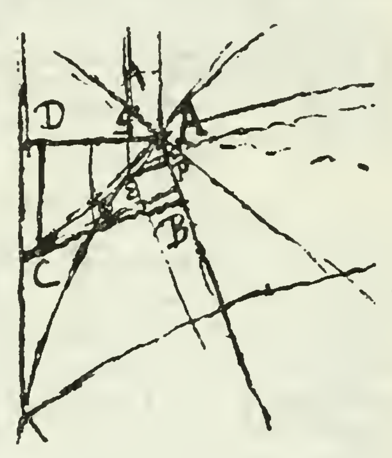
[1674 ou 1675]

Si AC [Fig. 78] tangens in A. et ducantur CB, CD perpendiculares in AQ, AD. dico esse CD ad AB ut MN ad RQ focorum distantiam.

Sive sumto puncto C in perpendiculari BC, ita ut ducta CD habeat ad AB rationem



[Fig. 78]



quam MN ad RQ, dico rectam CA tangere ellipsin. Si enim non, secet in E, ut sit recta linea CEA. Et sint ES, EP perpendiculares in AD, AQ. Ergo propter similia triangula erit et ES ad AP ut CD ad AB sive MN ad RQ. Atqui sumta QO æquale QE, erit ES ad AO ut MN ad QR. Ergo ES ad AO ut ES ad AP, quod absurdum.

Dans cette démonstration le théorème ES : QA — QE = MN : QR est supposé connu; en effet, ce théorème résulte de la proportionalité d'après Pappus du rayon vecteur (QE ou QA) à la distance du point de l'ellipse (E ou A) à sa directrice (la valeur de ce rapport étant toujours QR à MN).

---

[1]) Manuscrit E, p. 29, décembre 1674 ou janvier 1675.

III, 4 [1]).

UN PROBLÈME SUR LE QUADRILATÈRE, AVEC EXTENSION DU THÉORÈME TROUVÉ EN CETTE OCCASION SUR LE QUADRILATÈRE INSCRIT DANS UNE CIRCONFERENCE DE CERCLE, À UN POLYGONE INSCRIT QUELCONQUE.

[1675]

Ex datis quatuor lateribus trapezij et area invenire trapezium. Oportet autem et ordinem quo junguntur datum eſſe.

Ad ſolutionem opus habemus theoremate noto [2]) quo ex tribus lateribus trianguli inveſtigatur area. Nempe ſi latera ſint b, c, z oportet ducere in ſe iſta quatuor $\frac{z+b+c}{2}$, $\frac{z-b+c}{2}$, $\frac{z-c+b}{2}$, $\frac{b+c-z}{2}$, productum erit æquale quadrato areæ trianguli. Sit $b+c \infty s$. $b-c \infty t$

$$\text{Erit } \left.\begin{array}{l} \frac{z+b+c}{2} \infty \frac{s+z}{2} \\ \frac{b+c-z}{2} \infty \frac{s-z}{2} \end{array}\right\} \text{m.} \qquad \left.\begin{array}{l} \frac{z-b+c}{2} \infty \frac{z-t}{2} \\ \frac{z-c+b}{2} \infty \frac{z+t}{2} \end{array}\right\}$$

$$\frac{ss-zz}{4} \qquad \frac{zz-tt}{4}$$

$$\frac{ss-zz}{4}$$

$$\text{quadr. areæ } \triangle^{i} \ \frac{sszz-sstt-z^4+zztt}{16}$$

[1]) Manuscrit E, p. 44—50, juillet, août ou septembre 1675 (voyez sur cette date la note 1 de la p. 441 qui suit), et Chartæ mathematicæ, f. 91—93. Après la p. 50 du Manuscrit E six feuillets ont été coupés. Les trois ou quatre premiers sont évidemment les f. 91—93 des Chartæ mathematicæ (l'une des feuilles est composée de deux feuillets collés l'un sur l'autre): on trouve sur leurs premières pages les n°s 3, 4, 5 de la main de Huygens, tandis que les p. 49 et 50 du Manuscrit E portent les n°s 1 et 2. Nous publions le texte des Chartæ mathematicæ; voyez sur celui du Manuscrit E la note 13 de la p. 437 et la fin de la p. 440.

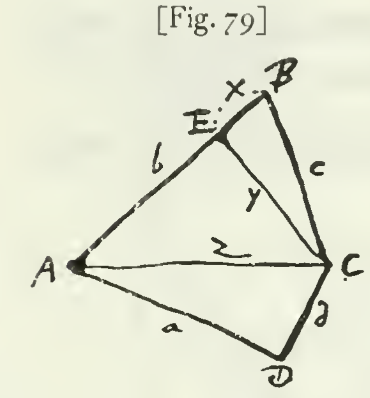
Il s'agit ici d'un problème déjà posé et résolu en 1661 par G. Schott: voyez la p. 435 de notre T. III. Cette pièce n'avait pas été envoyée directement à Huygens, puisque la lettre de Schott (T. III, no 938) n'était pas adressée à Huygens mais à Vegelin van Clærbergen (voyez,

Sed quia habetur $sszz + ttzz$ eſtque $ss + tt \infty 2bb + 2cc$ ut facile apparet, erit quadr. areæ trianguli $\frac{2bbzz + 2cczz - sstt - z^4}{16}$ vel ſi $bb + cc$ dicatur oo, et st ſive $bb - cc$ dicatur gg, Erit quadr. areæ triang.ⁱ $\frac{2oozz - g^4 - z^4}{16}$.

adeo ut regula etiam hoc modo poſſit enunciari. Summa quadratorum duorum laterum ducatur in quadratum lateris reliqui, et à producti duplo auferatur quadratum differentiæ quadratorum duorum priorum laterum, una cum quadratoquadrato lateris reliqui. Reſidui pars decimaſexta erit æqualis quadrato areæ trianguli.

Sit jam trapezium cujus latera AB ∞ b; BC ∞ c, AD ∞ a, DC ∞ d. Area trapezij ∞ ee [Fig. 79].

[Fig. 79]



Ducta CE perpend.ⁱ in AB ſit BE ∞ x, EC ∞ y ut punctum C terminus lateris BC, ſi poteſt, ad locum redigatur; cujus interſectio cum circumferentia centro B radio BC deſcripta dabit determinationem puncti C; adeoque conſtructionem problematis.

Sit $bb + cc \infty oo$; $bb - cc \infty gg$; $aa + dd \infty hh$; $va - dd \infty ff$. Et ducatur diagonius AC ∞ z. Erit igitur area triang.ⁱ ADC $\sqrt{\frac{2oozz - g^4 - z^4}{16}}$ [3]) ex regula præmiſſa. addatur area △ⁱ ABC ∞ $\frac{1}{2}by$, area trapez. $\frac{1}{2}by + \sqrt{\frac{2oozz - g^4 - z^4}{16}}$ [3]) ∞ ee.

æquatio pag. præc. $\frac{1}{2}by + \sqrt{\frac{2hhzz - f^4 - z^4}{16}} \infty ee$ [4])

$$\frac{2hhzz - f^4 - z^4}{16} \infty e^4 - eeby + \tfrac{1}{4}bbyy \quad \text{ſed } yy \infty cc - xx$$

$$\frac{2hhzz - f^4 - z^4}{16} \infty e^4 - eeby + \tfrac{1}{4}bbcc - \tfrac{1}{4}bbxx$$

Atqui $zz \infty bb + cc - 2bx$ ex Euclide. Sive $zz \infty oo - 2bx$ quia $bb + cc \infty oo$.

à la p. 582 du T. IV, les Additions et Corrections au T. III). Ce dernier doit l'avoir envoyée à Huygens avec la lettre. Les p. 732—738 du T. X font voir que Huygens était en correspondance avec Vegelin van Clærbergen quoique les lettres échangées ne se trouvent pas dans la collection-Huygens de Leiden. En 1676 Huygens ne fait aucune allusion à la solution de Schott, mais il mentionne celle de Roemer (440 qui suit).

Le mot „trapezium" a le sens général de quadrilatère quelconque.

[2]) Comparez les p. 69—71 du T. XII.

[3]) Lisez: $\sqrt{\frac{2hhzz - f^4 - z^4}{16}}$.

Ergo $\frac{2hhoo - 4hhbx - f^4 - o^4 + 4oobx - 4bbxx}{16} \infty e^4 - eeby + \frac{1}{4}bbcc - \frac{1}{4}bbxx$

$$\frac{4oobx - 4hhbx + 2hhoo - f^4 - o^4}{16} \infty e^4 - eeby + \frac{1}{4}bbcc$$

$$4hhbx - 4oobx - 2hhoo + 4bbcc + 16e^4 + f^4 + o^4 \infty 16eeby$$

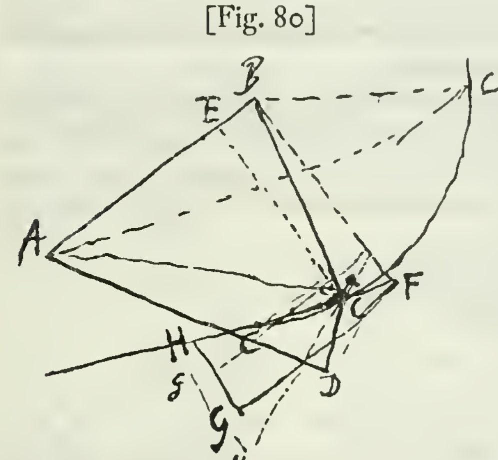
$\frac{hh - oo}{4ee}x + \frac{4bbcc + f^4 - 2hhoo + o^4}{16eeb} + \frac{ee}{b} \infty y \infty \sqrt{cc - xx}$ unde æquatio quadrata fieret si quæratur x.

vel $\frac{hhx - oox}{4ee} + \frac{8bbcc + f^4 - 2hhoo + g^4}{16eeb} + \frac{ee}{b} \infty y$ quia nempe $o^4 + 4bbcc \infty g^4 + 8bbcc$ sive $o^4 \infty g^4 + 4bbcc$.

Est ergo locus puncti C linea recta. Eritque Constructio problematis hujusmodi. Sit BF [Fig. 80] perpend. ad AB. ipsaque BF æqualis sumatur

$$\frac{-hhoo^{5)} + 8bbcc + g^4 + f^4}{16eeb} + \frac{ee}{b}$$

[Fig. 80]



ductaque FG parall. BA et in eandem partem quo tendit BA, sit FG ad ipsi perpendicularem GH, ut $4ee$ ad $hh - oo$, sumptâ GH in consequentia punctorum BF si hh majus quam oo, at in partem contrariam si hh minus quam oo [6]). deinde ducatur FH eamque secet circumf.ª radio BC ∞c, descripta centro B. Intersectio definiet locum puncti C, unde constructio reliqua manifesta est.

NB. debet BF sumi in partem contrariam si in quantitatibus ipsam BF denotantibus prævaleant signata per —.

Hic jam nunc patet [7]) quod cum circulus CC tangit FH, hoc est cum area maxima, tunc EC ad EB, ut FG ad GH, hoc est ut $4ee$ ad $hh - oo$.

---

[4]) Il s'agit de l'équation précédente à laquelle Huygens donne maintenant la forme exacte. Dès lors Huygens procède à l'élimination de la variable z.

[5]) Lisez $2hhoo$.

[6]) C'est le cas de la Fig. 80; mais cette figure montre encore les traces d'une construction antérieure où GH avait la direction de BF. Cela explique le troisième point C à droite de B qui n'appartient pas à la construction présente.

[7]) Cette remarque fut ajoutée plus tard.

Cum autem circumferentia ſecet rectam FH in duobus punctis, duplicem ſolutionem habebit problema, ſed ſciendum non ſemper duobus modis conſtrui poſſe trapezium ex ſumma duorum triangulorum ABC, ADC conſtans, quod dato ſpatio æquale ſit, ſed nonnunquam alterum ex ſumma alterum ex differentia horum triangulorum conſtitui; quod inde ſit quia in prima æquatione, ubi $\frac{1}{2}by + \sqrt{2hhzz - f^4 - z^4} \infty ee$, non referat utrum radix habeat ſignum + an —, hoc eſt an ſumma an differentia triangulorum æquetur areæ datæ ee; quia ducendo in ſe — vel + $\sqrt{2hhzz - f^4 - z^4} \infty ee - \frac{1}{2}by$, ſemper ijdem plane termini orientur.

Eſt autem limitatio hæc, quod ſi area data major ſit quam triangulum ex lateribus AB, BC, et reliquis AD, DC in unam rectam extentis effectum [8]), tunc dupliciter conſtrui poterit trapezium ex ſumma triangulorum [9]). Si vero minor dicto triangulo ſit area data, tunc vel nullum vel unum tantummodo hujuſmodi trapezium ex ſumma conſtrui poterit, eritque alterum ipſi æquale ex differentia triangulorum ABC, ADC. Aliquando [10]) nullum nec ex differentia conſtrui poterit.

Quod ſi circumferentia tangat rectam FH, ducta BC ad punctum contactus, efficietur trapezium omnium quæ fieri poſſunt maximum.

Ad inveniendam autem determinationem areæ maximæ quæ datis quatuor lateribus comprehendi poſſit, repetatur æquatio ultimo reperta, ſed brevitatis gratia ſcribatur,

A $\frac{-r^3x + s^4 + e^4}{eeb} \infty y \infty \sqrt{cc - xx}$; ponendo nempe $\frac{4hhb - 4oob}{16ee} \infty -\frac{r^3}{ee}$

ſive $\frac{hhb - oob}{4} \infty -r^3$; et $\frac{-2hhoo + g^4 + 8bbcc + f^4}{16} \infty s^4$.

---

[8]) Huygens suppose donc AB + BC > AD + DC, ce qui est permis, excepté dans le cas, qu'il n'est pas nécessaire de considérer, où AB = DC et AD = BC. De plus lorsque les segments a, b, c, d sont choisis de manière qu'ils peuvent constituer les côtés d'un quadrilatère on aura (supposant AB ≧ BC) AB — BC < AC < AD + DC. La construction du triangle en question est donc toujours possible.

[9]) Commençant par sa valeur maximale, lorsque le quadrilatère devient inscriptible au cercle, on peut diminuer graduellement l'aire donnée. Évidemment les deux quadrilatères seront alors au début égaux à la somme des triangles ABC, ADC et la transition aux autres cas ne peut arriver qu'à l'instant où l'aire de l'un de ces triangles s'annule. Toutefois cela peut toujours arriver de deux manières différentes, savoir celle envisagée par Huygens, où AC devient égale à la somme de AD et DC et, en outre, dans le cas où la différence de AB et BC est plus petite que la différence de AD et DC, celle où AC devient égale à la différence de AD et DC, ou, dans le cas contraire, celle où AC est égale à la différence de AB et BC, auxquels cas c'est l'aire du triangle ABC qui s'annule. Or, il dépend de la grandeur relative des triangles qui restent laquelle de ces manières se présentera la première. Si c'est celle de Huygens sa conclusion est juste; si c'est l'autre, elle doit être modifiée.

[10]) Cette phrase fut ajoutée plus tard.

quadrando utrinque fiet

B $(r^6 + e^4bb)xx - (2r^3s^4 + 2r^3e^4)x + s^8 + 2s^4e^4 + e^8 - ccbbe^4 \infty 0$

per Reg. Hudd. [11]) 2 1 0

$$2r^6xx + 2e^4bbxx - 2r^3s^4x - 2r^3e^4x \infty 0$$

$x \infty \dfrac{r^3s^4 + r^3e^4}{r^6 + e^4bb}$ Reſtituatur valor x in æquatione A.

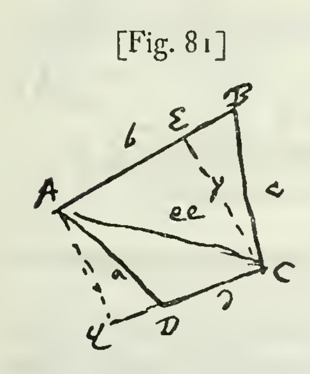
$$\frac{bees^4 + be^6}{r^6 + bee^4} \infty y$$

Cur [12]) non poſſumus hinc invenire quod x jam $\infty \dfrac{bbc + c^3 - caa - cdd}{2ad + 2bc}$? ut revera eſt, æquè ac cum circulo inſcribitur trapezium ut inventum eſt pagina 2 [13]).

NB. [14]) eſſe hic x ad y ſicut r^3 ad bee hoc eſt ut $\dfrac{oo - hh}{4}$ ad ee. Hoc oſtendendum eſſet ita quoque ſe habere cum trapezium eſt in circulo. tunc enim regula inde exiſteret, quæ fol. ſequ. in fine habetur, ad inveniendam aream trapezij in circulo.

Si valor x reſtituatur in æquatione B, habebitur area ee maxima determinata per latera trapezij data, ſed fiet æquatio in qua e^{12}, e^8, e^4. quæ non facile diviſibilis cognoscetur etſi revera ſit diviſibilis. Et licet jam reducta ponatur, nondum conſtabit an trapezium omnium maximum ſit illud quod in circulo inſcribatur. Quod hac via itaque inquirere inſtitui.

[Fig. 81]



Si trapezium ABCD [Fig. 81] eſt in circulo; poſitis nominibus laterum ut ſupra, et area ee, ductaque perpend.^i CE $\infty\, y$: ſi porro ducatur perpend. AQ in latus productum CD, erit AQ $\infty \dfrac{ay}{c}$ quia triang.^a CBE, ADQ ſunt ſimilia, ut facile apparet.

itaque additis triang.^is ABC $\frac{1}{2}by$

ADC $\frac{1}{2}\dfrac{ady}{c}$

erit ſumma $\frac{1}{2}by + \frac{1}{2}\dfrac{ady}{c} \infty ee$

---

[11]) Il s'agit d'une application de la méthode de Hudde exposée dans son „Epistola secunda de maximis et minimis" qui fut publiée par van Schooten p. 507—515 de l'édition de 1659 de la „Geometria" de Descartes. Elle est basée sur la considération que pour la valeur maximale de e l'équation en x aura des racines égales. Comparez la Pièce II qui précède (p. 223 et suiv.).

[12]) Cette phrase fut ajoutée plus tard.

[13]) C'est la p. 50 du Manuscrit E (comparez la note 1 de la p. 433). Le raisonnement de Huygens, appliqué à la Fig. 81, revient à ce qui suit. On a QD $= \dfrac{a}{c}$. BE $= \dfrac{ax}{c}$, et ensuite AC$^2 = b^2 + c^2 - 2bx = a^2 + d^2 + \dfrac{2ad}{c}x$; équation qui conduit à l'expression désirée.

Ergo cum trapezium eſt in circulo ſit $y \propto \frac{2cee}{ad+bc}$, non tamen cum hæc æqualia trapezium eſt in circulo, quia non conſideravi baſin communem eſſe AC.

Cum vero trapezium eſt maximum ſit $y \propto \frac{bees^4+be^6}{r^6+bbe^4}$.

Sit igitur oportet $\frac{2cee}{ad+bc} \propto \frac{bees^4+be^6}{r^6+bbe^4}$, unde $e^4 \propto \frac{adbs^4+bbcs^4-2cr^6}{bbc-bad}$.

Quod ſi jam hæc æquatio ſit regula ad inveniendam aream trapezij circulo inſcripti; concludam inde idem trapezium circulo inſcriptum eſſe maximum. Si enim, cum trapezium eſt in circulo, ſit $e^4 \propto adbs^4$ &c. hoc eſt, $\frac{2cee}{ad+bc} \propto \frac{bees^4+be^6}{r^6+bbe^4}$; eſt autem, cum trapezium in circulo, $\frac{2cee}{ad+bc} \propto y$. Ergo, cum trapezium in circulo, erit et $\frac{bees^4+be^6}{r^6+bbe^4} \propto y$; hoc autem cum ſit, efficitur trapezium maximum. Ergo, cum trapezium in circulo, fiet trapezium maximum. Reſtat itaque examinandum an æquatio ultimo inventa contineat regulam ad inveniendam aream trapezij in circulo. Quod quidem ita ſe habere comperi. Nam reſtituto primum valore r^3 et s^4, ſecundum ea quibus æqualia poſita fuere, ac deinde reſtituto etiam valore hh, oo, ff et gg, invenitur diviſionem fieri poſſe per $bc-ad$, et ſit

$$e^4 \propto \frac{-a^4-d^4-c^4-b^4+2bbcc+2aadd+2aacc+2bbdd+2ccdd+8adbc}{16}$$ [15]).

Et rurſus abbreviando

$$16e^4 \propto 2hhoo-f^4-g^4+8adbc$$ [16]).

Sed quia $f^4 \propto h^4-4aadd$ et $g^4 \propto o^4-4bbcc$, ut facile colligitur quia $bb+cc \propto oo$; $bb-cc \propto gg$; $aa+dd \propto hh$; $aa-dd \propto ff$, fit $16e^4 \propto 2hhoo-h^4-o^4+4aadd+4bbcc+8adbc$.

$16e^4 \propto -$ qu. $hh-oo+$ qu. $2ad+2bc$. Convenit [17]) cum Regula qua invenitur area trapezij in Circulo. quæ regula reperitur pag. verſa [18]).

$16e^4 \propto -$ qu. $aa+dd-bb-cc+$ qu. $2ad+2bc$, ut autem habeatur differentia quadratorum ab his radicibus, multiplicetur ſumma radicum in ipſarum differentiam, hoc eſt $aa+2ad+dd-bb+2bc-cc$ in $bb+2bc+cc-aa+2ad-dd \propto 16e^4$.

---

[14]) Cet alinéa a été ajouté plus tard.

[15]) Ajoutez au numérateur: $+2aabb$. Nous avons vérifié ce résultat.

[16]) Cette réduction implique l'addition indiquée dans la note précédente.

[17]) Cette phrase fut ajoutée plus tard.

[18]) Voir la page suivante.

Quum igitur hæc regula ſit ad inveniendam aream trapezij circulo inſcripti, eadem regula erit ad inveniendam aream maximi trapezij ex quatuor datis lateribus. Nempe

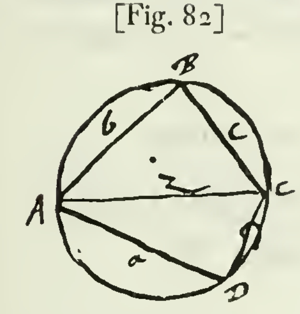
A quadrato ſummæ quorumlibet duorum laterum auferatur quadratum differentiæ duorum laterum reliquorum; et viciſſim a quadrato ſummæ horum auferatur quadratum differentiæ illorum. duo reſidua in ſe ducta dabunt quadratum areæ trapezij maximi ſexdecuplum.

Vel addantur omnia trapezij latera; à ſummæ dimidio auferantur latera ſingula; reſidua quatuor in ſe ducantur, erit producti radix qu. æqualis areæ trapezij [19]).

Hinc facile demonſtratur polygonum quodvis, inæqualium licet laterum, circulo inſcriptum maximum eſſe omnium quod ex ijſdem lateribus eodem vel alio quocunque [20]) ordine connexis confici poſſit [21]).

Trapezij circulo inſcripti aream invenire.

[Fig. 82]



$\triangle$ ABC [Fig. 82] ſecundum Regulam inventam ſuperius ubi de hac quæſtione $\infty \frac{1}{4}\sqrt{2oozz - g^4 - z^4}$ [22]).

bc [ad] ad [ut] $\triangle$ ABC ad $\triangle$ ADC.

$zz \infty \frac{ooad + hhbc}{ad + bc}$ ſecundum regulam inventu facillimam [23]).

---

[19]) Cette règle aujourd'hui si bien connue avait été donnée par Snellius sans démonstration sous la forme: „Si de dimidio collectorum laterum dati quadranguli in circulum inscripti latera sigillatim subducantur, latus continue à quatuor differentijs facti erit area"; voir la p. 139 de l'ouvrage: „Ludolphi à Ceulen De circulo & adscriptis liber. In quo plurimorum polygonorum latera per irrationalium numerorum griphos, quorum libet autem per numeros absolutos secundum Algebricorum æquationum leges explicantur. Quæ insuper accesserunt pagina versa indicabit. Omnia é vernaculo Latina fecit, & annotationibus illustravit Willebrordus Snellius R. F. Lugd. Batav. Apud Iodocum Colster Anno 1619".

On a découvert plus tard que la même règle avait déjà été formulée par le mathématicien hindou Brahmagupta qui vivait au septième siècle.

[20]) Ces trois mots furent ajoutés plus tard.

[21]) Si nous considérons un quadrilatère qui a pour sommets quatre sommets consécutifs A, B, C, D du polygone, son aire doit être maximum, afin qu'il en soit ainsi de l'aire du polygone. Le cercle qui passe par A, B, C doit donc passer par D; donc aussi par E, etc.

[22]) Voir la p. 434.

[23]) La règle se déduit en effet facilement des relations mentionnées dans la note 13 de la p. 437.

$$[\triangle ABC] \infty \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{2o^4ad + 2oohhbc}{ad+bc} - g^4 - \frac{o^4aadd + 2oohhadbc + h^4bbcc}{aadd + 2adbc + bbcc}}$$

$\dfrac{ad\sqrt{.} + bc\sqrt{.}}{bc} \infty$ 4 trapez. ABCD, five $4ee$, fi area trapezij vocetur ee.

($\sqrt{.}$ fignificat hic illam radicem quæ eft valor trianguli ABC) [24]).

$$\text{qu. } \overline{\frac{ad+bc}{bbcc}} \text{ in } \sqrt{.}\,\sqrt{.} \infty 16e^4$$

$$16e^4 \infty \frac{2o^4abcd - aaddg^4 + o^4aadd - 2adbcg^4}{bbcc} + 2oohh - g^4 - h^4$$

fed $g^4 \infty \overline{o^4 - 4bbcc}$; $16e^4 \infty 4aadd + 8adbc + 4bbcc - o^4 + 2oohh - h^4$

$16e^4 \infty \text{qu. } \overline{2ad + 2bc} - \text{qu. } \overline{oo - hh}$. Eadem atque illa paginæ præcedentis [25]).

La méthode dont Huygens fe fert dans la folution de ce problème est défignée par lui, à la p. 47 du Manuscrit E, par les mots Methodus noftra. La p. 46 donnait la Methodus Romeri. Les côtés étant $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{d}$, l'aire e et la diagonale cherchée $\sqrt{x}$ [Fig. 83], Roemer écrit:

[Fig. 83]

$\sqrt{b} - \sqrt{c} \infty \sqrt{g}$ $\quad \sqrt{a} - \sqrt{d} \infty \sqrt{n}$ $\quad hg - mn \infty rr$

$\sqrt{b} + \sqrt{c} \infty \sqrt{h}$ $\quad \sqrt{a} + \sqrt{d} \infty \sqrt{m}$ $\quad hg + mn \infty ss$

$b - c \infty \sqrt{hg}$

$2b + 2c \infty h + g$

$$2bx + 2cx - hg - xx \infty 16yy$$

fubtr. $\underline{2ax + 2dx - mn - xx \infty 16ee - 32ey + 16yy}$

$$\begin{matrix} 2bx - 2ax - hg \\ 2cx - 2dx + mn \end{matrix} \infty 32ey - 16ee$$

$$\frac{2px - rr + 16ee}{8e} \infty 4y$$

$b + c - a - d \infty p$

$b + c + a + d \infty q$ $\quad 2b + 2c \infty p + q$

$$\frac{4ppxx - 4prrx - 64peex + r^4 + 32rree + 256e^4}{64ee} \infty 2ax + 2dx - mn - xx$$

$$4ppxx - 4prrx + r^4 + 256e^4 \infty 64eeqx - 32eess - 64eexx$$

$$xx + \frac{-4prrx - 64eeqx + r^4 + 256e^4 + 32eess}{4pp + 64ee} \infty 0$$

Voyez auffi aux p. 80—81 du T. VIII une folution de A. Monforte, reçue par Huygens en 1678.

---

[24]) Lisez: $4\triangle ABC$.

[25]) Voir la p. 438.

III, 5 [1]).

LES „QUANTITEZ IMAGINAIRES".

[1675]

$$xx + 4x + 10 \begin{cases} x + 2 - \sqrt{-6} \\ x + 2 + \sqrt{-6} \end{cases} \text{ Etc.}$$

On trouve à la p. 58 du Manuscrit E la date 8 Dec. 1675. Quant à la p. 53 [1]) elle contient aussi le sommaire de la lettre du 30 septembre de Huygens à Leibniz. Nous avons publié ce sommaire, traitant e.a. des quantitez imaginaires, ainsi que la lettre, aux p. 504 et suiv. du T. VII, où l'on voit qu'on a cru devoir dater cette lettre du 30 septembre 1675. Huygens dit dans la lettre avoir esté fort longtemps hors d'exercice pour ce qui regarde [les] Equations Algebraiques [considérées]. Il ne se sent apparemment pas porté à poursuivre sérieusement l'étude des quantités imaginaires, ce qui ressort aussi plus ou moins de la plaisanterie sur les racines des équations algébriques en général par laquelle se termine le sommaire.

---

[1]) Manuscrit E, p. 53. On pourrait douter (comparez la note 1 de la p. 496 du T. XVIII) si cette page est de 1675 ou bien de 1676, mais pour la raison donnée dans le texte nous adoptons la date de septembre 1675.

IV.

À LA HAYE (JUILLET 1676 — JUIN 1678)

IV, 1.

QUESTIONS SE RAPPORTANT AU TRAITÉ „VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK".

Voyez les Pièces d'août 1676 etc. aux p. 151 et fuiv. du T. XIV.

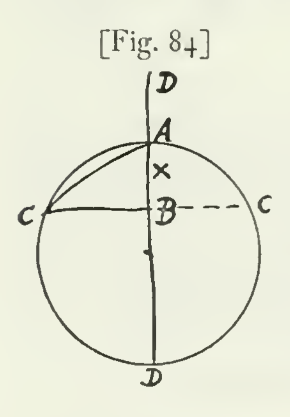
IV, 2.

QUESTION DES SIGNES DANS LES ÉQUATIONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

[1676 ou 1677]

Ponantur rectæ AB, BC angulum rectum conftituere. Sitque indefinite AB ∞ x [Fig. 84], BC ∞ y et a linea data. Aequatio autem curvæ AC naturam exprimens [2]) $ax - xx$ ∞ yy five $xx - ax + yy$ ∞ o.

[Fig. 84]



Hic five ponatur $+y$ five $-y$, eadem tamen fit æquatio, unde fequitur curvam AC ejus effe naturæ ut BC ∞ y ad utramvis partem rectæ AB fumi poffit. Eftque fane circuli circumferentia cujus diameter a, ut facile apparet.

Non poteft autem fumi x in contrariam quoque partem nempe verfus D, quia fi ftatuatur $-x$, non poterit fieri eadem priori æquatione fed erit $xx + ax + yy$ ∞ o. Nam in priori cum haberetur $-ax$, effetque $+x$ neceffe eft fuiffe $-a$. quare pofito $-x$ ductoque in $-a$ (nam hoc non mutatur) fit $+ax$.

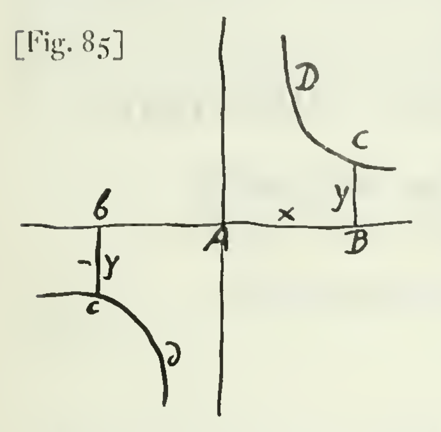
---

[1]) Manuscrit E, p. 97—98.

[2]) Quelques années plus tard Huygens parlera simplement de l'„æquatio parabolæ" (l. 10 de la p. 408 qui précède). En 1691 il se sert couramment de l'expression „equation d'une courbe"; voyez la suite du Tome (p. 506 et suiv.).

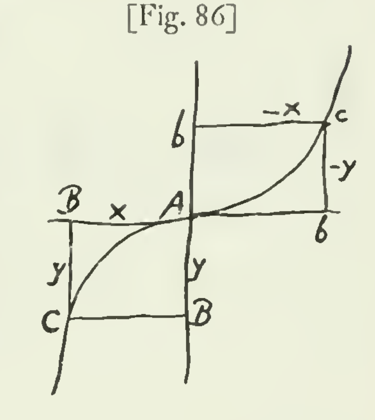
Sit item æquatio $xy \infty aa$ quæ hyperbolæ ad asymptotos relationem ostendit [Fig. 85]. Hic potest etiam $-x$ poni sed tunc et $-y$ ponendum, ut fiat utriusque multiplicatione $+xy$. Itaque sumto x in contrariam partem ab A, etiam y sive bc in contrariam partem a recta AB sumenda est, tuncque punctum c est ad sectionem oppositam, ut vocant, ipsi CD. Patetque æquatione proposita designari curvam ex duabus CD, cd constantem, non vero pluribus. adeo ut sectiones conjugatæ non faciant partem ejus.

[Fig. 85]



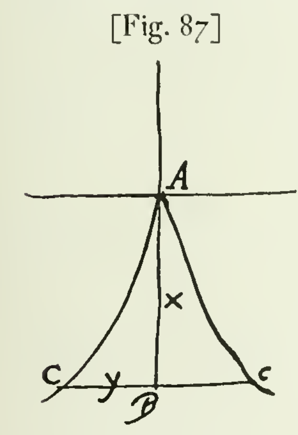
Sit rursus æquatio $x^3 \infty aay$ [Fig. 86]. Hic manente $+x$ debet etiam manere $+y$. at posito $-x$ debet quoque poni $-y$ ut fiat $-x^3 \infty -aay$, nam hæc eadem æquatic est ac $+x^3 \infty aay$. Unde hæc curva erit CAc, quæ axem non habebit. Vocatur autem parabola cubica vel Paraboloides.

[Fig. 86]



Quod si sit æquatio $x^3 \infty aay$ [Fig. 87]. Hic manente $+x$ potest esse $+y$ vel $-y$ ut eadem maneat æquatio sed non potest unquam sumi $-x$ sive statuatur $+y$ sive $-y$. Unde hæc curva habebit formam CAc, angulo acutissimo ad A inflexam.

[Fig. 87]



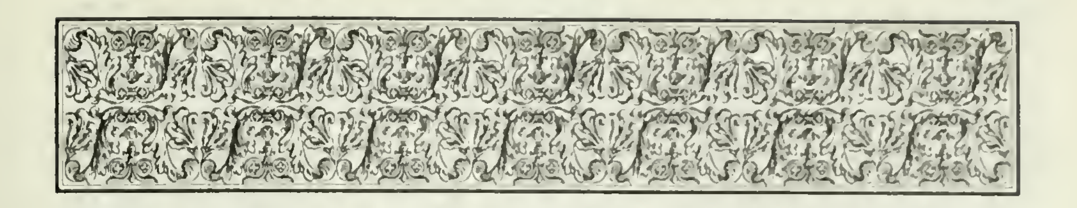
V.

À PARIS (JUILLET 1678 – AOÛT 1681).

QUESTION SE RAPPORTANT AU TRAITÉ „VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK".

Voyez la Pièce de 1679 aux p. 164 et suiv. du T. XIV.

MATHEMATICA VARIA 1681—1695.



Avertiſſement.

Des dix Pièces qui ſuivent la plupart ſe rapportent à des queſtions de géométrie; c'eſt ce que le lecteur eût aſſurément deviné d'avance. Une Pièce (II) traite de trigonométrie, une (IV) de géométrie analytique (équation d'une courbe), trois (I, VI, X) de rayons de courbures, trois auſſi (V, VII, IX) d'intégration, plus préciſément du calcul de la grandeur de certaines ſurfaces ou de certains corps obtenus par la révolution de lignes ou de ſurfaces. Une ſeule (III), publiée dans le T. XIV, ſe rapporte au calcul des chances (comparez les Mathematica varia 1666—1681), une autre (VIII) à celui des logarithmes en partant de la conſidération de l'hyperbole équilatère et en faiſant uſage d'une certaine ſérie trouvée par Huygens et publiée par lui en 1690 dans le „Diſcours de la cauſe de la peſanteur"[1]).

On a remarqué dans les Math. varia 1666—1681 les problèmes aſſez nombreux ſur le triangle, ſujet cher à tant de mathématiciens anciens et modernes; Huygens ſ'y ſervait d'équations en x et y de ſorte qu'il ſ'agiſſait, peut-on dire, de géométrie analytique. Quant aux formules trigonométriques, la préſente Pièce II fait voir que Huygens aimait à trouver lui-même leurs démonſtrations plutôt que de les chercher ailleurs. Le catalogue de vente de 1695 de ſes livres ne mentionne pas la „Mirifici Logarithmorum Canonis Deſcriptio" de 1614 de Neper[2]) dans le Livre II de laquelle[3]) l'auteur conſidère e.a. longuement le cas où „ſunt . . . tria latera [trianguli ſphærici] data, & quæruntur anguli". Huygens trouvait apparemment les énoncés des différents

[1]) Voyez le Tome ſuivant.
[2]) Comparez la note 4 de la p. 459.
[3]) Chap. VI.

théorèmes dans les *petites* tables, celles in octavo, de Vlacq[4]). Or tant dans l'édition latine que dans les deux éditions néerlandaises que nous citons Vlacq dit en latin ou en flamand: "Qui demonstrationes hujus videre cupiunt — mais c'est ce que Huygens ne désirait pas — eas invenient in Trigonometria Britannicâ Henrici Briggii".

Dans la Pièce de géométrie analytique (IV) datant de 1690 Huygens considère une des ovales de Descartes[5]). Nous rappelons qu'au commencement de cette année il avait publié le „Traité de la Lumière"[6]) dans le Chap. VI duquel il est également question de ces ovales[7]).

Tout ce qui se rapporte à des développées et des rayons de courbure (Pièces I, VI, X) se rattache évidemment à la Troisième Partie de l'„Horologium oscillatorium" de 1673[8]).

Des recherches sur les surfaces et corps de révolution (Pièces V, VII, IX) nous ne mentionnons ici que la dernière, où il est question tant de la cissoïde que de la cycloïde, ce qui donne lieu à Huygens de rappeler les „profondes speculations" de Pascal et de Wallis[9]).

La Pièce sur le calcul des logarithmes se rattache à un endroit des „Principia" de 1687 de Newton, ainsi qu'à la quadrature de l'hyperbole par Mercator et Wallis, comme le font voir les notes des p. 471—472 ou plutôt les pages des T. IX et X auxquelles ces notes renvoient le lecteur.

Nous terminons cet Avertissement en disant un mot du développement du cosinus en une série, sujet dont il est question dans la Pièce I. Dans la note 6 de la p. 392 qui précède on trouve la série de Newton

$$A = z - \frac{z^3}{4 \times 6rr} + \frac{z^5}{4 \times 4 \times 120r^4} - \text{etc.}$$

[4]) Voyez les notes 3 et 5 de la p. 456.

[5]) Livre second de „La Géométrie" de 1637.

[6]) Suivi du „Discours de la cause de la pesanteur" mentionné plus haut.

[7]) T. XIX, p. 524 et suiv. (Fig. 216 à la p. 525). Voyez aussi la Pièce VI de 1678 à la p. 424 du même Tome.

[8]) T. XVIII, p. 188—241.

[9]) Note 5 de la p. 475.

ou, en divisant par $2r$ et en posant $\frac{1}{2}z = s$,

$$\frac{\sin s}{r} = \frac{s}{r} - \frac{1}{3!}\left(\frac{s}{r}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{s}{r}\right)^5$$, ce qui est le développement de ce que nous appelons le sinus (sin s dans la formule est une ligne, non pas un rapport) en fonction de l'angle correspondant (s = arc, r = rayon). Wallis cite également, ce que nous n'avons pas reproduit dans la note, le développement du sinus versus suivant Newton, savoir

$$\text{sinus versus} = \frac{z^2}{2r} - \frac{z^4}{24r^3} + \frac{z^6}{720r^5} - \text{etc.}$$

Or, en retranchant le sinus versus du rayon, on obtient le cosinus (c.à.d. le cosinus linéaire, analogue au sinus linéaire mentionné plus haut); en divisant par r il en résulte le développement de ce que nous appelons aujourd'hui le cosinus:

$$\frac{\cos z}{r} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{z}{r}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{z}{r}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(\frac{z}{r}\right)^6 + \text{etc.}$$

C'est depuis l'apparition de l'Algèbre de 1685 de Wallis que Huygens a connu ce développement en série du cosinus. Il ne connaissait d'ailleurs pas la preuve des formules de Newton, et il ne paraît pas s'en être jamais servi. En 1683 il ne les connaissait certainement pas encore. On a vu plus haut [10]) que la série de l'arc tangente de J. Gregory lui était même inconnue au moins jusqu'à 1689. Il ne semble pas étonnant qu'après sa dispute avec Gregory [11]) on n'ait pas éprouvé en Angleterre le besoin, supposé qu'on l'eût éprouvé sinon, de lui faire connaître au plus tôt les nouvelles découvertes. Mais pour la considération théorique du „pendulum cylindricum trichordon" (1683), dont traite la Pièce I [12]), il n'avait que faire de développements en série.

[10]) P. 375.
[11]) P. 259 et 303—327 du présent Tome.
[12]) Le lecteur qui s'intéresse spécialement au „pendulum cylindricum trichordon" trouvera dans les Additions et Corrections à la fin du présent Tome, une correction à apporter à une note du T. XVIII.

MATHEMATICA VARIA 1681 — 1695.

I. A propos du „pendulum cylindricum trichordon" (sinusoïde et parabole, courbes osculatrices) (1683).

II. Démonstration de théorèmes trigonométriques (1687, 1680).

III. Question se rapportant au traité „Van Rekeningh in Spelen van Geluck" (1688).

IV. Examen curvæ lineæ quam Cartesius regulæ et fili ductu describere docet, an sit eadem atque ovalium ipsius prima[1]) (1690).

V. Surface obtenue par la révolution de la parabole autour d'une tangente au sommet (1691).

VI. Développée du „folium Cartesii" (1691).

VII. Solide de révolution obtenu par la rotation de la cycloïde autour de son axe (1691).

VIII. Calcul de logarithmes en partant de la considération de l'hyperbole équilatère (1691).

IX. Cycloïde et cissoïde; solides de révolution et centres de gravité (1691 ou 1692).

X. Calcul du rayon minimal de la courbe logarithmique (1692).

---

[1]) Titre donné par Huygens lui-même à cette Pièce.



MATHEMATICA VARIA 1681—1695.

I.

A PROPOS DU „PENDULUM CYLINDRICUM TRICHORDON" (SINUSOÏDE ET PARABOLE, COURBES OSCULATRICES).

[1683]

En considérant dans le T. XVIII les calculs de Huygens qui se rapportent au „pendulum cylindricum trichordon" nous avons renvoyé le lecteur (p. 530, première note et note 2) à „un des Tomes suivants" pour les deux questions que voici:

1. Comment Huygens a-t-il pu dire que la „curva *bgεq* [sinusoïde ou „compagne de la roulette", Fig. 25 de la p. 528] est æqualis curvæ dimidiæ Ellipsis *ahb* posita *eh* potentiâ dupla ad radium *ae*"?

2. Comment a-t-il calculé que la distance verticale PG entre un certain point P de la courbe BPL [Fig. 23 de la p. 527] qui devient une parabole lorsqu'on déroule sur un plan le cylindre sur lequel elle se trouve, et le point correspondant G de la courbe BGO qui par cette évolution devient une sinusoïde, est inférieure à $\frac{1}{1000}$ AB, c. à. d. à $\frac{1}{1000}$ du diamètre du cylindre?

1. La réponse à la première question est bien simple. Il n'est nullement besoin de considérer, comme nous le faisions dans la note 2 de la p. 530, la méthode de Pascal pour réduire „la dimension des lignes de toutes sortes de roulettes... à des lignes eliptiques". Il suffit de se rappeler ce que nous disions à la p. 511 de l'Avertissement: que Huygens savait qu'on obtient la „linea sinuum" non seulement, comme dans la Pièce sur le „pendulum cyl. trichordon", par l'évolution sur un plan de la „ligne cyclocylindrique", mais aussi „par le développement sur un plan de la section elliptique obtenue en coupant un cylindre par un plan incliné à 45°" [1]). Or, dans cette section elliptique — voyez ce que Huygens dit plus haut sur la „potentiâ dupla" — le grand axe est égal au produit du petit axe par $\sqrt{2}$.

2. Dans nos notes du T. XVIII nous nous sommes servis du développement du cosinus en une série. En 1683 la série du cosinus — voyez l'Avertissement — était sans doute connue, grâce à Newton, à un nombre restreint de personnes, mais Huygens ne faisait pas partie de ce cercle. C'est donc, pensons-nous, par un calcul direct [2]), qu'il a trouvé la fraction $\frac{1}{1000}$ en question. Ce ne fut qu'en 1685 ou 1686 [3]) qu'il apprit à connaître par l'Algèbre de Wallis quelques séries de Newton d'ailleurs dépourvues de démonstrations.

Une remarque analogue s'applique au cas du § 3 des p. 530 et suiv.; sans doute c'est par une

---

[1]) Comparez la p. 337 du T. X, déjà citée dans la note 5 de la p. 511 du T. XVIII.
[2]) Comparez les p. 290 et 262 du T. XVII, datant de 1654.
[3]) Voyez la Pièce IV à la p. 389 qui précède.

confidération géométrique que Huygens a vu que „quæcunque fuerit longitudo filorum" la parabole à équation $y = l - \frac{x^2}{2l}$ fe rapproche fortement de la courbe à équation $y = \sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \frac{x}{R}}$ (note 3 de la p. 531): l'une et l'autre courbe a, pour $x = 0$, c'eft à dire là où les deux courbes fe touchent, le rayon de courbure l (ou plutôt $-l$), de forte qu'elles font ofculatrices (comme la parabole et la finufoïde — correfpondant au cas $l = R$ — précédemment confidérées) pour employer l'expreffion de Leibniz de 1686 [4]). Ces fortes de contact entrent naturellement dans mes Evolutions de Lignes courbes, écrira Huygens en 1691 [5]).

---

[4]) Voyez la note 5 de la p. 42 du T. XVIII.
[5]) T. X, p. 183.

II.

DÉMONSTRATIONS DE THÉORÈMES TRIGONOMÉTRIQUES.

[1687]

A. [Trigonométrie plane]. § 1. *Datis trianguli duobus lateribus et angulo interjecto invenire latus tertium ipsi oppositum* [1]).

[Fig. 87]

h = sinus dimidij anguli N dati [Fig. 87]. $d - c \infty p$.
Regula ad inveniendum angulum N ex tribus lateribus datis dc —— $\frac{xx - pp}{4} = rr$ —— hh r radius

$$\begin{array}{c} x+p \\ x-p \\ \hline xx-pp \end{array}$$

$\frac{h}{r}$ est donc le rapport qui est désigné actuellement par le mot sinus.

$$\frac{rrxx - 4prr \infty 4hhdc}{xx \infty pp + \frac{4hhmm}{rr}}$$

Sit $dc \infty mm$.

Jam invenienda radix summæ horum duorum quadratorum per tabulas sinuum et logarithmos.

p —— q —— $r \bigg/ \frac{rq}{p}$ tangens anguli (r radius) [Fig. 88]. [Fig. 88]

s sinus ejusdem anguli.

s —— r —— $q \bigg/ \frac{qr}{s} \infty x$

$\sqrt{dc} \infty n$ $\quad \frac{2hn}{r} \infty q$ $\qquad p$ —— $\frac{2hn}{r}$ —— $r \bigg/ \frac{2hn}{p}$

s —— r —— $\frac{2hn}{r} \bigg/ \frac{2hn}{s}$

Adde [2]) logarithmos datorum laterum. Summæ dimidiæ adde logarithmum sinus

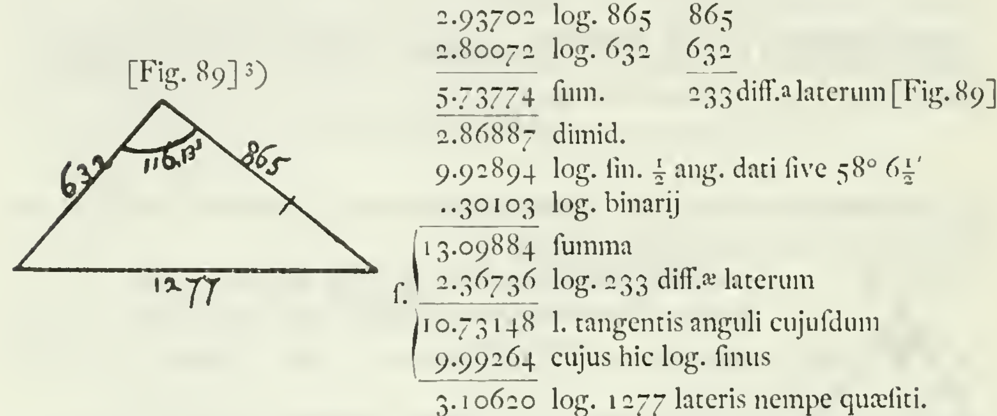
---

[1]) Manuscrit F, p. 292. Les p. 285 et 297 portent respectivement les dates août 1687 et septembre 1687.

[2]) Feuille collée entre les pages 182 et 183 du Manuscrit F. En marge: Vide lib. F, ce qui se rapporte sans doute à la p. 292, où l'on trouve la même règle (Adde logarithmos laterum *c* et *d* [Fig. 87] summæ dimidiæ. Etc.) mais sans exemple numérique. La feuille ne peut guère être antérieure à 1687: voyez la note 1 de la p. 458 qui suit.

femissis anguli dati, itemque logarithmum binarij. Ab hac summa aufer logarithmum differentiæ laterum. Reliquum est logarithmus tangentis anguli, cujus logarithmus finus, ablatus ab eadem posteriore summa, dabit logarithmum lateris quæsiti.

[Fig. 89] [3])



2.93702	log. 865	865
2.80072	log. 632	632
5.73774	sum.	233 diff.a laterum [Fig. 89]
2.86887	dimid.	
9.92894	log. sin. $\frac{1}{2}$ ang. dati five 58° 6$\frac{1}{2}$'	
..30103	log. binarij	
13.09884	summa	
f. 2.36736	log. 233 diff.æ laterum	
10.73148	l. tangentis anguli cujusdum	
9.99264	cujus hic log. sinus	
3.10620	log. 1277 lateris nempe quæsiti.	

Hæc regula nostra brevior est vulgari, quæ primo angulum unum quærere præcipit atque hinc deinde latus propositum. Nostra enim tabulas logarithmicas sexies inspici postulat (nam binarij logarithmus notus est), illa vero octies. Tum in cæteris nostra quoque facilior est.

Il faut en effet consulter huit fois la table des logarithmes lorsqu'on applique d'abord la règle des tangentes pour trouver la différence des angles de la base (d'où se tire „angulus unus"), et ensuite celle des sinus pour trouver le „latus propositum", c. à. d. la base.

[1680]

§ 2. Cette règle des tangentes est formulée et démontrée comme suit par Huygens en un endroit antérieur du même Manuscrit, datant de 1680 [4]) et appartenant donc, si l'on veut parler strictement, aux „Mathematica varia 1666—1681":

Theorema trigonometricum utile ad inveniendam anomaliam . . . etc. Huygens s'occupe de la construction de son planétaire mentionné aussi à la p. 394 qui précède. En marge: vulgo notum est hoc theorema. Vide Tabb. Vlacqui [5]).

---

[3]) Le triangle à côtés 632, 865, 1277 est considéré par Vlacq dans chacune des éditions de ses Tables mentionnées dans la note 5 qui suit.

[4]) P. 2 du Manuscrit F, datant, nous semble-t-il, de *la fin* de 1680. La p. 239 du Manuscrit E porte la date du 11 mai 1680, celle du 16 novembre 1680 se trouve à la p. 39 du Manuscrit F.

[5]) Il existe un assez grand nombre d'éditions différentes des Tables de Vlacq. Nous mentionnons les suivantes. 1 „Tafels van sinus, tangentes, secantes: Ende van de logarithmi van de sinus, tangentes, Ende van de Getallen van 1 af tot 10000 toe. Nevens de maniere om door de selfde allerley Drie-hoecken, ende veele Astronomische ende Interest-Reeckeninghen te resolveren. Door A. Vlacq. In 's Graven-Hage. By Adriæn Vlacq", MDCLXI. La III. Prop. du III. Cap. (intitulé: „Van de resolutie van de Rechtlinise Scheefhoeckige Drie-hoecken") est celle-ci:

ABC [Fig. 90] triangulum. Erit *ut ſumma laterum AB, BC, ad eorum differentiam ita tangens dimidiæ ſummæ angulorum A, C, ad tangentem dimidiæ ipſorum differentiæ.*

[Fig. 90]

Mea demonſtratio. Producatur AB, ut ſit BD æqualis BC. jungaturque DC, itemque puncta E, F quæ rectas AD, DC ſecant bifariam, et ducatur BF, ac denique BG parallela EF ſive AC. Erit jam angulus DBC æqualis duobus BAC, BCA. ac proinde angulus DBF æqualis dimidiæ ſummæ ipſorum. à qua auferendo angulum DBG æqualem BCA, relinquetur GBF æqualis $\frac{1}{2}$ differentiæ angulorum BCA, BAC. Sumta itaque BF pro radio, oportet oſtendere tangentem DF eſſe ad tangentem GF, ſicut ſumma laterum AB, BC ad ipſorum differentiam, ſive ut dimidia ſumma, quæ eſt ED, ad dimidiam differentiam, quæ eſt EB. Hoc autem manifeſtum eſt, quum EF, BG ſint parallelæ.

„Bekent sijnde de twee zijden, ende een hoeck tusschen beyde, te vinden de andere hoecken". Vlacq donne, sans la démontrer, la règle suivante: „Gelijck de somme van beyde de zijden, Tot het verschil der selfde; Soo is de Tangens van de halve somme der begeerde hoecken, Tot de Tangens van het halve verschil der selfde". 2. „Nieuwe Konstige Tafelen sinuum, tangentium & secantium, ofte, vande Hoeckmaten, Raecklijnen, en Snylijnen, met de logarithmis, der Hoeckmaten, en Raecklijnen, Als mede de Logarithmi passende op de getallen van 1 tot 10000... Met sekere ænwijzinge om door deselve alle Rechtlinische en Clootsche Driehoecken, met verscheyde Astronomische vræg-stucken op te lossen. 't Samengestelt door A. Vlack. En vermeerdert met een nieuw uytgerekende Tafel van de vergrootende breedte, als mede de Tafel der Kromstreecken [voyez la p. 236 du T. XVII]. Door A. de Graef [voyez sur lui la p. 27 du T. IX]. 't Amsterdam, By Hendrick Doncker, Boeck-verkooper en Græt-boogemaker [voyez sur les „græt-boogen" les p. 627—628 du T. XVIII] in de Nieuwe-brug steeg", 1665. Vlacq y donne la même règle. 3. „Tabulæ sinuum, tangentium et secantium, et logarithmi sinuum, tangentium ... cum Methodo facillimâ, illarum ope, resolvendi omnia Triangula Rectilinea & Sphærica, & plurimas Quæstiones Astronomicas, ab A. Vlacq. Editio ultima emendata & aucta. Amstelædami, Apud Henricum & Viduam Theodori Boom", MDCLXXXI. La règle (toujours dépourvue de démonstration) y a la forme suivante (p. 16): „Ut aggregatum datorum laterum, Ad differentiam eorundem; Sic Tangens semissis aggregati angulorum quæsitorum, Ad Tangentem semissis differentiæ eorundem".

[1687?]

B. [Trigonométrie sphérique et trigonométrie plane]. § 1. *Trianguli ſphærici* [Fig. 91] *datis tribus lateribus invenire angulum quemlibet*[1]).

[Fig. 91] Vergært de drij ſijden te ſamen, vande helſt der ſomme treckt elcke ſijde om den begeerden hoeck. komen twee reſten[2]). Nu gelijck den radius tot ſinus van eene ſijde om den begeerden hoeck, alſoo ſinus van d'ander ſijde om den ſelven hoeck tot een 4de getal. Dan voort

Gelijck dit 4de getal tot ſinus van het eene verſchil, alſoo ſinus van 't ander verſchil tot de halve pijl van den begeerden hoeck. deſe halve pijl met den radius gedeelt[3]) en van 't product de wortel uytgetrocken ſal geven ſinus van den halven begeerden hoeck.

Het product van de ſinus der twee reſten multipliceert met het quadræt vanden radius. dit product divideert door het product van de 2 ſinus der ſijden æn den begeerden hoeck. de quadrætwortel uijt het product ſal ſijn de ſinus van den halven begeerden hoeck.

---

r	$\frac{cd}{r}$
c	a
d	b
$\frac{cd}{r}$	$\frac{abr}{cd}$
$\sqrt{\frac{abrr}{cd}}$	

Hinc regula illa per logarithmos utiliſſima, cujus quis ſit auctor neſcio[4]). logarithmis τῶν *a* et *b* adde duplum logarithmum radij. A ſumma omnium aufer ſummam logarithmorum τῶν *c* et *d*. Reliqui ſemiſſis erit log. ſinus anguli dimidij quæſiti.

Dans le tableau *c* et *d* repréſentent les ſinus des arcs EP et ES, et *a* et *b* les ſinus des termes $\frac{1}{2}$ (— EP + ES + PS) et $\frac{1}{2}$ (EP — ES + PS). *r* eſt l'inévitable rayon. En prenant, comme nous le faiſons actuellement, les ſinus comme des rapports on a ſin $\frac{1}{2}$ E $= \sqrt{\frac{ab}{cd}}$.

Sur d'autres éditions des petites tables de Vlacq (elles furent publiées en différentes villes, tant en Hollande qu'à l'étranger) on peut consulter la „Bibliographie néerlandaise historique-scientifique des ouvrages importants dont les auteurs sont nés aux 16e, 17e et 18e siècles sur les sciences mathématiques et physiques avec leurs applications" par le D$_r$. D. Bierens de Haan, extrait du „Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche" T. XIV, sept.—dec. 1881, T. XV, mai—juillet 1882, T. XVI, juillet 1883, Rome, Impr. d. sciences math. et phys. Via Lata N° 3, 1883.

Le catalogue de vente de 1695 des livres de Huygens mentionne (Libri math. in Octavo, 22) „Vlack Tabula Sinuum, Tangentium &." sans date.

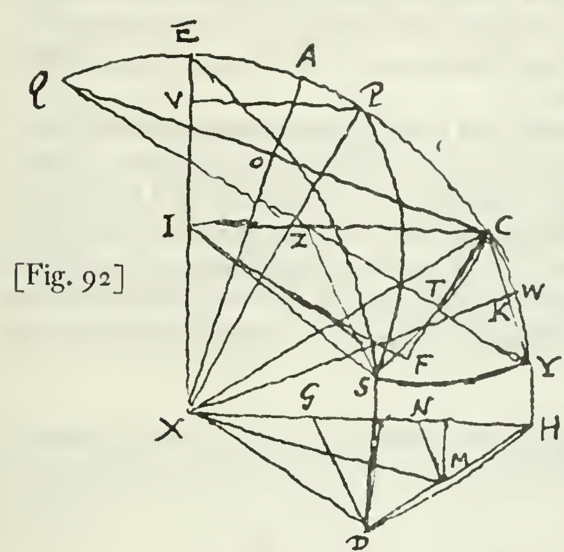
[1]) Petite feuille collée dans le Manuscrit F entre les p. 182 et 183 (comparez la note 2 de la p. 455). La feuille semble ne pas être antérieure à 1687, puisqu'à la p. 295 du Manuscrit F Huygens paraît ne pas encore connaître la démonstration de la règle ici considérée: il énonce quelques propriétés du triangle sphérique disant: „An hinc regula illa nota inveniri potest?" Il est

Vel addeert de arithmetiſche complementen van de logarithmi der ſinus der ſijden die den begeerden hoeck begrijpen, bij de logarithmi vande ſinus der gevonden verſchillen. De helft van de ſomme ſal de logarithmus ſijn vande halve begeerde hoeck.

add. logar.os numerorum
- $\frac{r}{c}$ hujus logar.us eſt compl. arithm. logar. ſinus c
- $\frac{r}{d}$ hujus logar.us eſt compl. arithm. logar. ſinus d
- a
- b

fit logar.us numeri $\frac{rrab}{cd}$ cujus logar[i]. dimidium erit log. ſinus anguli dimidij quæſiti.

§ 2. [Demonſtratio]. ESP [Fig. 92] is de gegevene driehoeck. SEP de begeerde hoeck. Neemt EC ∞ ES. En PY ∞ PS. XW ſnijde CY in 2 gelijcke. Soo is EW de halve ſomme der 3 ſijden. en CW is het verſchil tuſſchen ES en deſe halve ſomme. en PW het verſchil tuſſchen EP en het ſelvige.



[Fig. 92]

Sij CI en PV perpend. op EX; Soo ſijn dit de ſinus der boghen ES of EC en PE. CK is ſinus van CW. En YQ rechthoekigh door XP treckende, die CI ſnijdt in Z, ſoo is PQ ∞ PY. En dan QC treckende; en, door het midden der ſelve, XOA, ſoo is AC ∞ AQ, en bij gevolg AP ∞ $\frac{1}{2}$ CY, of CW, en CA ∞ WP. En dærom CO ſinus van PW, het ander verſchil. Treckt SZ. Als mede DG perpend. op

vrai que les p. 295—296 constituent aussi une feuille détachée (non collée et du format du Manuscrit).

[2]) Chez Vlacq (éd. de 1665, voir la note 5 de la p. 456): „Addeert de drie sijden te samen, en treckt elcke syde aen de bekende hoeck van de helft haerder somme, om het verschil der selfden te hebben". Etc.

[3]) Pour trouver la formule $\sqrt{\frac{abrr}{cd}}$ — voir la suite du texte — et non pas $\sqrt{\frac{ab}{cd}}$, il faudrait lire „gemultipliceert" au lieu de „gedeelt".

[4]) Huygens semble donc ne pas avoir consulté — nous l'avons déjà dit dans l'Avertissement — la „Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio" de 1614 de Neper.

XH. EN XM perp. op DH en MN paral. DG. Treckt voorts CF parall. met PX, en IF parall. met QY: ſoo is de △ CFI gelijcformigh æn PXV, als licht is te ſien. Dærom XP tot PV als IC tot CF. Dat is de radius tot ſinus der ſijde EP als de ſinus der ſijde ES of EC tot een vierde linie CF. Soo moet dan voorts beweſen werden dat CF is tot CK als CO tot HN, halve pijl in den hoeck HXD of PES. En marge: pijl ipſi[5]) eſt ſinus verſus.

Voorts dewijl ZT, IF parall. ſijn, ſoo is CF tot CT als CI tot CZ. Mær HX is tot HG als CI tot CZ. volgens 't geene hier næ beweſen ſal werden.

Dærom CF tot CT als HX tot HG.

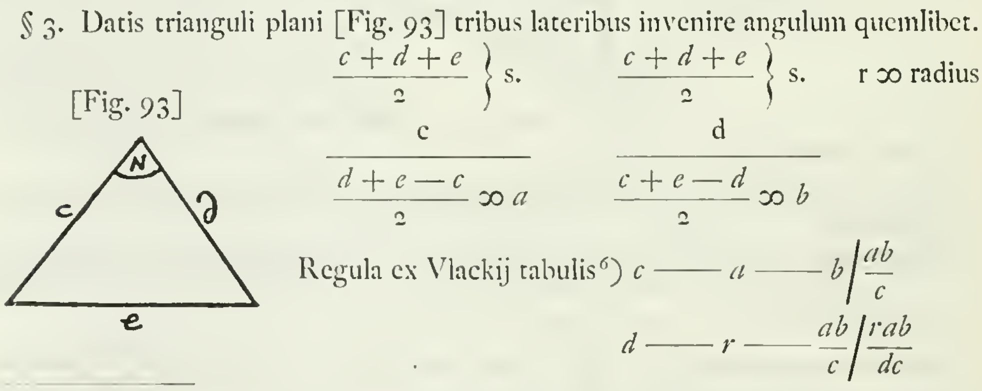
Voorts dewijl den boogh AC de helft is van QAC, dærom is den hoeck AXC ∞ QYC. dat is OXC ∞ TYC. Mær de hoecken in CTY ſijn recht. dærom de △en COX, CTY gelijckformigh. En bij gevolg CT tot CY als CO tot CX. Mær wij hadden te vooren CF tot CT als HX of CX tot HG, dærom CF tot CY als CO tot HG. of CF tot CK als CO tot HN. 't welck moeſt beweſen werden.

Dewijl nu die hoeck XMH recht is, als oock MNH, ſoo is MH ſinus van den halven hoeck HXD of PES, middelproportioneel tuſſchen NH en den radius HX. En dærom HX met HN gemultipliceert ſal de wortel van 't product geven HM. 't welck noch overigh was te bewijſen.

'T geene geſeght is dat HX is tot HG als CI tot CZ, werd aldus beweſen. Dewijl PS ∞ PY, ſoo is den boogh SY in het vlack 't welck de ſphæra ſnijdt en rechthoeckigh is op PX. in 't welck oock YZQ ſijnde, ſoo is oock SZ in 't ſelve vlack: Mær dit vlack is rechthoekigh op EHX, en ſoo is oock het vlack ISC. Dærom de gemeene ſnee SZ der vlacken ISC en YZS, ſal rechthoeckigh ſijn op het vlack EHX, en oock SZ perpend. op IC. en dærom parallel met DG. Soo is dan DX of HX tot XG als SI of CI tot IZ. En HX tot HG gelijck CI tot CZ, 't welck bethoont moeſt werden.

---

§ 3. Datis trianguli plani [Fig. 93] tribus lateribus invenire angulum quemlibet.



[Fig. 93]

$\left.\frac{c+d+e}{2}\right\}$ s. $\qquad \left.\frac{c+d+e}{2}\right\}$ s. $\qquad$ r ∞ radius

$\qquad$ c $\qquad\qquad\qquad$ d

$\frac{d+e-c}{2} \infty a \qquad \frac{c+e-d}{2} \infty b$

Regula ex Vlackij tabulis[6]) c —— a —— $b \,\Big|\, \frac{ab}{c}$

d —— r —— $\frac{ab}{c} \,\Big|\, \frac{rab}{dc}$

[5]) Vlacq, pensons-nous.

[6]) Les deux équations qui suivent correspondent en effet à une des deux règles données par Vlacq.

$\sqrt{\frac{rrab}{dc}}$ ſinus dimidij anguli N. Ergo hic in triangulis planis eadem eſt regula quæ in ſphæricis, niſi quod in his ſinus laterum et differentiarum laterum adhibentur, cum in illis latera ipſa et differentiæ adhibeantur. utrobique adduntur primum tria latera, et a ſummæ dimidio auferuntur ſingula latera angulum quæſitum comprehendentia ut fiant differentiæ duæ.

III.

QUESTION SE RAPPORTANT AU TRAITÉ „VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK".

[1688]

Voyez les p. 169—179 du T. XIV.

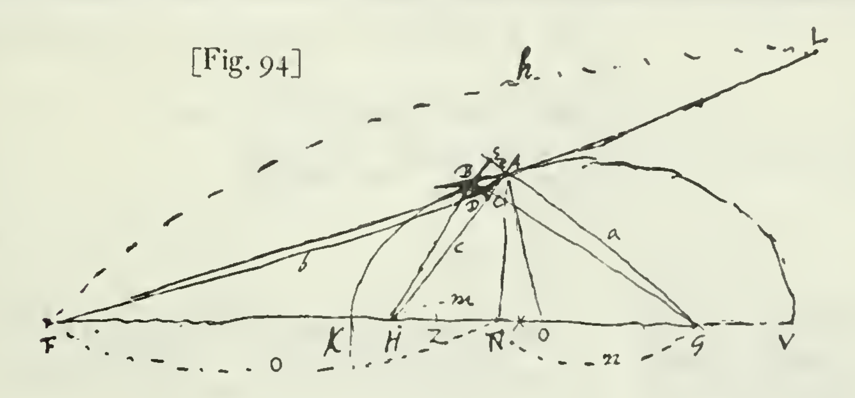
IV.

Examen Curvæ lineæ quam Cartesius regulæ et fili ductu describere docet, an sit eadem atque Ovalium ipsius prima [1]). Vid. pag. 54 in Editione Geom.æ 1659[2]).

Sept. 1690

8 Sept. 1690. Curva AB [Fig. 94, où AG = a, AF = b, AH = c, HA = m, NG = n, FN = o, NO = x, AE = e; AB = élement de la courbe; AC, AD, AE = projections orthogonales de AB respectivement sur AH, AF et le prolongement de GA] ejus naturæ ut si ad punctum in

[Fig. 94]



ipsa A ducantur a datis punctis G, H, F rectæ, itemque ad punctum ejus B, proximum A, in partes F; quantum FB minor est quam FA, tantundem GB cum dupla BH sint breviores quam GA cum dupla AH. Hæc est curva Cartesij per regulam et filum descripta quam dicit esse eandem cum prima ovali sua. Quod hic examinatur, et verum est. Sed non video unde hanc descriptionem invenerit.

Invenitur tangens curvæ quam Cartesius describit motu regulæ et fili pag. 54 in editione 1659 [2]).

---

[1]) Manuscrit G, f. 55r—56 v [p. 9—11 suivant la numération de Huygens].

[2]) Il s'agit du Recueil bien connu de F. van Schooten, contenant „La Géométrie" de 1637 de Descartes, etc. Dans l'édition de 1683 la première ovale de Descartes figure également à la p. 54. C'est dans le Livre Second de „La Géométrie" que Descartes traite de ses ovales.

Cette construction par règle et corde de Descartes s'applique, comme il le dit, au cas où l'on a [Fig. 94] FK = KG.

AD ∞ 2 AC — AE. Hic est idem quod in libro F HV ∞ 2 HX — HD [3]).

AO perpend. tangenti AB. NO definit tangentem.

$$\overset{HV}{\frac{aoe+axe}{bn-bx}} \infty \overset{2\,HX}{\frac{2ame+2axe}{cn-cx}} \overset{HD}{-e}$$

La preuve des équations

$$AD = \frac{ae(o+x)}{b(n-x)} \text{ ou } AD = \frac{AG.FO}{OG.FA}e$$

$$\text{et } AC = \frac{ae(m+x)}{c(n-x)} \text{ ou } AC = \frac{AG.HO}{OG.HA}e$$

se trouve à la p. 275 du Manuscrit F [3]): voyez, aux p. 497—500 qui suivent, les §§ 11, 13 et 16 de la Pièce I des „Problèmes et méthodes modernes".

$$\frac{ao+ax}{b} \infty \frac{2am+2ax}{c} - n + x$$

$$cao - 2abm + bcn \infty 2abx + bcx - cax$$

$$\frac{cao-2abm+bcn}{2ab+bc-ca} \infty x \infty \text{NO}.$$

$o + n \infty$ FG

$\frac{1}{2}o + \frac{1}{2}n \infty$ FK

ex hypoth. Cartesii (c.à.d. FK = KG, comme nous l'avons dit plus haut)

$o - m \infty$ FH

$\frac{o+n}{2}$ FK

$o - m \frac{-o-n}{2}$ KH

$2o - 2m - o - n$ KZ } ad.

$\frac{o+n}{2}$ FK }

$$\overset{FZ}{\tfrac{3}{2}o - 2m - \tfrac{1}{2}n} \;—\!\!\mid\!\!—\; \overset{ZG}{\tfrac{3}{2}n + 2m - \tfrac{1}{2}o} \;—\; 3 \;—\!\!\mid\!\!—\; 2$$

hic pono proportionem refractionis ut 3 ad 2.

D'après Descartes le point Z est déterminé par la relation HZ = KH; et FZ: ZG est la „proportio refractionis".

$$3o - 4m - n \infty \tfrac{9}{2}n + 6m - \tfrac{3}{2}o$$

$$\tfrac{9}{2}o - \tfrac{11}{2}n \infty 10m$$

[3]) Ceci se rapporte à une figure de la p. 275 du Manuscrit F (notre Fig. 105 de la p. 497 qui suit). On voit que HV de la Fig. 105 est identique avec AD de la Fig. 94, etc.

	$\frac{3}{2}o - 2m - \frac{1}{2}n$	FZ
ex	$o + n$	FG
	$\frac{3}{2}n + 2m - \frac{1}{2}o$	ZG

$$\frac{9o - 11n}{20} \infty m$$

$\frac{3}{5}o + \frac{3}{5}n$ FZ reſtituto valore m.

$\frac{2}{5}n + \frac{2}{5}o \infty$ ZG reſtituto valore m.

Invenitur tangens Ovalis primæ Carteſij ex noſtra methodo. Il s'agit de la „Méthode des tangentes... pour les courbes données en coördonnées bipolaires etc." dont traite la Pièce I à la p. 491 qui ſuit.

$$a + \frac{2}{3}b \infty a + e + \frac{2}{3}b \frac{-2aoe - 2axe}{3bn - 3bx}$$

puiſque d'après la première conſtruction de Deſcartes, comme Huygens le dira plus loin, on a : $a + \frac{2}{3}b =$ conſt. $\left(\text{l'indice de réfraction étant } \frac{3}{2}\right)$; ceci eſt d'ailleurs vrai pour la première ovale même lorſqu'on n'a pas FK = KG.

$$3bn - 3bx - 2ao - 2ax \infty 0$$

$$\frac{3bn - 2ao}{2a + 3b} \infty x \infty \frac{cao - 2abm + bcn}{2ab + bc - ca} \infty x \text{ pag. præced.}$$

$$\text{reſtitue } m \infty \frac{9o - 11n}{20} \frac{3bn - 2ao}{2a + 3b} \infty \frac{cao - \frac{9}{10}abo + \frac{11}{10}abn + bcn}{2ab + bc - ca}$$

$$6abbn - 4aabo + 3bbcn - 2aobc - 3bnac + 2aaco \infty 2aaco - \frac{9}{5}aabo + \frac{11}{5}aabn + 2abcn + 3bcao - \frac{27}{10}abbo + \frac{33}{10}abbn + 3bbcn$$

$$\text{per } bao + ban \quad \frac{27}{10}abbn + \frac{27}{10}abbo - \frac{11}{5}aabo - \frac{11}{5}aabn \infty 5bcao + 5bcan$$

$$\frac{27}{10}b - \frac{11}{5}a \infty 5c$$

$$\frac{27}{50}b - \frac{22}{50}a \infty c$$

(Si $a \infty b$, ut fit cum punctum curvæ ſumitur in K, fiet HK $c \infty \frac{5}{50}$ ſive $\frac{1}{10}$ KF vel KG, quod ita eſt.)

Nota quod certa pars AF minus certa parte AG æquatur AH [4]).

---

[4]) Comparez Gino Loria, „Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven, Theorie und Geschichte" (Deutsche Ausgabe von Fr. Schütte, Leipzig, Teubner, 1902; p. 163, appartenant au III. Abschnitt „Kurven vierter Ordnung", Cap. IX „Die Cartesischen Ovale"); „... dass das Cartesische Oval zu derjenigen Kategorie von Kurven gehört, die gebildet wird von den Oertern der Punkte, deren Abstände von n festen Polen, multipliziert mit beliebigen Konstanten, eine konstante Summe geben".

Quod ſi hæc Ovalis eſt eadem quam regula et filo deſcribit Carteſius, etiam tangens utriuſque facit æquale intervallum NO ſeu x. Hoc vero ut fiat, oportet eſſe $\frac{27}{50}b$ — $\frac{22}{50}a \infty c$ in curva iſta filari. Sed in ea eſt $c \infty \frac{d-h}{2} + \frac{b-a}{2}$ ſecundum proprietatem à Carteſio ſuppoſitam, ut facile apparet.

($a + 2c + h - b \infty d$ datæ — d eſt la longueur du fil — ſecundum Carteſium. Sed et h — LF dans la Fig. 94 — eſt data. Ergo $\frac{d-h}{2}$ eſt data linea. $c \infty \frac{d-h}{2} + \frac{b-a}{2}$)

Ergo in hac curva filari erit

$$\frac{27}{50}b - \frac{22}{50}a \infty \frac{d-h}{2} + \frac{b-a}{2},$$

unde fit $$a + \tfrac{2}{3}b \infty \frac{25d - 25h}{3}$$ quæ eſt linea data. Quæ eſt proprietas primæ Ovalis Cartesij ſecundum noſtram conſtructionem. Atque ita patet hanc curvam proprietate eadem gaudere qua Cartesij Ovalis prima. Sed et prorſus eandem eſſe ſic oſtendetur.

In Curva Cartesij, d, ſive ſumma LA + 2AH + AG, tantundem ſuperat h ſive LF, quantum 2AH + AG ſuperat AF, quia LF eſt LA + AF. Atqui $d - h$ ſemper eſt eadem longitudo, etiam cum pro puncto curvæ A ſumitur K. Ergo $d - h \infty$ 2HK + KG — KF. Sed KG ∞ KF, ergo $d - h \infty$ 2HK ſive KZ. Sed in Ovali Cartesij prima fit ſemper $a + \frac{2}{3}b \infty$ GK + $\frac{2}{3}$KF, hoc eſt $\infty \frac{5}{3}$KF, (quia KG ∞ KF). Ergo quia invenimus in Curva filari eſſe $a + \frac{2}{3}b \infty \frac{25d - 25h}{3}$, hoc eſt $\frac{25}{3}$ KZ, oportet jam, ſi hæc curva eſt eadem cum illa Ovali, ut $\frac{5}{3}$KF ſit $\infty \frac{25}{3}$ KZ, hoc eſt KZ $\infty \frac{1}{5}$KF, quod ita eſt; nam FZ ad ZG ut 3 ad 2 ex conſtructione Cartesij; unde FG ad GZ ut 5 ad 2, et KG ad GZ [ut] 5 ad 4. Et KG ſeu KF ad KZ ut 5 ad 1.

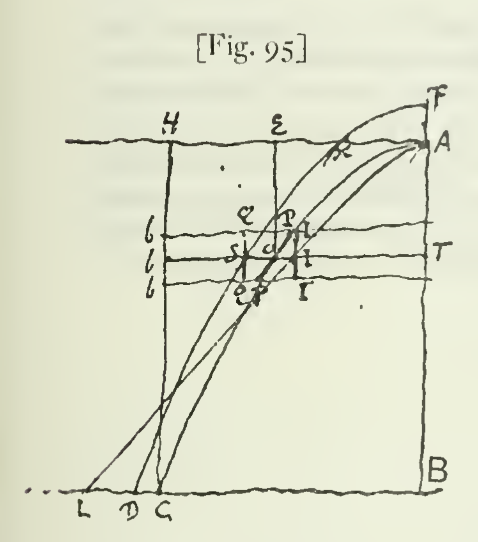
V.

SURFACE OBTENUE PAR LA RÉVOLUTION DE LA PARABOLE AUTOUR D'UNE TANGENTE AU SOMMET.

Janvier 1691

1 Jan. 1691. Quæritur [1]) superficies ex revolutione parabolæ AC circa AH, item circa BC [Fig. 95].

[Fig. 95]



BD $\infty \sqrt{rx + \frac{1}{4}rr}$ hic AB ∞ x

BC CH BD BL

$\sqrt{rx}$ — x — $\sqrt{rx + \frac{1}{4}rr}$ — y

$rxyy \infty rx^3 + \frac{1}{4}rrxx$

$y \infty \sqrt{xx + \frac{1}{4}rx}$ hyp. æquil.

AC parabola, diam. AB, vertex A, tangens in vertice AH. latus rectum ∞ r. Erit superficies ex conversione AC lineæ parabolicæ circa axem AH, ad superficiem cylindricam ex conversione CB circa eundem axem, sive ad superficiem cylindricam ex conversione HC circa axem AB, ut semihyperbolæ spatium ALB ad rectangulum HB.

Est autem hyperbolæ vertex A. latus transversum AF ∞ $\frac{1}{4}r$, itemque latus rectum. Nam posita BD $\infty \sqrt{rx + \frac{1}{4}rr}$, et descripta parabola FXD cujus latus rectum erat itidem r; erit portio AXDB ad ▭ HB ut superficies parabolica conoidis ACB ad superficiem cylindricam ex conversione HC circa AB, ut notum, quia nempe rectangulum ex particula qualibet parabolæ, ut PP ducta in OT distantiam suam ab AB, æquatur rectangulo ex respondente particula QQ parallela AB ducta in distantiam ST. Sed hoc rectangulum ex QQ in ST est ad rectangulum ex respondente bb particula rectæ HC in bT, ut ST ad distantiam bT. Ergo et ▭ ex PP in OT est ad ▭ ex bb in bT ut

[1]) Manuscrit G f. 79 v (p. 57 suivant la numération de Huygens).

ST ad bT. Sed ut ▭ ex PP in OT ad ▭ ex bb in bT ita eſt ſuperficies ex PP circa AB ad ſuperficiem ex bb curva AB. Ergo illa ſuperficies ex PP circa AB ad hanc ex bb circa AB ut ST ad bT. Atque ita tota ſuperficies ex AOC circa AB ad ſuperficiem ex HC circa eandem AB ut portio AXDB ad rectangulum HB.

Porro quia ſuperficies ex PP circa AB eſt ad ſuperficiem ex eadem PP circa AH ut OT diſtantia ad diſtantiam OE, fiat ut OT ad OE ita ST ad IT, erit quoque ST ad IT ut ſuperficies ex PP circa AB ad ſuperficiem ex eadem PP circa AH. Atqui erat bT ad ST ut ſuperficies ex bb circa AB ad ſuperficiem ex PP circa AB. Ergo ex æquo erit bT ad IT ut ſuperficies ex bb circa AB ad ſuperficiem ex PP circa AH. Ideoque omnes bT, hoc eſt ▭ HB ad omnes IT, hoc eſt ad ſpatium hyperbolicum ALB, ut omnes ſuperficies ex bb circa AB, ad omnes ſuperficies ex PP circa AH. hoc eſt ut ſuperficies cylindrica ex HC circa AB, vel ex HA circa CB, ad ſuperficiem ex AC curva circa AH. Eſt autem I punctum ad hyperbolam deſcriptam, ſicut et L, ut patet ex æquatione ſuperiori.

Poterit autem et ſuperficies ex parabolica AC circa BC inveniri, poſita quadratura hyperbolæ. Datur enim, hac poſitâ quadraturâ, longitudo parabolicæ AC [2]). Et datur ſuperficies ex AC circa AB. Ergo dabitur centri gravitatis curvæ AC diſtantia ab AB. Cumque etiam detur ſuperficies ex AC circa AH, erit ut ſuperficies ex AC circa AB ad ſuperficiem ex AC circa A H, ita dicta diſtantia centri gravitatis ad diſtantiam centri gravitatis ejuſdem ab recta AH. Ergo datur quoque hæc diſtantia centri gravitatis ab AH, quare et a BC. Sicut autem diſtantiæ ejus ab AB ad diſtantiam ab BC ita erit ſuperficies ex AC circa AB ad ſuperficiem ex AC circa BC. quare et hæc dabitur.

---

[2]) Voyez la p. 553 du T. XIV sur la „Réduction de la rectification de la parabole à la quadrature de l'hyperbole et réciproquement."

VI.

DÉVELOPPÉE DU „FOLIUM CARTESII".

[1691]

Voyez les p. 406—409 du T. XVIII.

VII.

SOLIDE DE RÉVOLUTION OBTENU PAR LA ROTATION DE LA CYCLOÏDE AUTOUR DE SON AXE.

[1691]

Voyez les p. 377—378 du T. XIV.

VIII [1]).

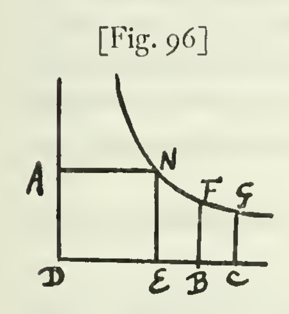
CALCUL DE LOGARITHMES EN PARTANT DE LA CONSIDÉRATION DE L'HYPERBOLE EQUILATÈRE.

[1691]

NG hyperbola asymptotis DA, DC [Fig. 96]. quadratum ejus ND.

Ad inveniendum logarithmum rationis NE ad GC sive CD ad DE, secetur EC bifariam in B, et formetur fractio cujus numerator ad denominatorem ut EB ad BD.

[Fig. 96]

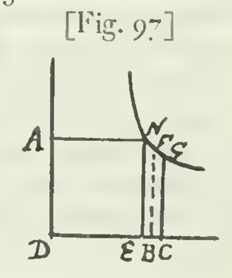


quæ fractio vocetur d. Erit jam $d + \frac{d^3}{3} + \frac{d^5}{5} + \frac{d^7}{7}$ &c bis sumptum ad 1, ut spat. NGCE ad qu. AE. hoc est ut logarithmus hyperbolicus rationis NE ad GC, seu rationis CD ad DE ad 1 [2]).

Fractio autem d commodè talis accipietur ad inveniendos logarithmos ut sit EB ad BD sicut unitas ad numerum. velut si inveniendus sit logarithmus rationis 2 ad 1. hoc est logar. 2, erit CD ad DE ut 2 ad 1, unde EB ad BD ut 1 ad 3, et d fractio erit $\frac{1}{3}$. Unde lib. G pag. 46 [3]) inventus est logar 2. Invento autem log.° 2, habebitur log. 3, si inveniatur log. $\frac{9}{8}$ nam addito tunc log.° 8 qui notus est ex log.° 2. habebitur log. 9 cujus dimidium est log. 3.

Sit jam ergo NE ad GC, seu CD ad DE ut 9 ad 8 [Fig. 97]. Eritque bisectâ EC in B, ratio EB ad BD quæ 1 ad 17, et fractio $d \infty \frac{1}{17}$, per quam itaque habebitur log. 3. Hinc porro ad log. 5 progrediemur, quærendo logar. $\frac{25}{24}$, nam ad hunc addendo log. 24 qui ex log.^{is} 2 et 3 cognoscitur, (quia 24 fit ex 2.2.2.3) habebitur log. 25, cujus dimidium est log. 5.

[Fig. 97]



Itaque hic ponendo CD ad DE ut 25 ad 24, fit EB ad BC ut 1 ad 49; unde $d \infty \frac{1}{49}$.

---

[1]) Manuscrit H, p. 2—3 (numération de Huygens). Les dates 1 Oct. 1691 et 19 Dec. 1691 se trouvent respectivement aux p. 153 du Manuscrit G et 8 du Manuscrit H.

[2]) Voyez l'endroit, datant également de 1691, du T. X que nous citons dans la note suivante; nous y renvoyons le lecteur aussi à la Pièce II de 1691 de la p. 27 du T. X.

Sic porro ad log. 7 pergemus quærendo log. $\frac{49}{48}$, cui addito log.° 48 (qui noſcitur ex log.is 2 et 3) fiet log. 49 cujus dimidium eſt log. 7. Et ſic ponendo CD ad DE ut 49 ad 48 fit EB ad BD ut 1 ad 97, et hinc fractio $d \infty \frac{1}{97}$.

Denique ita ſemper a minoribus ad majores numeros primos procedendo, invenientur eorum logar.i ex logarithmo fractionis cujus numerator eſt quadratus numeri Primi propoſiti. et denominator tantum unitate minor, et fractio d fiet unitas diviſa per duplum iſtius denominatoris. Cujus quidem denominatoris logarithmus ſemper dabitur ex logarithmis præcedentium numerorum Primorum jam inventis. Imo ex ijs tantum qui numeri Primi pro[po]ſiti atque unitate aucti dimidium non excedunt.

Sic numeri 13 logarithmus invenietur ex fractione $\frac{169}{168}$, et fractio d erit $\frac{1}{336}$. Et denominatoris 168 logarithmus dabitur ex logar.is 2.3 et 7. qui numerus 7 eſt $\frac{13+1}{2}$, nec major aliquis compoſitionem ingredietur.

Ratio eſt quia ſi numerus Primus cujus noviſſimè logarithmus quæritur dicatur a, ſit ejus quadratum unitate multatum $aa - 1$, denominator nempe fractionis cujus logarithmum ex jam inventis dari diximus. Qui itaque denominator diviſibilis eſt per $a + 1$ et per $a - 1$. qui uterque eſt numerus par ideoque per 2 dividitur, quæcunque igitur pars aliquota fuerit dicti denominatoris $aa - 1$, eam oportet partem aliquotam eſſe numeri $\frac{a+1}{2}$ vel $\frac{a-1}{2}$, ac proinde non major ſaltem poteſt eſſe quam ipſe numerus $\frac{a+1}{2}$, hoc eſt quam numerus primus de quo agitur unitate auctus ac per 2 diviſus, quod erat oſtendendum.

Tales quidem formando fractiones d, compendio obtinebimus logarithmos numerorum Primorum. Si vero quæras an nunquam majori quoque brevitate uti liceat, dicam aliquando licere. velut cum log. 7 ex fractionis $\frac{49}{48}$ logar.° invenimus: potuit idem log. 7 elici non tantum ex log.° fractionis $\frac{50}{49}$; unde fractio fit $\frac{1}{99}$; ſed et ex log.° fractionis $\frac{64}{63}$, unde fit fractio $d \infty \frac{1}{127}$. Nam dato log.° $\frac{50}{49}$, quia etiam log. 50 datur ex log.is 2 et 5, dabitur et log. 49 cujus dimidium eſt log. 7. Nempe ab log.° 50 auferendo log. $\frac{50}{49}$, fiet log. $50 \frac{50}{49}$, hoc est log. 49. Item dato log.° $\frac{64}{63}$ dabitur quoque log. 63, auferendo ab log.° 64, log. $\frac{64}{63}$. Datur autem log. 64, ex invento log. 2. Et ex log. 63 auferendo log. 9, qui datur ex invento prius log.° 3, remanebit log. 7 quæſitus. Et in univerſum quidem quando propoſiti numeri Primi poteſtas aliqua præter quadratum vel poteſtatis ipſius multiplex aliquis (per ipſo majorem, ſed omnes partes

---

[3]) Huygens a noté sur la p. 2 du Manuscrit H: Ex libro G. pag. 46. Il s'agit dans cette remarque de la Pièce que nous avons reproduite aux p. 45—47 du T. X. Voyez aussi la note 13 de la p. 535 du T. IX, où nous avons exposé en quoi la série quadratice de Huygens diffère d'une série fort semblable, et pourtant tout autre, de Leibniz.

aliquotas ipſo eodem numero Primo minores habentem) demtâ vel additâ unitate facit numerum cujus ſingulæ partes aliquotæ ipſo numero Primo minores ſunt (ſicut accidit cum 7 multiplicatur per 9) formabitur fractio utilior quam ex regula præcedente: cujus fractionis numerator et denominator erunt multiplex ille et idem + vel — 1. Sed raro aut certe non facilè talis multiplex invenitur. Aliquando vero invenire impoſſibile eſt. ut ſi quæram ad inveniendum log. 3 alium ejus multiplicem, præter quadratum ejus 9, qui utilius adhibeatur, fruſtra quæram. Hic enim multiplicans numerum 3. vel poteſtatem ejus deberet eſſe aliqua poteſtas numeri 2. quia nullus alius eſt numerus cujus quælibet pars aliquota ſit minor 3. Atqui poteſtas numeri 2 multiplicans 3, vel poteſtatem ejus, producit numerum parem, qui vel auctus vel diminutus unitate relinquit imparem, qui non poteſt habere quamlibet partium aliquotarum minorem 3, hoc eſt, qui non poteſt eſſe poteſtas aliqua numeri 2. Sed forſan poteſtas aliqua numeri 3 (præter quadratum) aucta vel multata unitate, facit poteſtatem aliquam numeri 2. quo caſu quoque utiliorem fractionem dari diximus.

IX[1].

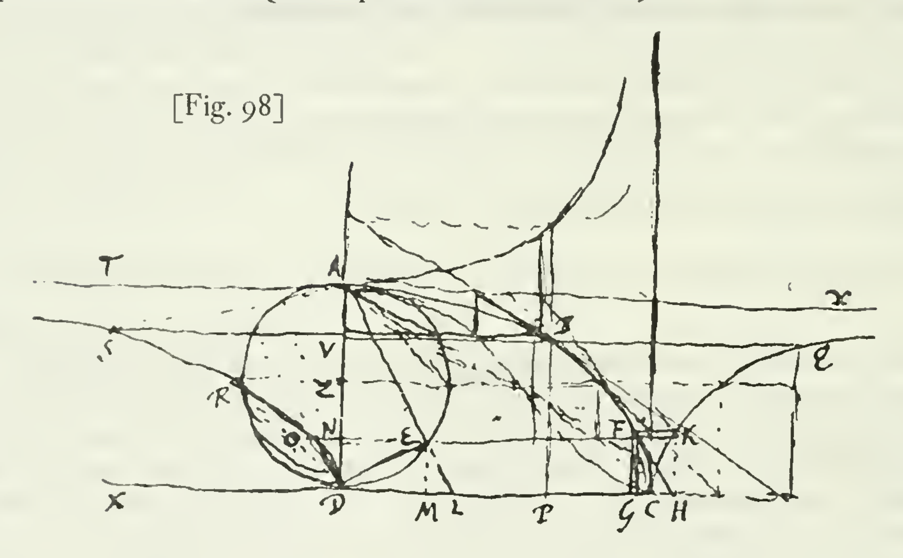
CYCLOÏDE ET CISSOÏDE; SOLIDES DE RÉVOLUTION ET CENTRES DE GRAVITÉ.

[1691 ou 1692]

En marge: Hæc pendent e Theoremate pag. 14 posteriore [2]).

ABCD Semicyclois [Fig. 98] [3]). FH tangens. FK parall. DC. HK parall. DA. K est punctum in curva CKQ. Erit spatium CFK ∞ CFG [4]).

[Fig. 98]



Sit DRS Cissoides, ad asympt. AT. applicata NO, (posita KFENO linea recta) erit æqualis ML sive GH, hoc est FK. unde spat. DNO ∞ CFK seu CFG. idque

[1]) Manuscrit H, p. 9 r (p. 17 suivant la numération de Huygens). Les p. 8 et 55 (Huygens) portent respectivement les dates 19 Dec. 1691 et 17 Apr. 1692.

[2]) Il s'agit ici de la Pièce de „décembre 1691" (voyez cependant sur cette date la note précédente) que nous avons publiée comme Appendice à une lettre de Huygens au Marquis de l'Hospital à la p. 309 du T. X. Consultez sur les notations z, λ etc. de cette Pièce la suite du présent Tome (p. 511 etc.).

ubique. Nempe et ſpat. SVD ∞ BCP. Et totum ſpatium Ciſſoidis infinitum ∞ Cycloidi dimidiæ ACD.

Item ſolidum ex ſpatio infinito Ciſſoidis circa axem DX æquale ſolido ex ſpatio Cycloidis ACD circa axem DC.

Sed ſpatij Cycloidis ACD centrum gravitatis diſtat ab DC $\frac{5}{12}$ AD [5]). Ergo ſpatij infiniti DSTA centrum gravitatis diſtat $\frac{10}{12}$ ſeu $\frac{5}{6}$ AD ab DC. ſeu $\frac{1}{6}$ AD ab AT. quod et aliunde apparet quia AN in NO ∞ DN in NE. ideoque ſemicirculus DEA circa DM vel AT revolutus facit ſolidum æquale ſolido Ciſſoidis infinito circa AT. unde radius DZ in ſemicirculum AED ductus æquale ſolidum facit ac ſpatium infinitum DSTA in diſtantiam centri gravitatis ſuæ ab AT. Eſt autem ſpatium iſtud triplum ſemicirculi. Ergo dicta diſtantia centri gravitatis erit $\frac{1}{3}$ radij ZD.

---

[3]) La présente Pièce se rattache aussi plus ou moins à celle de septembre 1691, tirée de la f. 126 r du Manuscrit G (on trouve les dates 1 Sept. 1691 et 1 Oct. 1691 respectivement sur les p. 123 r et 127 v) que nous avons publiée, comme Appendice à des pièces antérieures, aux p. 377—378 du T. XIV. Nous n'aurions guère pu y joindre la présente Pièce: les recherches de Huygens de 1658 et 1659 constituant ces „pièces antérieures" se rapportaient *exclusivement* aux „propriétés géométriques de la *cycloïde*" (voyez la p. 347 du T. XIV).

[4]) Comparez la figure et le texte de la p. 309 du T. X, déjà citée dans la note 2.

[5]) Dans sa lettre du 1 janvier 1692 à Leibniz Huygens lui rappelle (T. X, p. 224) les „profondes speculations de Mr. Pascal" et de „Wallis" sur „le centre de gravité de la demie Cycloide".

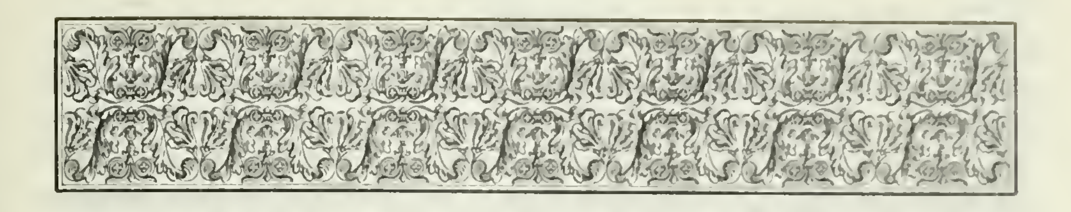
X.

CALCUL DU RAYON MINIMAL DE LA COURBE LOGARITHMIQUE.

[1692]

Voyez la p. 333 du T. X et la p. 410 du T. XVIII.

PROBLÈMES ET MÉTHODES MODERNES.



Avertiſſement.

Dans cette dernière partie mathématique du préſent Tome, on voit Huygens aux priſes avec l'eſprit moderne. En comparant le Traité de la Lumière avec l'Horologium oſcillatorium, on conſtate une différence de forme très apparente, d'abord le français au lieu du latin, en ſecond lieu la continuité de l'expoſition: le Traité ne conſiſte plus en une ſérie de théorèmes dont beaucoup prouvées rigoureuſement d'après la mode antique. Le même effort pour ne pas paraître archaïque paraît auſſi ailleurs. Ce n'eſt pas que Huygens ſoit revenu de la conviction qu'en mathématique les démonſtrations rigoureuſes ſont les ſeules véritables: il exprime encore cette conviction en 1695 [1]) dans une des dernières pages de ſon dernier manuſcrit I (Pièce VIII qui ſuit); mais il a conſtaté le ſuccès indéniable que les méthodes moins rigoureuſement logiques dont d'autres auteurs ſe contentent peuvent avoir, et Leibniz ne fut ſans doute pas le ſeul à lui conſeiller de ne pas ſ'obſtiner dans le formalisme: „Vous avés déja acquis tant de gloire, que vous vous pouués repoſer un peu, et ſi vous donniés quelques unes de vos belles penſées et découvertes toutes pures, quoyque denuées de ce bel appareil de demonſtrations formelles, mais qui genent trop et qui ſont perdre trop de temps à une perſonne comme vous eſtes, je croy que la poſterité ne vous feroit que trop obligée" [2]). Voyez d'ailleurs ce que Huygens diſait lui-même ſur ce ſujet déjà en 1659 [3]).

---

[1]) Ou peut-être vers la fin de 1694.

[2]) Lettre du 20 octobre 1679 (T. VIII, p. 237).

[3]) Note 31 de la p. 181 qui précède.

Leibniz recherchait ſurtout — et non ſeulement dans le domaine des mathématiques — les notations ſimples, celles qui conviennent à la nature des problèmes à réſoudre. Le „nouveau calcul ... offre des verités par une eſpece d'analyſe, et ſans aucun effort d'imagination, qui ſouvent ne reuſſit que par hazard, et il nous donne ſur Archimede tous les avantages que Viete et Des Cartes nous avoient donnés ſur Apollonius"[4]). Huygens reconnaît comme „certainement fort beau" que le nouveau calcul offre „comme de ſoy meſme ... des veritez [qu'on n'a] pas meſme cherchées"[5]). Cependant, n'étant plus jeune, il ne réuſſit pas à acquérir l'adreſſe néceſſaire dans le maniement des nouveaux ſymboles, dont il ne ſe ſert d'ailleurs pas toujours et même plutôt exceptionnellement[6]), et ce n'eſt véritablement qu'au prix de grands „efforts d'imagination" qu'il parvient à réſoudre certaines queſtions figurant à l'ordre du jour, e.a. des problèmes poſés dans les Acta Eruditorum, et à ſe maintenir ainſi plus ou moins au premier rang.

Le majeure partie des calculs qui occupèrent Huygens (outre ſes autres recherches) dans les dernières années de ſa vie, ſurtout depuis 1690, ont été publiées par nous, avec les commentaires néceſſaires, dans les Tomes IX et X, derniers Tomes de la Correſpondance. Ces calculs ſe trouvent d'abord dans les lettres elles-mêmes, mais ſurtout dans nos notes et Appendices. Pour que ceux de nos lecteurs qui pourraient ſ'intéreſſer aux manuſcrits ſoient en état de ſ'orienter dans ce dédale, nous publions à la fin de ce Tome, parmi les Tables, — ce qui n'a pas été fait antérieurement — une liſte des pages des Manuſcrits F, G, H et I qui ont trouvé leur place dans les deux Tomes nommés. Cette liſte fera comprendre l'impoſſibilité de réimprimer dans le préſent Tome les recherches en queſtion. Les §§ 1 et 2 de la Pièce I qui ſuit ont en vérité été réimprimés ici, pour qu'on puiſſe voir ſans peine comment les §§ ſuivants ſ'y rattachent. Mais pour les autres conſidérations et calculs publiés dans les deux Tomes, tels que ceux qui ſe rapportent à la chaînette, à la ligne d'égale deſcente ou à la tractrice, nous n'avons pas cru devoir les mettre de nouveau ſous les yeux des lecteurs, fût-ce dans un ordre qui pourrait parfois différer de celui des Tomes IX et X.

C'eſt auſſi dans les T. IX et X qu'ont été imprimés, puiſqu'elles affectent la forme de lettres à l'éditeur, les articles ſuivants, qui ont vu le jour du vivant de l'auteur[7]):

---

[4]) Lettre du 22 septembre 1691 (T. X, p. 157).

[5]) Lettre à Leibniz du 1 septembre 1691 (T. X, p. 129).

[6]) „Toute votre methode ne me demeure pas presente à l'esprit quand j'ay discontinué longtemps à m'y exercer" (Lettre à Leibniz du 27 décembre 1694, T. X, p. 698).

[7]) Nous ne tenons pas compte dans le présent Tome de ce qui se rapporte aux voiles ou à la manœuvre des vaisseaux.

T. IX, p. 224, No. 2489. Chr. Huygens à l'auteur des Nouvelles de la République des Lettres, 8 Octobre 1687. Solution du Problème proposé par M. Leibnitz dans les nouvelles de la Republique des Lettres du Mois de Septembre 1687. — Comparez la Pièce II qui suit.

T. X, p. 95, No 2681. Chr. Huygens aux éditeurs des Acta Eruditorum, 5 Mai 1691, publié en juin 1691 sous le titre „Chr. Hugenii, Dynastæ in Zulechem, solutio ejusdem problematis". — Comparez la Pièce VI qui suit.

T. X, p. 407, No. 2793. Chr. Huygens à H. Basnage de Beauval, lettre publiée dans le fascicule de décembre 1692 — février 1693, au Mois de Février, dans l'Histoire des Ouvrages des Sçavans. — Comparez les Pièces V et VI qui suivent.

T. X, p. 512, No 2823. Chr. Huygens aux éditeurs des Acta Eruditorum, Septembre 1693, publié sous le titre „C.H.Z. de problemate Bernouliano in actis Lipsiensibus hujus anni pag. 235 proposito." — Comparez la Pièce VII qui suit.

T. X, p. 673, No 2875. Chr. Huygens aux éditeurs des Acta Eruditorum, Août 1694, publié en septembre de la même année sous le titre „C.H.Z. Constructio universalis Problematis a Clarissimo viro, Jo. Bernoulio, superiori anno mense Majo propositi". — Comparez la Pièce VII qui suit.

En considérant la liste des questions mathématiques traitées par Huygens dans l'Académie des Sciences de Paris, on voit qu'il s'intéressait aux maxima et minima présentés par les courbes, et plus généralement à ceux d'expressions algébriques [8]), à la détermination des tangentes aux courbes géométriques (c.à.d. celles dont les équations ne contiennent que des puissances de x et de y, et pas de fractions), ainsi qu'à la rectification et à la quadrature de certaines courbes, sans qu'il fût en possession d'une méthode générale pour ces deux derniers problèmes.

Aujourd'hui il est évident pour chacun de nous que la recherche des tangentes et celle des maxima et des minima des courbes $y = f(x)$ ou $f(xy) = 0$ exigent la même différentiation et sont donc étroitement liées l'une à l'autre. L'on pourrait être tenté d'admettre qu'il devait en être de même pour Huygens. Tel n'était cependant pas le cas. Chercher la tangente à une courbe, ce n'est pas pour lui déterminer une tangente trigonométrique exprimée par un rapport (ce serait là un anachronisme), c'est déterminer la longueur d'une droite, savoir la soustangente, d'après une règle

---

[8]) Appendice II à la p. 300

ſimple, trouvée comme on l'a vu. Mais chercher un maximum ou un minimum, c'eſt tirer les valeurs de x de l'équation qu'on obtient en formant ce que nous appelons la différentielle dy et en l'égalant à zéro. Cette dernière règle eſt générale, quoique le calcul ne ſoit pas toujours exécutable, tandis que la règle ſuccincte pour trouver la ſouſtangente eſt bornée, comme nous venons de le dire, au cas des courbes géométriques[9]). Il n'eſt donc pas abſolument exact de dire, comme cela a été fait dans la note 6 de la p. 249 du T. X, que Huygens „évite . . . *toujours* [nous ſoulignons] . . . d'employer la différentiation des expreſſions irrationnelles". Il ne l'évite pas quand il ſ'agit de chercher un maximum ou un minimum. Voyez les p. 89 et 101 du T. XIX: en 1690 il tire *immédiatement* de l'expreſſion

$$[y =] \sqrt{\tfrac{4}{9}bb + \tfrac{4}{9}xx} + \sqrt{aa - 2ax + xx + cc}$$

la différentielle

$$[dy =] \quad \frac{\tfrac{8}{9}xe}{2\sqrt{\tfrac{4}{9}bb + \tfrac{4}{9}xx}} + \frac{-2ae + 2xe}{2\sqrt{aa - 2ax + xx + cc}} \qquad (\text{où } e = dx)$$

qu'il égale à 0 pour calculer la valeur de x rendant minimale la valeur de l'expreſſion donnée. Mais quand il a affaire en 1692 aux calculs de Hubertus Huighens, où il ſ'agit (note citée de la p. 249 du T. X) de calculer la ſouſtangente, il commence par réduire l'équation de la courbe à la forme ſans radicaux qui permet l'application de la règle, et il ſe figure que Hubertus doit avoir commencé par la conſidération de cette forme-là („hinc incepit", p. 250) quoique, comme l'obſerve à bon droit la note 7, rien ne ſoit moins certain. A la fin de ſa deuxième et dernière lettre Hubertus lui demande la „permiſſio te ſalutandi", mais nous ne trouvons pas que Huygens l'ait invité à venir le voir; plus tard auſſi il ne parle pas de lui comme d'une connaiſſance perſonnelle; peut-être avait-il l'impreſſion qu'en tenant Hubertus à l'écart il conſerverait mieux ſon preſtige vis-à-vis de ce mathématicien un peu fantaiſiſte plus jeune que lui de vingt ans et ne jouiſſant, ſemble-t-il, d'aucune célébrité, mais dont pourtant il avait l'impreſſion de ne pas comprendre à fond les méthodes donnant généralement des réſultats exacts.

Après ce que nous venons de dire on conçoit que Huygens n'ait pas non plus remarqué dans la période françaiſe qui ſe termine en 1681 et même beaucoup plus tard ce qui nous paraît aujourd'hui ſi ſimple, ſavoir que la différentiation et l'intégra-

---

[9]) Ceci ne veut pas dire que Huygens était incapable de conſtruire la tangente dans d'autres cas. Voyez les p. 463 et 464 du T. XIV où il calcule en 1661, en ſe ſervant du triangle caractériſtique, la ſous-tangente (le „latus rectum") de la courbe logarithmique. Voyez auſſi le premier alinéa de la p. 485 qui ſuit.

tion font, non feulement dans des cas particuliers, mais généralement, des opérations inverfes. Cependant la correfpondance avec Leibniz l'amène de plus en plus à voir la connexion étroite des problèmes: „Je vois — écrit-il en 1692 — qu'on peut en fuppofant autant qu'on veut de quadratures, trouver les courbes à qui elles convienent, mais d'aller de l'équation à la quadrature, je n'y vois pas moyen, fi non en quelques cas fimples" [10]).

Cette connexion entre les divers problèmes nommés eft proclamée par un autre mathématicien, du même âge que Hubertus Huighens, avec qui Huygens eut beaucoup plus de relations, favoir E. W. Tfchirnhaus ou von Tfchirnhaufen [11]). Celui-ci le vifita pour la première fois à Paris en août 1675 [12]), venant de Londres et recommandé par Oldenburg et Papin. Tfchirnhaus ne tarda pas à faire, également à Paris, la connaiffance de Leibniz à qui il avait été recommandé de même: c'eft peut-être à ce dernier qu'il eft redevable d'une partie de fes idées générales [13]). Plufieurs lettres furent échangées entre Huygens et Tfchirnhaus, foit directement, foit par l'intermédiaire de P. van Gent, médecin à Amfterdam. Il ferait trop long de réfumer cette correfpondance qui, de la part de Tfchirnhaus, homme de talent mais fort fujet à errer [14]), confifte trop fouvent dans une énumération de problèmes généraux qu'il dit pouvoir réfoudre par des méthodes qu'il garde pour lui [15]); ce qui donne lieu à Huygens de critiquer ces vantardifes réelles ou apparentes [16]). Au § 17 de la Pièce I qui fuit on trouvera un théorème général de Tfchirnhaus, énoncé par lui fans démonftration, et fur la valeur duquel Huygens eft apparemment en doute: ce théorème eft exact. Il n'en eft pas ainfi d'un autre théorème affez femblable difcuté au § 1 de la Pièce I, et fur le fujet duquel Huygens difait en mars 1687 [16]): „Tangentium inven-

---

[10]) Lettre du 15 mars 1692 (T. X, p. 270).
[11]) 1651-1709; mentionné pour la première fois à la p. 490 du T. VII.
[12]) Tschirnhaus rendit visite à Huygens à la Haye en août ou septembre 1682 (T. VIII, p. 386) et en septembre 1694 (T. X, p. 697).
[13]) Voyez p.e. la note 7 de la p. 254 du T. X.
[14]) Comparez le „Vorwort" de H. Weissenborn de sa „Lebensbeschreibung von Ehrenfr. Walther von Tschirnhaus auf Kiesslingswalda, und Würdigung seiner Verdienste" (Eisenach, Bærecke, 1866).
[15]) Voyez p.e. les p. 469-471 du T. VIII, datant de 1683.
[16]) Voyez p.e. la p. 123 du T. IX, datant du 10 mars 1687.

tionem tuam in lineis circa plura centra descriptis vellem demonstratione confirmasses . . ." Huygens n'en avait pas encore reconnu la fausseté[17]), lorsqu'il reçut trois jours plus tard la visite de N. Fatio de Duillier, jeune homme de 23 ans, qui l'avait aperçue[18]).

Cette visite fut un grand événement dans la vie de Huygens: la jeunesse frappait à sa porte, non pas pour l'évincer, mais pour travailler avec lui[19]). En 1692[20]) Huygens écrira à Fatio (résidant alors en Angleterre), en parlant de Leibniz: „Vous voila egalement eloignez de vouloir rien apprendre l'un de l'autre, qui est une delicatesse que je n'ay point, ainsi qu'il a paru; car *j'ay esté bien aise d'apprendre de tous les deux* [nous soulignons]."

La Pièce I fait voir comment Huygens, de concert avec Fatio, considéra, après la correction du théorème de Tschirnhaus dont nous avons parlé, en restant dans le même ordre d'idées, la méthode pour mener des tangentes aux courbes données en coördonnées bipolaires etc.[21]) — Nous avons déjà parlé du § 17 qui fait bien voir que dans l'esprit de Tschirnhaus il s'agit en premier lieu de courbes pouvant être décrites par des fils tendus, comme c'était aussi le cas pour la première ovale de Descartes, dont la considération sous ce point de vue par Huygens se rattache à celles de la Pièce I: si nous l'avons néanmoins placée — plus ou moins arbitrairement — parmi les „Mathematica varia 1681 — 1695" c'est parce que cette ovale était une courbe fort connue à Huygens depuis sa jeunesse. On voit bien ici — nous pourrions dire la même chose pour la chaînette[22]) — que les „problèmes modernes" dont traite la présente Partie n'étaient pas en général des problèmes parfaitement nouveaux: la chose essentielle c'est l'évolution des méthodes qui permettait souvent de chercher les solutions avec plus de succès. Dans ses „Commentarii in Librum II" de la Géométrie de Descartes van Schooten n'avait pas tâché de justifier la construction de Descartes à l'aide d'un fil de la première ovale, comme le fait Huygens en 1690.

---

[17]) C'est ce que Huygens dit expressément dans sa lettre à van Gent du 1 juillet 1687 (T. IX, p. 185) et de nouveau dans une lettre à Leibniz du 18 novembre 1690 (T. IX, p. 538).

[18]) Nous avons déjà mentionné cette visite à la p. 396 qui précède.

[19]) Fatio resta à la Haye jusqu'en mars 1687 (T. IX, p. 134).

[20]) T. X, p. 287.

[21]) Voyez sur les publications de Fatio sur ces sujets en 1687 et 1689 dans la „Bibliothèque Universelle et Historique" les p. 154 et 175 du T. IX ainsi que la note 14 à la p. 219 du même Tome.

[22]) Voyez les p. 37 et suiv. du T. XI datant de 1646.

Dans la Pièce I les §§ 6 et 7 fortent du cadre, puifqu'il y eſt queſtion de tangentes à la parabole et à la circonférence de cercle données l'une et l'autre en coördonnées cartéſiennes, la direction d'une tangente étant déterminée, directement, par le calcul du rapport de deux côtés du triangle caractériſtique fort ou plutôt infiniment petit. Comparez la note 9 de la p. 482.

Ces calculs eurent auſſi pour réſultat de mettre Huygens en état de réſoudre à ſa manière — voyez le § 16 de la Pièce I — le problème poſé par Leibniz en janvier 1680 que ce dernier intitule „Exemplum ex Nova mea Tangentium Methodo ductum"[23]), que nous avons publié à la p. 269 du T. VIII en diſant (note 3): „Dans les Oeuvres inédites qui ſuivront cette Correſpondance, nous aurons l'occaſion de revenir ſur ces recherches de 1687". Nous ne jugeons pourtant pas néceſſaire de reproduire dans le préſent Tome les p. 17 — 19 du Faſciculus II de P. J. Uylenbroek (1833), où celui-ci indique quelle aurait été la forme de la démonſtration d'après les idées de Leibniz.

Comme Huygens, Fatio était avant tout géomètre. „Les lignes droites", dit-il, „ſont plus commodes que les nombres, pour exprimer toutes ſortes de proportions"[24]).

En 1691 — comparez la p. 396 qui précède — le jeune ſuiſſe revint à la Haye pour y reſter pluſieurs mois. Entretemps il avait été en Angleterre, où il devait paſſer le reſte de ſa longue vie: il en revenait plein de reſpect pour les méthodes anglaiſes — nous rappelons que les „Principia" de Newton avaient paru en 1687 peu après les recherche du § 1 de la Pièce I qui ſuit —, bien convaincu auſſi qu'il avait appris à connaître plutôt les réſultats obtenus par ces méthodes, que les méthodes elles-mêmes[25]). On ſait que Newton, quoiqu'il parle de ſa méthode des fluxions dans le Lemma II de la Sectio II du Liber Secundus, avait en général donné à ſon livre une forme géométrique qui en rend la lecture malaiſée. Dans une lettre à Römer de ſeptembre 1690[26])

[23]) Ce ne fut pourtant qu'en 1684 (Acta Eruditorum, mois d'octobre) que Leibniz publia sa „Nova methodus pro Maximis et Minimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus".

[24]) T. IX, p. 158. C'est une citation de l'article de 1687, déjà mentionné dans la note 21 de la p. 484, qui est intitulé: „Reflexions de Mr. N. Fatio de Duillier sur une methode de trouver les tangentes de certaines lignes courbes, laquelle vient d'être publiée dans un Livre [de Tschirnhaus] intitulé Medicina Mentis".

[25]) Comparez les deux dernières lignes de la p. 376 qui précède.

[26]) T. IX, p. 490.

Huygens parle du „Newtoni librum . . . in quo obſcuritas magna . . . attamen multa acute inventa". C'eſt en 1691, plus encore qu'en 1687, que Fatio et Huygens travaillèrent enſemble. La Pièce III qui ſuit, de beaucoup la plus longue des Pièces de la préſente Partie, fait voir que la méthode de Fatio pour réſoudre *le problème inverſe des tangentes* ſut amplement conſidérée par les deux ſavants. Il y a des pages (voyez nos §§ 13 — 18) où les mains de Fatio et de Huygens alternent dans le Manuſcrit, comme on en trouve ailleurs, datant de 1675-1676, où alternent celles de Leibniz et de Tſchirnhaus[27]). Vu le grand intérêt témoigné par tant d'hiſtoriens pour tout ce qui ſe rattache à la période de l'enfance du calcul infinitéſimal moderne (étroitement lié, il eſt vrai, à des ſpéculations antiques, notamment à celles d'Archimède), nous croyons bien faire de publier toutes ces pages in extenſo.

Fatio avait déjà donné un aperçu de ſa méthode dans ſa lettre à Huygens du 24 juin 1687[28]); mais la choſe en reſta là juſqu'à la viſite à la Haye de 1691. Voyez, au début du § 3 de la Pièce III, ce que nous diſons ſur des expoſés plus complets, reſpectivement par Fatio et par Huygens, en 1691 et en 1693.

Dans le même temps Huygens était en correſpondance avec Leibniz qui d'ailleurs lui avait demandé déjà en 1679[29]) ſ'il avait „quelque beau probleme, qui dépende à Methodo Tangentium inverſa" diſant „je ſerois bien aiſe de voir ſi j'en pourrois venir à bout"; mais alors Huygens n'avait pas ſatiſfait à cette demande, et la correſpondance était demeurée interrompue depuis janvier 1680[30]) juſqu'à janvier 1690 (avec l'exception d'une lettre de Leibniz de janvier 1688[31]); voyez ce que nous diſons dans la note 30 ſur cette lettre et ſur la Pièce II qui ſuit). En 1690 les lettres échangées furent au nombre de onze, en 1691 de quatorze. Ce fut dans la lettre du 24 août 1690[32]), où Huygens dit: „J'ay vu de temps en temps quelque choſe de Voſtre nouveau calcul Algebraique dans les Actes de Leipſich, mais y trouvant de l'obſcuritè, je ne l'ay pas aſſez etudiè pour l'entendre, comme auſſi parce que je croiois

---

[27]) H. Weissenborn, ouvrage cité dans la note 14 de la p. 483, p. 5.
[28]) T. IX, p. 167.
[29]) T. VIII, p. 215, lettre du 8 septembre 1679.
[30]) La dernière lettre de Leibniz de cette période, celle de janvier 1680, contient le problème dont il est question dans le deuxième alinéa de la p. 485 qui précède et que Huygens ne résolut, comme on l'a vu, que dans la première moitié de 1687. La lettre de janvier 1688 se rapporte à la solution par Huygens en octobre 1687, d'un problème proposé publiquement par Leibniz (Pièce II qui suit).
[31]) T. IX, p. 257.
[32]) T. IX, p. 470.

avoir quelque methode equivalente, tant pour trouver les Tangentes des Lignes courbes où les regles ordinaires ne fervent pas, ou fort difficilement [eft-ce une allufion au calcul de la tangente à la courbe logarithmique, à l'aide du triangle caractériftique, note 9 de la p. 482? ou plutôt à celui du calcul de la Pièce I de 1687, ayant trait aux courbes données en coördonnées bipolaires etc? c'eft bien plus probable puifque par ce dernier calcul Huygens avait réfolu le problème de Leibniz dont il eft queftion dans la note 30], que pour plufieurs autres recherches", que Huygens propofa enfin à Leibniz quelques problèmes dépendant de la „Methodus Tangentium inverfa": les fouftangentes données étaient $\frac{y^2}{2x} - 2x$ et $\frac{2x^2y - a^2x}{3a^2 - 2xy}$, choifies comme le dit le paffage du Manufcrit G qui conftitue l'Appendice à cette lettre. Leibniz trouva des folutions. Nous croyons inutile de réfumer la correfpondance ultérieure de 1690 entre Huygens et Leibniz, où il eft encore queftion d'autres fouftangentes et des courbes correfpondantes: elle eft pourvue, comme nous l'avons dit plus haut, de notes explicatives et d'Appendices empruntés aux manufcrits. Le lecteur qui s'intéreffe au fujet peut bien prendre la peine de la lire lui-même.

On conçoit maintenant que puifque Huygens, au moment de recevoir la deuxième vifite de Fatio, était déjà en correfpondance depuis plufieurs mois avec Leibniz fur le problème inverfe des tangentes, la méthode de Fatio fut accueillie par lui avec beaucoup d'intérêt; et que dans la Pièce III on rencontre plufieurs fois le nom du favant allemand ainfi que les équations déjà examinées. Dans fa lettre du 23 février 1691 [33]) Huygens ne cache pas à Leibniz que Fatio eft à la Haye, que fa méthode fe perfectionne, et qu'il „m'a trouvè les deux mefmes courbes dont je vous avois propofè les fouftangentes". Il fut bientôt queftion d'un échange des méthodes, premièrement propofé par Leibniz en mars 1691 [34]); on trouve dans notre T. X l'hiftoire des pourparlers fur cet échange qui en fin de compte n'eut pas lieu; la difcuffion fe prolongea jufqu'en mai 1692. „Eruditi fontes inventionis alijs non libenter communicant" difait Tfchirnhaus en 1687 [35]).

Huygens traita auffi du problème des tangentes renverfées dans fa correfpondance avec le jeune Marquis de l'Hofpital qui avait déjà pris fon parti en 1690 dans la quef-

[33]) T. X, p. 21.
[34]) T. X, p. 50.
[35]) T. IX, p. 178.

tion du centre d'ofcillation[36]). Pas moins de 28 lettres échangées de 1692 à 1695 fe trouvent dans notre T. X. N'ayant que fort peu à ajouter à cette importante correfpondance, nous ne croyons pas qu'il y ait lieu de la réfumer ici. On n'y remarque guère de réticences. Qu'on relife p.e. la lettre de Huygens, mentionnée au début du § 3 de la Pièce III, où il expofe la méthode de Fatio, ou la fin de fon article de 1693 dans l'Histoire des Ouvrages des Sçavans" (No 2793, p. 481 qui précède) où il fait l'éloge du Marquis. Ce dernier, ayant mieux pu affimiler les méthodes leibniziennes, fe montrait en effet plus avancé que Huygens dans l'art, fi important et fi complexe encore aujourd'hui, d'intégrer les équations différentielles.

Il convient de ne pas terminer cet Avertiffement fans dire encore un mot du calcul anglais des fluxions. En juin ou juillet 1693[37]) Huygens reçut la vifite de David Gregory qui lui communiqua une certaine règle et lui parla de Newton. Huygens communiqua à fon tour à Leibniz „l'extrait de l'ouurage de Mr. Wallis touchant M. Newton" qu'il avait reçu en cette occafion[38]). Le 29 mai 1694[39]) Huygens écrit à Leibniz: „Mr. Wallis m'a envoiè la nouvelle edition Latine de fon grand ouvrage de *Algebra*, augmentè de quelque chofe de nouveau des feries de Mr. Newton, où il y a des equations differentielles, qui reffemblent tout à fait aux voftres, hormis les characteres". A quoi il ajoute le 16 juin dans une lettre à de l'Hofpital[40]), après avoir cité Wallis difant que la méthode expofée par Barrow dans fes „Lectiones Geometricæ" eft plus ancienne que celles de Newton et de Leibniz et que „quod ab his duobus eft fuperadditum, eft formularum analyfeos brevium et commodarum adaptatio illius theorijs": „En quoy pourtant il [Wallis] fait tort à ces Meffieurs".

[36]) T. XVIII, p. 457 et suiv.
[37]) T. X, p. 462.
[38]) T. X, p. 669, 675.
[39]) T. X, p. 610.
[40]) T. X, p. 623.

PROBLÈMES ET MÉTHODES MODERNES.

I. Fatio de Duillier et Huygens. Méthode des tangentes pour les „curvæ filares" de Tschirnhaus, ou plutôt pour les courbes données en coördonnées bipolaires, tripolaires etc., les poles étant situés sur une ligne droite (1687).

II. Solution du Probleme proposè par M. Leibnitz dans les nouvelles de la Republique des Lettres du Mois de Septembre 1687 [1]) (sur la courbe de descente uniforme) (1687).

III. Fatio de Duillier et Huygens. Règle pour trouver l'équation d'une courbe lorsque la soustangente est donnée en coördonnées cartésiennes („problème inverse des tangentes" ou „problème des tangentes renversées") (1691).

IV. Methodus Leibnitij [1]) (1691).

V. A propos de la méthode du Marquis de l'Hospital (1692).

VI. Le problème de la chaînette, etc. (1691 et 1693).

VII. Solution d'un problème mathématique proposé par Jean Bernoulli (1693 et 1694).

VIII. A propos des „Reflections upon Ancient and Modern Learning" de W. Wotton (1694 ou 1695).

---

[1]) C'est ainsi que Huygens lui-même intitule cette Pièce.

I.

FATIO DE DUILLIER ET HUYGENS. MÉTHODE DES TANGENTES POUR LES „CURVÆ FILARES" DE TSCHIRNHAUS, OU PLUTÔT POUR LES COURBES DONNÉES EN COÖRDONNEES BIPOLAIRES, TRIPOLAIRES ETC., LES POLES ICI CONSIDERÉS ÉTANT SITUÉS SUR UNE DROITE.

1687.

§ 1 [1]). 1687. 13 ou 14 martij, Mr. de Duillers me communiqua sa methode des Tangentes pour les lignes courbes de Mr. de Tchirnhaus, par la quelle il paroiſſoit que ce dernier s'eſtoit trompè dans une choſe ou il ſe vante d'avoir merveilleuſement reuſſi.

Voyez ſur les courbes de Tſchirnhaus le § 17 qui ſuit ainſi que les p. 483—484 de l'Avertiſſement qui précède.

Le lendemain je luy montray ma demonſtration exacte de ſa methode, et remarquay qu'on pouvoit proceder de l'une ligne a l'autre, une à une.

Dimanche le 16 je trouvay que la perpendiculaire a la tangente devoit paſſer par le centre de gravitè de tous les fils qui ſervent a la deſcription de la courbe, en prenant ſur elles [liſez: ſur eux] des portions egales depuis le point donnè, et le demontray dans les cas de deux et de trois fils.

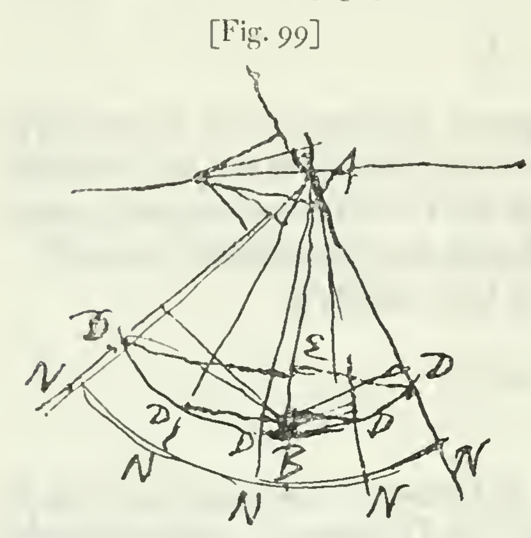
Lundi 17 je dis cela a Mr. de Duilliers, qui voulut le nier d'abord, ayant pourtant eſtè fort pres de trouver la meſme choſe, mais l'ayant en ſuite rejettée, et ayant eſcrit à coſtè de ſon raiſonnement *Cecy eſt fort douteux, et ainſi ma belle Methode ou Theorie*

---

[1]) Manuscrit F, p. 271. Notre „§ 1" a été imprimé en partie — comparez la note 2 de la p. 181 du T. IX — par P. J. Uylenbroek aux p. 56 et 57 du Fasciculus II des „Christiani Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicæ et philosophicæ". Hagæ Comitum, ex typographia regia, MDCCCXXXIII. Le § 2 s'y trouve en entier aux p. 57—58.

court grand risque d'estre fausse. Cependant ce qu'il avoit trouvè de la somme egale des sinus, servoit a demontrer facilement le Theoreme susdit du centre de gravitè, et estoit fort beau. Voiez à la page precedente [c. à. d. le § 2 qui suit].

[Fig. 99]



Il avoit trouvè le centre de gravitè de tous les points N [Fig. 99], puis il considera que la somme des perpendiculaires tirées d'un point de la ligne AB si elle estoit perpendiculaire a la tangente, devoit estre egale d'un et autre costè de cette ligne. En suite il crut que ces distances depuis les centres de gravitè des fils au point B estant egales d'un costè et d'autre, cela ne convenoit pas au centre de gravitè. Mais s'il avoit menè des points D des sinus sur AB, il auroit vu qu'ils estoient chacun egaux perpendiculaires de B sur les lignes AN, et qu'ainsi AB estoit le vray axe de pesanteur des fils.

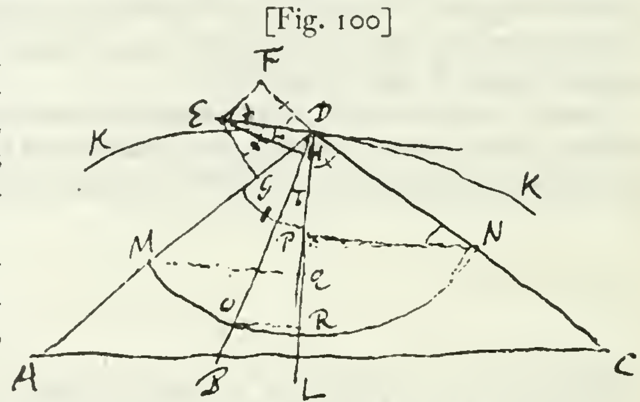
Après le 17 mars Huygens resta en communication avec Fatio de D.: on lit au bas de la feuille: prestè le reçeuil des Journaux de 1685 [il s'agit sans doute du Journal des Scavans ou peut-être aussi des Acta Eruditorum] à M.r Duilliers 20 Mars 1687.

§ 2 [2]). A, B, C [Fig. 100] puncta data in linea recta vel utcunque. KDK curva ejusinodi naturæ ut ductis ad ejus punctum quodlibet rectis AD, BD, CD. harum summa sit datæ rectæ æqualis. quæritur tangens in D.

Sit ea DE, et E punctum proximum D. idque censendum in curva existere. Ab E in rectas AD, BD, CD, si opus est productas, cadant perpendiculares EG, EH, EF.

Ergo si ex A, B, C ducerentur rectæ ad E, cresceet ea quæ ex C longitudine DF,

[Fig. 100]



[2]) Manuscrit F, p. 270.

quæ ex B diminuetur longitudine DH, quæ ex A diminuetur item longitudine DG. Ergo ut ſumma ductarum ex A, B C, ad E ſit æqualis tribus ex A, B, C ad D ductis, hoc eſt rectæ datæ, oportet DF æquari duabus DH, DG.

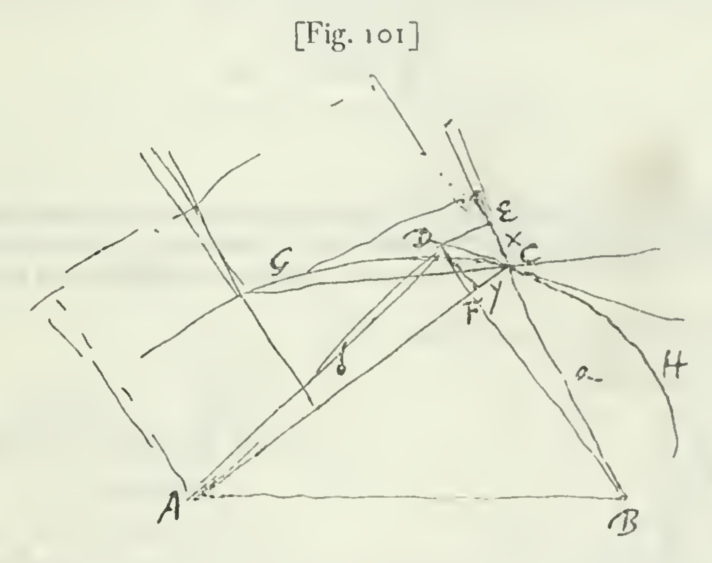
Sit tangenti DE perpendicularis DL, et ex D deſcripta circumferentia ſecet rectas AD, BD, CD in M, O, N. unde ducantur in DL perpendiculares MQ, OR, NP. Quod ſi jam pro radio circuli ſumatur DE, apparet angulorum DEF, DEH, DEG eſſe ſinus DF, DH, DG. Iſtis autem angulis æquales ſunt ſingulis ſinguli PDN, RDO QDM, quorum ſinus ſunt NP, OR, MQ. Ergo ſicut ſinus DF æquatur duobus DH, DG, ita ſinus NP æquabitur duobus OR, MQ. Unde facile colligitur punctorum M, O, N centrum gravitatis eſſe in recta DL. Itaque reperto hoc centro, dabitur recta DL, quæ tangenti DE eſt ad angulos rectos. Eadem vero eſt conſtructio quotcunque data fuerint puncta [unde rectæ] ad D ducendæ quarum ſumma ſit data.

---

§ 3 [3]). *Ratio inveniendarum tangentium in curvis lineis.*

Ponitur CD [Fig. 101] eſſe tangens quæſita in puncto C. in ea proximè puncto C,

[Fig. 101]



accipi intelligitur punctum D. quod idem in curva propoſita eſſe cenſetur. Ex D cadant perpendiculares in AC et BC, nempe DF, DE. Recta AC ſuperare cenſetur

---

[3]) Les §§ 3—7 se trouvent à la p. 272 du Manuscrit F. Le § 3 a été publié par Uylenbroek à la p. 24 du Fasciculus II. Les p. 24—28 de ce fascicule contiennent aussi des fragments des §§ suivants, jusqu'au § 16 inclus.

rectam AD differentiâ FC quia DF minima respectu AF. Item BD superare censetur rectam BC, differentia CE. CE vocatur x. CF, y. quarum si inter se ratio cognoscatur, dabitur D punctum in concursu perpendicularium ED, FD. adeoque tangens CD. Ista vero ratio investigatur ex æquatione in qua ponitur parte una proprietas curvæ lineis datis AC, CB expressa; parte altera eadem proprietas expressa lineis AD, BD, seu pro ijs AF, EB.

Vel tantummodo exprimatur proprietas curvæ positis $a+x$ et $b-y$ pro a et b. et deleantur omnia præterquam in quibus unum x aut y. Ut deleantur etiam in quibus x et y conjunctim. Reliqua dabunt rationem x ad y ac proinde tangentis constructionem.

§ 4. Proprietas curvæ $\quad da+db \infty ab. \quad$ d linea data.

$$\begin{array}{c|c} a+x+b-y & a+x \\ d & b-y \\ \hline da+dx+db-dy & \infty\ ab+bx-ay-xy \end{array}$$

$$dx-bx \infty dy-ay-xy$$

$$x \top y = a-d \top b-d$$

§ 5. Proprietas curvæ ut $\quad a^3+b^3 \infty d^3$ datæ.

$$d^3 \infty a^3+3aax+3axx+x^3+b^3-3bby+3byy-y^3 \infty a^3+b^3 \infty d^3$$

$$3aax \infty 3bby$$

$$x \top y = bb \top aa$$

---

§ 6. Les §§ 6 et 7 sortent du cadre de la Pièce I: il ne s'agit pas ici de coördonnées bipolaires (ou tripolaires etc.), mais de coördonnées cartésiennes orthogonales; a et b sont les coördonnées courantes, x et y leurs accroissements. Le rapport $y:x$ détermine la direction de la tangente.

Parabola [Fig. 102]. r latus rectum.

[Fig. 102]



$$\begin{array}{c|c} a-x & b-y \\ r & b-y \\ \hline ar-rx\ \infty & bb-2by+yy \end{array}$$

$$rx \infty 2by$$

$$r \top 2b = y \top x$$

$$\tfrac{1}{2}r \top b = y \top x \text{ bon.}$$

§ 7. In circulo.

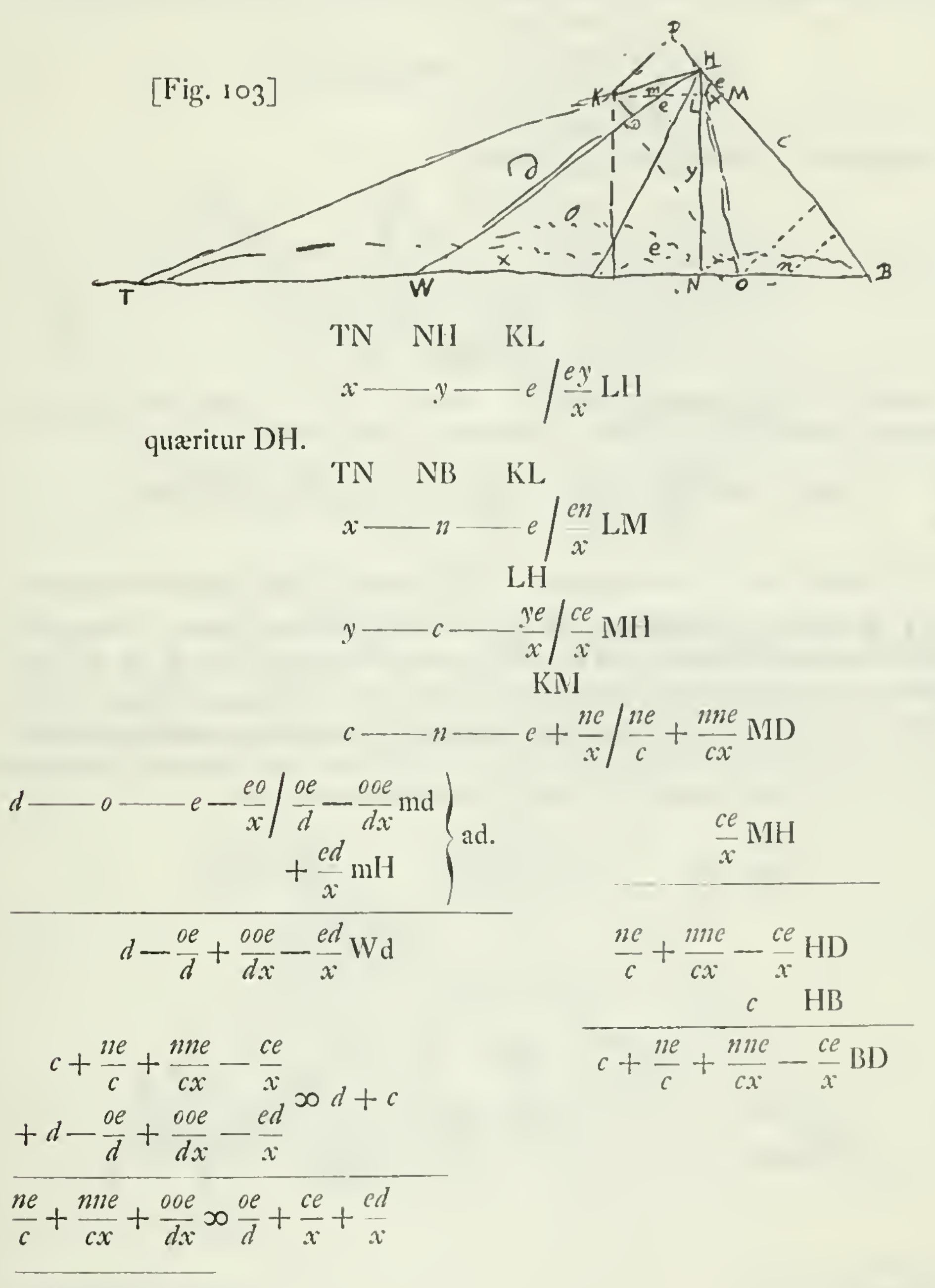
$$+aa+2ax+xx+bb-2by+yy \infty aa \infty bb$$

$$2ax \infty 2by$$

$$x \top y - b \top a$$

§ 8 [4]). HO perpend. in tangentem HK [Fig. 103]. Hic NT ponitur ∞ x.
Puisque $d + c =$ conft. (d'après les équations qui fuivent) il s'agit ici de l'ellipfe.

[Fig. 103]



$$\begin{array}{cccc} TN & NH & KL & \\ x & y & e & \Big/ \frac{ey}{x}\ \text{LH} \end{array}$$

quæritur DH.

$$\begin{array}{cccc} TN & NB & KL & \\ x & n & e & \Big/ \frac{en}{x}\ \text{LM} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & & \text{LH} & \\ y & c & \frac{ye}{x} & \Big/ \frac{ce}{x}\ \text{MH} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & & \text{KM} & \\ c & n & e + \frac{ne}{x} & \Big/ \frac{ne}{c} + \frac{nne}{cx}\ \text{MD} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} d \text{———} o \text{———} e - \frac{eo}{x} \Big/ \frac{oe}{d} - \frac{ooe}{dx}\ \text{md} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{ed}{x}\ \text{mH} \end{array}\right\}\text{ad.}$$

$$\frac{ce}{x}\ \text{MH}$$

$$d - \frac{oe}{d} + \frac{ooe}{dx} - \frac{ed}{x}\ \text{Wd}$$

$$\frac{ne}{c} + \frac{nne}{cx} - \frac{ce}{x}\ \text{HD}$$

$$c\ \ \text{HB}$$

$$c + \frac{ne}{c} + \frac{nne}{cx} - \frac{ce}{x}\ \text{BD}$$

$$\left.\begin{array}{l} c + \frac{ne}{c} + \frac{nne}{cx} - \frac{ce}{x} \\ + d - \frac{oe}{d} + \frac{ooe}{dx} - \frac{ed}{x} \end{array}\right\} \infty\ d + c$$

$$\frac{ne}{c} + \frac{nne}{cx} + \frac{ooe}{dx} \infty \frac{oe}{d} + \frac{ce}{x} + \frac{ed}{x}$$

[4]) Manuscrit F, p. 273.

§ 9 [5]) Les équations qui fuivent font voir qu'ici le produit *cd* des deux rayons vecteurs eft par hypothèfe conftant. Il s'agit donc de la courbe qui plus tard recevra le nom de lemnifcate.

$$\left.\begin{array}{l} c + \frac{ne}{c} + \frac{nne}{cx} - \frac{ce}{x} \\ d + \frac{oe}{d} + \frac{ooe}{dx} - \frac{ed}{x} \end{array}\right\} \text{mult. [Fig. 103]}$$

Omittuntur in quibus plura *e* quam unum.

$$dc + \frac{dne}{c} + \frac{dnne}{cx} - \frac{2dce}{x} - \frac{coe}{d} + \frac{cooe}{dx} \infty\, cd$$

$$ddnx + d^2nn + ccoo \infty\, ccox + 2ddcc$$

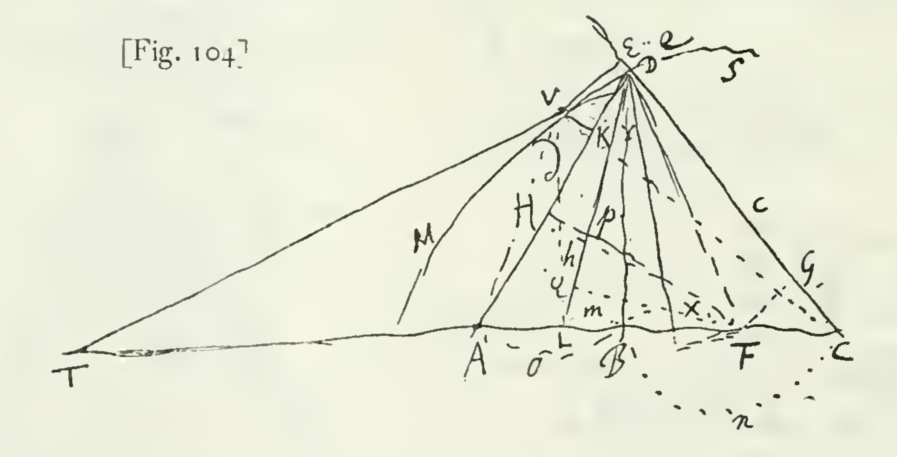
$$\mathrm{NT}\ x \infty \frac{2ddcc - ddnn - ccoo}{ddn - cco}$$

Atqui $cc - nn \infty pp$ atque etiam $dd - oo \infty pp$. Huygens défigne donc maintenant par *p* ce qui dans la Fig. 103 s'appelle *y*, et dans la Fig. 104 s'appellera *p*.

$$\mathrm{NT}\ x \infty \frac{ddpp + ccpp}{ddn - cco} \text{——} p \text{——} p \Big/ \frac{ddn - cco}{dd + cc}\ \mathrm{ON}$$

N.B. quod hic [c. à. d. dans les facteurs $c + \frac{ne}{c}$ etc. et $d - \frac{oe}{d}$ etc.] in numeratoribus nullum *x*. et unum *e* vel nullum. et in denominatoribus tantum unum *x*. Cumque in æquatione tantum fcribenda funt in quibus unum *e* vel nullum, hinc fit ut, five quadrata inventarum linearum five cubi five rectangula ex duabus, vel folida ex tribus, efficienda fint, femper tamen fimplex *x* æquale proditurum fit quantitati cognitæ.

§ 10 [5]). Le calcul fuivant s'applique à la Fig. 104. Le réfultat eft le même que celui obtenu dans le § 9: ce qui plus haut s'appelait ON eft maintenant défigné par BF ou *x*.



[5]) Manuscrit F, p. 274.

Proprietas curvæ MDS, ut femper ▭ duarum ex C et A punctis ad ipfam ductarum eidem fpatio qq æquale fit.

$$\begin{array}{lllll} CD & DB & CF & & \\ c & p & n-x & \frac{pn-px}{c} & FG \\ d & p & o+x & \frac{po+px}{d} & FH \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} FG & FH & DE \\ \frac{pn-px}{c} & \frac{po+px}{d} & e \quad \frac{coe+cxe}{dn-dx} \quad DK \\ & & \text{ex } d \quad DA \end{array} \Big\} \text{ s.}$$

$$\frac{ddn-ddx-coe-cxe}{dn-dx} \quad AK, \qquad c+e \quad CE \Big\} \text{ m.}$$

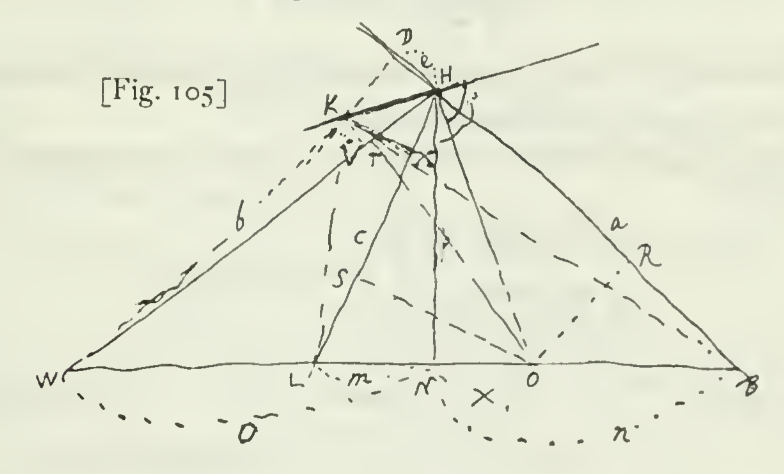
$$\frac{cddn-cddx-ccoe-ccxe+ddne-ddxe-coee-cxee}{dn-dx} \infty q^2$$

$$cco+ccx+ddx \infty ddn$$

$$BF\ x \infty \frac{ddn-cco}{cc+dd}$$ convenit cum ON [Fig. 103 et Fig. 105]

§ 11 [6]). Hoc modo optimè et breviffimè ad æquationem pervenitur [Fig. 105]. Idem hic modus eft qui in fine paginæ præcedentis [§ 10].

[Fig. 105]



[6]) Manuscrit F, p. 275.

$$\begin{array}{llll} BH & HN & BO & OR \\ a & p & n-x & \frac{pn-px}{a} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} LH & HN & LO & \\ c & p & m+x & \frac{pm+px}{c}\ OS \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} OR & OS & HD & \\ \frac{pn-px}{a} & \frac{pm+px}{c} & e & HX \end{array}$$ nam △ HOR ſimile KHD et △ HOS ſimile KHX ut facile apparet propter angulum rectum OHK. nam HO ponitur perpend. in tangentem HK.

$$cn-cx \text{ —— } am+ax \text{ —— } e \Big/ \frac{ame+axe}{cn-cx}\ HX$$

$$c\frac{-ame-axe}{cn-cx}\ LX \text{ pro } LK \qquad a+e\ BD \text{ pro } BK$$

$$\left.\begin{array}{r} c\frac{-ame-axe}{cn-cx}\ LK \\ a+e\ BD \end{array}\right\} m.$$

$$ac+ce\frac{-aame-aaxe}{cn-cx} \infty\ ac \ \Box\ BH,\ HL$$

$$ccne-ccxe-aame-aaxe \infty\ 0$$

$$\frac{ccn-aam}{cc+aa} \infty\ x\ ON$$

ON [ou plutôt BF] ex pag. ante præcedentem $\frac{ddn-cco}{dd+cc}$ convenit cum hac ON (d pro c, c pro a, o pro m), ſed hic facilius invenitur.

§ 12. Cas où la courbe conſidérée eſt déterminée par la conſtance de la ſomme des deux rayons vecteurs c et d:

$$\left.\begin{array}{l} c+\frac{ne}{c}+\frac{nne}{cx}-\frac{ce}{x} \\ c+\frac{ne}{c}+\frac{nne}{cx}-\frac{ce}{x} \end{array}\right\} \text{[termes obtenus au § 8]}$$

$$c^3+3nex+\frac{3nnec}{x}-\frac{3c^3e}{x}+d^3-3doe+3\frac{dooe}{x}-3\frac{d^3e}{x} \infty\ c^3+d^3$$

$$3nec+3nnc-3c^3-3dox+3doo-3d^3 \infty\ 0$$

$$x \infty \frac{d^3+c^3-doo-cnn}{cn-do}$$

Sed $dd - oo \propto pp$, $cc - nn \propto pp$ NT $x \propto \frac{dpp + cpp}{cn - do}$ [Fig. 103 où toutefois p s'appelait y]

$$x \propto \frac{pp}{\frac{cn - do}{d + c}}$$

$$\text{NO} \propto \frac{cn - do}{d + c}$$

§ 13. Proprietas ut ſolidum trium rectarum à punctis B, L, W [Fig. 105] ad curvæ punctum ductarum, ſemper eidem ſolido æquale ſit. Solidum $d^3 \propto acb$.

$c \frac{- ame - axe}{cn - cx}$ LX pro LK [voyez le § 11]. $b \frac{- aoe - axe}{bn - bx}$ WV pro WK.

$a + e$ BD pro BK.

C'eſt de ces formules que Huygens fera uſage dans le Manuſcrit G en conſidérant la première ovale de Descartes; voyez, à la p. 463 qui précède, la Pièce IV des „Mathematica varia 1681—1695".

$$cb \frac{- bame - baxe}{cn - cx} \quad \frac{- caoe - caxe}{bn - bx}$$

$$a + e$$

$$ecb + acb \frac{- baame - baaxe}{cn - cx} \quad \frac{- aacoe - aacxe}{bn - bx} \propto d^3$$

$$0 \propto ncbe - xcbe \frac{- baame - baaxe}{c} \quad \frac{- aacoe - aacxe}{b}$$

$$\frac{nccbb - bbaam - aacco}{ccbb + aabb + aacc} \propto x$$

§ 14. Proprietas ut ſumma quadratorum ab L et B punctis [Fig. 105] ad curvam inclinatarum ſit ſemper eidem ſpatio æqualis.

$$aa + cc \propto cc \frac{- 2came - 2acxe}{cn - cx} \text{ qu.LX} + aa + 2ae \text{ qu.BD}$$

$$- 2came - 2acxe + 2acne - 2acxe \propto 0$$

$$\frac{acn - acm}{2ac} \propto x$$

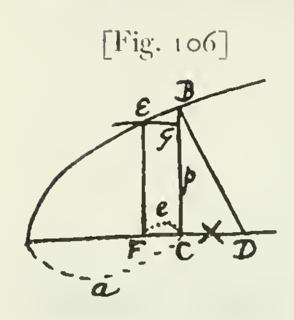
$$\text{ſive } \tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{2}m \propto x$$

hic curva ſit circuli circumferentia [7]).

[7]) Puisque $x + m = \frac{1}{2}(m + n) =$ LO, de sorte que toutes les normales à la courbe passent par le même point O (situé au milieu de LB).

§ 15 [8]). r latus rectum parabolæ [Fig. 106]. $pp \infty ar$.

[Fig. 106]



$$\begin{array}{cccc|c} BC & CD & & EG & GB \\ p & \text{———} \; x & \text{———} & e & \frac{ex}{p} \end{array}$$

$$p - \frac{ex}{p} \text{ GC } \infty \text{ EF}$$

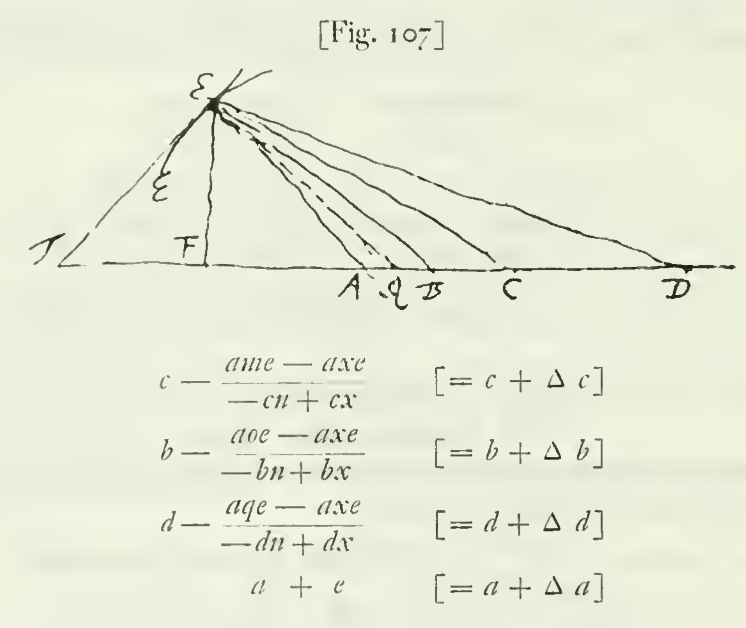
$$\begin{array}{l} p - ex \\ pp - 2ex \end{array} \infty ar - re \quad \text{qu. FE}$$

$$ar - 2ex \infty ar - re$$

$$x \infty \tfrac{1}{2} r$$

§ 16 [9]). Natura curvæ EE [Fig. 107] eſt hæc ut ſit $\frac{abcd}{g} \infty abc + bcd + cda + dab$ [AE $= a$, BE $= b$, CE $= c$, DE $= d$]. EQ perpend. tangenti ET.

[Fig. 107]



$$c - \frac{ane - axe}{-cn + cx} \qquad [= c + \Delta\, c]$$

$$b - \frac{aoe - axe}{-bn + bx} \qquad [= b + \Delta\, b]$$

$$d - \frac{aqe - axe}{-dn + dx} \qquad [= d + \Delta\, d]$$

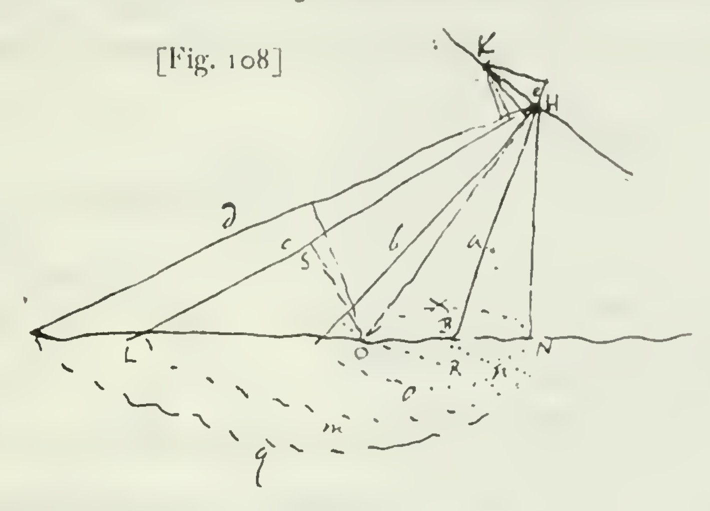
$$a + e \qquad [= a + \Delta\, a]$$

Voyez les §§ 11 et 13 qui précèdent ſur ces expreſſions qui repréſentent les accroiſſements [Δa, Δb, Δc, Δd] des quatre rayons vecteurs lorſqu'on paſſe du point H au point K [Fig. 108]. HK eſt donc un élément de la courbe et en même temps de la tangente. HO ⊥ HK eſt la normale à la courbe au point H.

[8]) Manuscrit F, p. 276.
[9]) Manuscrit F, p. 276—277.

Huygens écrit que l'accroiſſement de $\frac{abcd}{g}$ (g étant apparemment une conſtante), lorſqu'on

[Fig. 108]



paſſe du point H au point K, eſt égal à celui de $abc + bcd + cda + dab$.

En effectuant la multiplication $[c + \Delta c][b + \Delta b][d + \Delta d][a + \Delta a]$, où il néglige les termes contenant e à un degré ſupérieur au premier, en retranchant enſuite $cbda$ de ce premier produit, et en diviſant finalement par g, il trouve ce que nous appelons $\frac{1}{g}\Delta(abcd)$, accroiſſement de $\frac{abcd}{g}$. De la même manière il trouve $\Delta(abc)$ etc.

L'équation $\frac{1}{g}\Delta(abcd) = \Delta(abc + bcd + cda + dab)$ permet, après diviſion par e, de trouver l'inconnue x. Huygens obtient

$$\left.\begin{matrix} -nc^2bdd - aabddm - baaccq \\ -ncbbdd - aacddo - caabbq \\ -nbbdcc - aadbbm - daacco \\ -ddbam - ddccao - bbccaq \end{matrix}\right\} \text{in } g. \quad \begin{matrix} + nddbbcc + aaddbbm \\ + aaddcco + aabbccq \end{matrix}$$

$\infty\ x\ \infty$ NO

$$\left.\begin{matrix} -bccdd - aabdd - baacc \\ -bbcdd - aacdd - caabb \\ -ccbbd - aabbd - daacc \\ -ddbba - ddcca - bbcca \end{matrix}\right\} g \quad \begin{matrix} + ddbbcc + aaddbb \\ + aaddcc + aabbcc \end{matrix}$$

[Fig. 108]

Si reſtituatur valor g qui eſt $\frac{abcd}{abc + bcd + cda + dab}$ ſit x hic idem quod QF Leibnitzio pag. ſequenti [Fig. 107].

Conſtructio Leibnitzij [il s'agit — voyez la note 30 de la p. 486 — de la conſtruction indiquée dans le tableau du N° 2214, T. VIII, p. 269, Leibniz à Huygens, 26 janvier 1680]. y = GF [liſez

EF, Fig. 107]. $s = \mathrm{TF}. \dfrac{g^3y}{a^3} + \dfrac{g^3y}{b^3} + \dfrac{g^3y}{c^3} + \dfrac{g^3y}{d^3} \;\text{—}|\text{—}\; \dfrac{g^3n}{a^3} + \dfrac{g^3o}{b^3} + \dfrac{g^3m}{c^3} + \dfrac{g^3q}{d^3} \;\text{——}\; \dfrac{\mathrm{TF}}{s} \;\text{—}|\text{—}\; \dfrac{\mathrm{EF}}{y}$. Par n, o, m, et q il faut entendre FA, FB, FC et FD, Fig. 107: comparez les Fig. 104 et 105.

$$\text{Omissis } g^3 \quad \frac{\dfrac{yy}{a^3} + \dfrac{yy}{b^3} + \dfrac{yy}{c^3} + \dfrac{yy}{d^3}}{\dfrac{n}{a^3} + \dfrac{o}{b^3} + \dfrac{m}{c^3} + \dfrac{q}{d^3}} \infty\ s \infty\ \mathrm{TF}$$

$\mathrm{TF}\ \dfrac{b^3c^3d^3yy + c^3d^3a^3yy + d^3a^3b^3yy + a^3b^3c^3yy}{b^3c^3d^3n + c^3d^3a^3o + d^3a^3b^3m + a^3b^3c^3q} \;\text{—}|\text{—}\; \dfrac{\mathrm{EF}}{y} \;\text{——}\; \dfrac{\mathrm{EF}}{y} \Big/ \mathrm{FQ}$ Leibnizio [10]), mihi NO [Fig. 108].

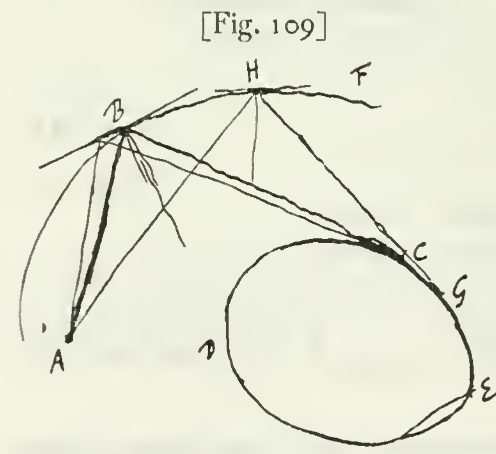
$\dfrac{b^3c^3d^3n + c^3d^3a^3o + d^3a^3b^3m + a^3b^3c^3q}{b^3c^3d^3 + c^3d^3a^3 + d^3a^3b^3 + a^3b^3c^3} \infty\ \mathrm{FQ} \infty\ x \infty\ \mathrm{NO}$ mihi [comme Huygens le disait plus haut, d'après sa formule pour x, en y substituant $g = \dfrac{abcd}{abc + bcd + cda + dab}$].

---

§ 17. Les „curvæ filares" (expression de Huygens) considérées par Tschirnhaus ne sont pas exclusivement celles où les fils sont tendus par des points matériels (ou plutôt, pour fixer les idées, par des stylets linéaires perpendiculaires au papier) demeurant tous en repos à l'exception de celui dont la pointe trace la courbe: ils peuvent également être tendus par des courbes convexes fixes et rigides situées, comme les points fixes, dans le plan du papier ou, si l'on préfère cette expression, dans le plan de la „curva filaris".

Le passage suivant du Manuscrit G [11]), ou plutôt la Fig. 109 à laquelle il se rapporte, fait bien voir, lorsqu'on considère A comme un point lumineux, le rapport existant entre des courbes ainsi construites et certaines catacaustiques [12]).

[Fig. 109]

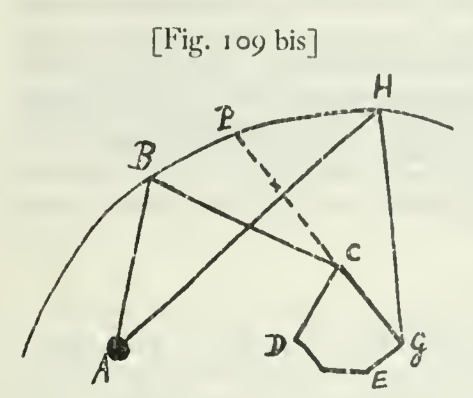


Si ABCE sit filum, defixum in A puncto et ambiens curvam CE [13]). Eoque semper tenso describatur curva BF. Ostendendum rectas AB, BC curvæ BF vel rectæ ipsam tangenti in B, æqualibus angulis occurrere. Ostendendum deinde ex puncto B non posse exire nisi unam curvam ut BHF [14]), ita comparatam ut ducta a puncto ejus aliquo H recta AH, et HG tangente curvæ CE, utraque AH, HG occurant curvæ BHF angulis æqualibus. Hæc D°. Tchirnhaus demonstranda sunt.

Nous avons déjà fait mention en termes généraux de ce théorème de Tschirnhaus à la p. 483 de l'Avertissement qui précède. Or comme Tschirnhaus l'affirme, le théorème — dont il ne

donne pas la démonſtration diſant qu'elle ſerait très longue [13]) — eſt correct quoique Huygens ſemble ne pas en avoir trouvé la preuve, ſans doute faute d'y réfléchir ſérieuſement. Il ſuffit, pour en faire voir la vérité, de remplacer la courbe fixe par un polygone. Dans le cas de la Fig. 109 bis la „curva filaris" BH ſe compoſe de deux (etc.) arcs d'ellipſe ſe raccordant au point P et dont le premier a pour foyers les points A et C, le deuxième les points A et G. Il eſt donc évident que la tangente eſt perpendiculaire, d'abord à la biſſectrice de l'angle ABC, enſuite à celle de l'angle AHG. Or, ceci reſte vrai, quelque grand que ſoit le nombre des côtés du polygone; l'on peut être aſſuré qu'il en ſera encore de même à la limite lorſque le polygone, pour nous exprimer ainſi, devient une courbe. Comparez ſur les démonſtrations de ce genre les notes 1 de la p. 388, 4 de la p. 401 et 9 de la p. 403 du T. XVIII. Notre démonſtration reſte valable lorſque, comme dans certaines figures de Tſchirnhaus, le point fixe A eſt remplacé lui auſſi par une courbe convexe fixe.

[Fig. 109 bis]



Il eſt de plus évident que dans le cas de la Fig. 109 bis, et par conſéquent auſſi dans celui de la Fig. 109, il n'y a, lorſque le point B eſt donné (de même que le point A et le polygone, ou la courbe fixe) qu'*une ſeule* courbe continue BPH capable de concentrer la lumière réfléchie ſucceſſivement en C, en G, en E etc., préciſément celle qui ſe compoſe des arcs d'ellipſe dont nous avons parlé.

Nous obſervons encore qu'on a dans la Fig. 109 AB + BC + arc CG = AH + HG, ce qui peut conduire dans certains cas à la rectification de la courbe fixe (ou catacauſtique). Tſchirnhaus ſe vante de poſſéder une méthode fort générale pour la rectification des courbes. Dans le cas p. e. de la réflexion de rayons parallèles ſur une circonférence de cercle (du côté concave), ce qui eſt le cas conſidéré en 1678 par Huygens (T. XVIII, p. 399), ainſi qu'en 1690 dans le Traité de la Lumière (T. XIX, p. 537) et, en mars 1691, à la p. 73 du T. X, on a, dans la figure de cette p. 73, arc VPZ = XI + IZ, donc „tota VME = $\frac{3}{2}$ AN" conformément au préſent *théorème de Tſchirnhaus:* le point lumineux (A) de la préſente Fig. 109 ſe trouve alors à l'infini, les points B et H de la Fig. 109 ſont les points V et I, ou V et A, de la figure de la dite p. 73 [15]).

---

[10]) La Fig. 107 ne se distingue de la figure de Leibniz (T. VIII, p. 269) que par le fait que dans cette dernière la lettre Q fait défaut.

[11]) Manuscrit G, p. 48 r. Voyez sur la date de cette page, 1690, la note 1 de la p. 190 qui précède.

[12]) C'est à ce rapport-ci, nous semble-t-il, que Tschirnhaus fait allusion dans ses paroles citées dans notre note 22 de la p. 515 du T. IX.

[13]) Comparez les figures, et le texte, de Tschirnhaus aux p. 143 et 161 du T. IX. C'est à la p. 143 que Tschirnhaus dit ne pouvoir donner la démonstration „absque multarum figurarum ope adeoque nimia prolixitate", ajoutant ne pas être certain de ne pas „alicubi errasse".

[14]) Ici Huygens songe sans doute à sa démonstration de la Propos. IV de la Troisième Partie de l'„Horologium oscillatorium" (Fig. 57 à la p. 198 du T. XVIII).

[15]) Déjà dans son article de 1682, où la construction par points de la catacaustique du cercle est erronée (voyez la note 4 de la p. 381 du T. VIII), Tschirnhaus avait néanmoins donné cette rectification (T. X, p. 72, note 3). Tschirnhaus publia une construction correcte en février

Nous avons publié un facfimilé de la p. 48r du Manufcrit G, où fe trouve la Fig. 109, dans notre article — comparez la p. 594 qui fuit — „Deux pages confécutives du Manufcrit G de Chr. Huygens" inféré dans la revue „Janus", organe de la fociété hiftorique néerlandaife des fciences médicales, exactes et naturelles, 1e à 3e livraifons janvier-mars 1940 *. On trouve dans le même article la Fig. 109 bis et le facfimilé de la p. 47v du Manufcrit contenant les définitions du corps, de la furface, de la ligne et du point fur laquelle on peut confulter les p. 190 et fuiv. qui précèdent.

À cet article fait fuite un deuxième article — voyez également la p. 594 qui fuit — intitulé „Démonftration mécanique des théorèmes de Tfchirnhaus confidérés dans le T. XX des Oeuvres Complètes de Chr. Huygens" (Janus, 7e à 9e livraifons juillet—feptembre 1940). Nous y difons être d'avis que Huygens n'aurait pas récufé cette démonftration: voyez (T. XVII, p. 286) ce qu'il dit en 1659 fur la méthode mécanique d'Archimède fervant à démontrer une ou des propofitions géométriques et confultez auffi fur la Méthode d'Archimède dont il s'infpirait parfois lui-même la note 5 de la p. 553 qui fuit.

* E. J. Brill, Leiden

1690, dans les jours mêmes où parut le Traité de la Lumière (voyez la p. 154 du T. IX). Il ne se sert pas en cette occasion de son théorème comme nous le faisons ici.

Huygens dit en 1690 (T. IX, p. 513) être d'avis que Tschirnhaus avait vu les épreuves du Traité de la Lumière, plus tard il écrit (T. X, p. 496) que Tschirnhaus avait vu son manuscrit.

II.

SOLUTION DU PROBLEME PROPOSÈ PAR M. LEIBNITZ DANS LES NOUVELLES DE LA REPUBLIQUE DES LETTRES DU MOIS DE SEPTEMBRE 1687 [SUR LA COURBE DE DESCENTE UNIFORME].

1687.

Cet article de Huygens qui porte la date du 8 octobre 1687 et a été publié dans la livraison de ce mois des „Nouvelles de la République des Lettres", constitue le N° 2489 (p. 224) de notre T. X; nous y avons ajouté comme Appendice (N° 2490) la Pièce de septembre 1690 de la p. 47 (numération de Huygens) du Manuscrit G, qui d'ailleurs avait déjà été publiée en 1833 (à l'exception de l'en-tête) par Uylenbroek aux p. 22—23 de son Fasciculus II.

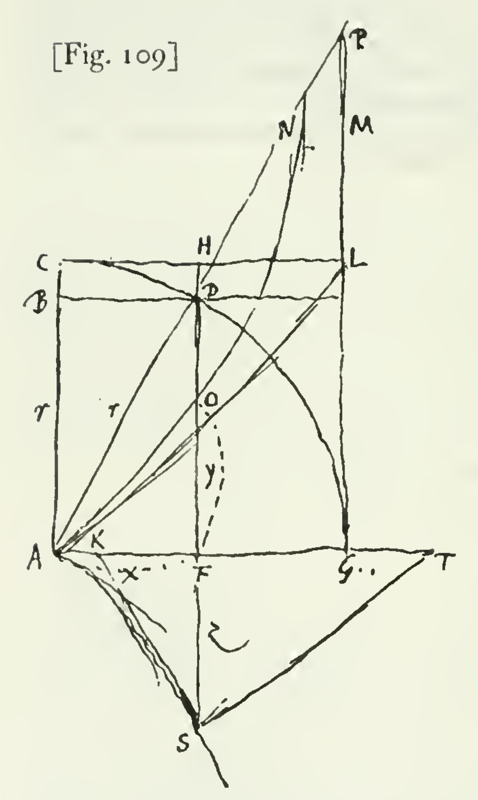
Il s'agit du problème: „Trouver une ligne de descente, dans laquelle le corps pesant descende uniformement et approche egalement de l'horizon en temps egaux".

III.

FATIO DE DUILLIER ET HUYGENS. RÈGLE POUR TROUVER L'ÉQUATION D'UNE COURBE LORSQUE LA SOUSTANGENTE EST DONNÉE EN COÖRDONNÉES CARTÉSIENNES („PROBLÈME INVERSE DES TANGENTES" OU „PROBLÈME DES TANGENTES RENVERSÉES").

[1691]

[Fig. 109]



C D G eſt une circonférence de cercle.

Les §§ 1—2 traitent, comme les ſuivants, du problème inverſe des tangentes; mais la „methodus Fatij" n'apparaît qu'au § 3.

Quoiqu'il en ſoit ainſi dans toutes les figures, il n'eſt pas nécessaire que les coördonnées ſoient orthogonales.

§ 1 [1]). FD — BD = HF — FO [Fig. 109]

$$\sqrt{rr-xx} - x = r / \frac{rx}{\sqrt{rr-xx}} \infty y$$

æquatio curvæ AO,

$$xxyy - rryy + rrxx \infty 0$$

TF ∞ FO FS FS / $\dfrac{zz}{\dfrac{rx}{\sqrt{rr-xx}}}$ FK

$$\frac{rx}{\sqrt{rr-xx}} — z — z$$

ST perpend. curvæ AS. SK perpend. TS.

ſubnormalis FT ∞ FO ∞ $\dfrac{rx}{\sqrt{rr-xx}}$.

Ergo FK ∞ $\dfrac{zz\sqrt{rr-xx}}{rx}$ ſubtangens.

Quæritur natura curvæ.

Huygens propoſa ce problème à Leibniz le 23 février 1691 (T. X, p. 21), diſant: Si voſtre methode ne s'arreſte pas à ces racines, vous

[1]) Manuscrit G, f. 84 r (p. 66 suivant la numération de Huygens). Les dates 1 Jan. 1691 et 26 Mart. 1691 se trouvent respectivement aux pages 57 et 83 de Huygens; la date du 22 Apr. 1691 à la p. 104. Voyez aussi sur la f. 84r la note 8 de la p. 211 du T. X.

avez quelque chofe de plus que Mr. Fatio, quoy qu'il ait defia paffè mon attente. Voyez encore fur ce fujet la fin du § 2.

Oftenfum pag. 58 [2]), quod ut DB ad BC, ita $\square$ HA ad fpatium OFA [voyez le § 1 bis qui fuit]

$$\begin{array}{cccc} \text{DB} & \text{BC} & \square\,\text{HA} & \text{fpat. OFA} \\ x \;—\; r & —\; \sqrt{rr - xx} & —\; rx & /\; rr - r\sqrt{rr - xx} \end{array}$$

Ergo ex theoremate Barrovij [voyez le § 1 ter qui fuit]

$$\tfrac{1}{2}\text{ qu. FS} \infty \overbrace{rr - r\sqrt{rr - xx}}^{\text{fpat. OFA}} \infty \frac{zz}{2}$$

$$2rr - 2r\sqrt{rr - xx} \infty zz$$

. . . .

$$z^4 - 4rrzz + 4rrxx \infty 0 \quad \text{æquatio curvæ quadratricis AS.}$$

Sed hæc ex data fuperius FK eft invenienda.

$$\overset{4\qquad 2\qquad 2}{\frac{-4z^4 + 8rrzz}{8rrx}}\ \text{five}\ \frac{-z^4 + 2rrzz}{2rrx}\ \text{FK} \infty \frac{zz\sqrt{rr - xx}}{rx}\ \text{FK ante inventæ.}$$

$$-zz + 2rr \infty 2r\sqrt{rr - xx}$$

$$zz \infty 2rr - 2r\sqrt{rr - xx}\ \text{convenit}$$

cum [ante inventis]. Ergo curva fatisfacit.

Aequatio curvæ AON $xxyy - rryy + rrxx \infty 0$.

$$\frac{-2xxyy + 2rryy}{2xyy + 2rrx}$$

$$\frac{-xxyy + rryy}{xyy + rrx}\ \text{fubtangens ad curvam AO.}$$

$$\frac{-xxyy + xxyy + rrxx}{xyy + rxx}\ \Big|\ \frac{rrx}{yy + rx}\ \text{fubtangens eadem implicata.}$$

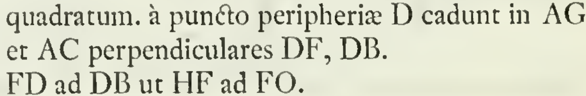
---

[2]) Manuscrit G, f. 80 r (p. 58 de Huygens).

Si [in $\frac{-z^4 + 2rrzz}{2rxx}$ ∞ FK] in — z^4 ſubſtituatur pro uno zz ejus valor $2rr$ — $2r\sqrt{rr - xx}$, qui ex æquatione curvæ invenitur, fiet FK ∞ $\frac{zz\sqrt{rr - xx}}{rx}$ ſubtangens. quæ alioqui non facile apparet quomodo ex æquatione curvæ $z^4 - 4rrzz + 4rrxx$ ∞ o deducatur.

§ 1 bis [voyez le § 1 (l. 3 de la p. 507)] [3]). ACG circuli quadrans [Fig. 110]. CLGA quadratum. à puncto peripheriæ D cadunt in AG et AC perpendiculares DF, DB.

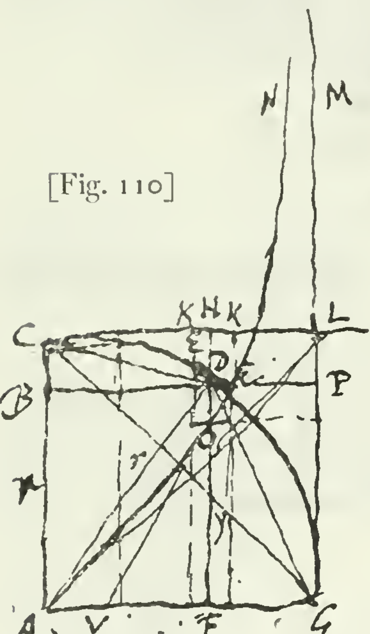
FD ad DB ut HF ad FO.



$$\begin{array}{cccc} FD & DB & HF & FO \\ \sqrt{rr-xx} & x & r & y \end{array}$$

$$y\sqrt{rr-xx} \ \infty \ rx$$

$$xxyy - yyrr + rrxx \ \infty \ o$$



[Fig. 110]

Hujus curvæ ſpatium infinitum AONMG, æquale eſt quadrato CG. Item ſpatij ejus portio, ut OAF, eſt ad rectangulum FC, ut BC ad BD. Sive ſpatium OAF eſt æquale □° BL. ut facile apparet ex calculo.

Quia enim AD ad DF ut particula curvæ minima EDE ad KK, erit AD ſeu HF ducta in KK ∞ DF ductæ in EE. ideoque pars ſuperficiei cylindricæ ex KK circa AG, æqualis parti ſuperficiei ſphæricæ ex EE circa eandem AG. Unde (ut notum eſt) tota ſuperficies cylindrica ex CL circa AG æqualis ſuperficiei ſphæricæ ex arcu CDG circa AG. Porro quia ſuperficies ex EE circa AG ad ſuperficiem ex eadem EE circa CA, ſicut DF ad DB. erit et ſuperficies ex KK circa AG, ad ſuperficiem ex EE circa CA, ut DF ad DB, hoc eſt, ex conſtructione, ut HF ad FO. atque ita tota ſuperficies cylindrica ex CL circa AG ad ſuperficiem ſphæricam ex arcu CDG circa CA, ut omnes HF ad omnes OF, hoc eſt ut quadratum CG ad totum ſpatium infinitum AONMG. Eſt autem oſtenſa ſuperficies cylindrica ex CL circa AG æqualis ſuperficiei ſphæricæ ex arcu CDG circa AG, ideoque et ſuperficiei ſphæricæ ex arcu CDG circa CA, quia utraque dimidiæ ſphæræ ſuperficiei æqualis eſt. Ergo ratio ſuperficiei ex CL circa AG ad ſuperficiem ſphæricam ex arcu CDG

[3]) Manuscrit G, f. 80 r (p. 58 de Huygens).

circa CA erat ratio æqualitatis, ac proinde et ratio qui CG ad ſpatium infinitum AONMG erit æqualitatis, quod erat demonſtrandum.

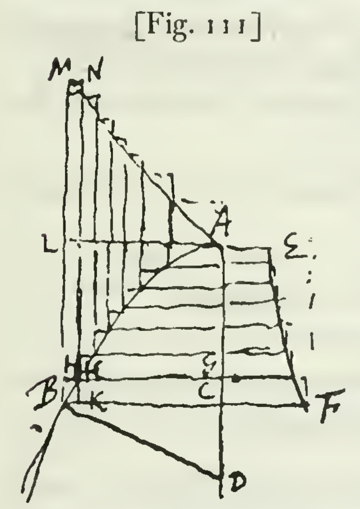
Porro ex ratione demonſtrandi, patet etiam ſuperficiem cylindricam ex CH circa AF ſive ex arcu CD circa AF eſſe ad ſuperficiem ex eodem arcu CD circa CB, ut rectangulum HA ad ſpatium curvæ OFA. Atqui, ex Archimede eſt ſuperficies ex CD arcu circa AF ad ſuperficiem ex eodem arcu CD circa CB ſicut exceſſus quadrati CG ſupra qu. GD ad quadr. ex CD recta [4]), hoc eſt ſicut exceſſus AG ſupra GF, ſeu ſicut AF aut BD ad BC. Ergo et rectangulum HA ad ſpatium OFA ut BD ad BC, quod erat demonſtrandum.

---

§ 1 ter [Theorema Barrovii: voyez le § 1 (l. 7 de la p. 507)]. On peut conſulter ſur le théorème de Barrow (Lectio XI [5]), dernière des Lectiones Geometricæ publiées en 1674) la note 8 de la p. 211 du T. X, où a été cité le „§ 1" de la préſente Pièce. Nous inférons ici l'énoncé et la démonſtration de ce théorème tels qu'ils ſe trouvent à la p. 14 du Manuſcrit H datant de la fin de 1691 ou peut-être de 1692 [6]).

Theorema Barrovij de quo in præcedentibus eſt hujuſmodi.

[Fig. 111]



AB [Fig. 111] eſt curva, AC recta, ad quam normalis applicata BC; cuique productæ occurrit normalis curvæ BD in D. Jam ſubnormali, quam dico, CD, æqualis ſtatuatur CF eidem AC perpendicularis idque ſic ubique fieri intelligatur, et eſſe curvam FE, ad quam omnes iſtæ ſubnormales erectæ terminentur. Jam ſpatium AEFC erit æquale dimidio quadrato BC.

Sit AC ∞ x, CB ∞ y, CD ∞ z, HK ſeu GC ∞ $\varkappa$, KB ∞ λ. Ex puncto H proximo B, cadat HG perpendicularis in AC, et ducatur HK parallela AC. Jam GC differentiola τῶν x eſt $\varkappa$. Et BK differentiola τῶν y eſt λ. ut in ſuperioribus. Et quia triangula ſimilia ſunt HKB, BCD, erit ut BC, y ad CD, z ita HK, $\varkappa$ ad KB, λ. Unde $y\lambda$ ∞ $z\varkappa$. Et ſumma omnium $y\lambda$ ∞ ſummæ omnium $z\varkappa$; hoc eſt $\frac{1}{2}$ qu. BC ∞ ſpat. AEFC. Eſt enim $y\lambda$ rectangulum exiguum LN, factâ LM ∞ LA ∞ BC ∞ y. nam MN ∞ BK ∞ λ. Itemque $z\varkappa$ eſt rectangulum ſeu ſpatiolum GF. atque ita ſingula rectangula

---

[4]) La „superficies ex arcu CD circa CB" étant la différence des surfaces de deux segments, la proposition résulte immédiatement de la Prop. XIII du Livre I du Traité d'Archimède „De sphæra et cylindro"; texte latin de Heiberg: „Cuiusvis sphæræ segmenti minoris hemisphærio superficies æqualis eſt circulo, cuius radius æqualis eſt rectæ a uertice segmenti ad ambitum ductæ circuli, qui basis est segmenti sphæræ".

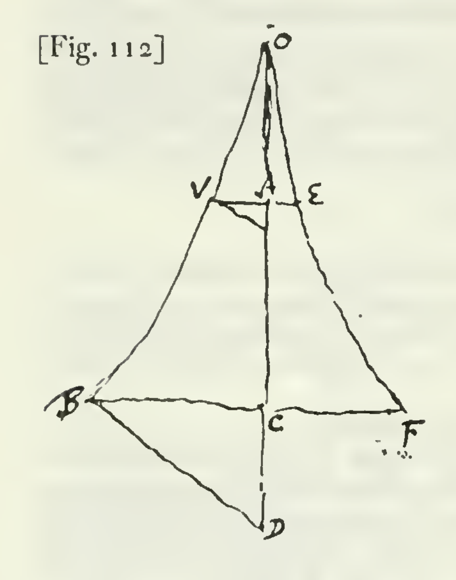
[5]) P. 251 de l'édition de 1860 des „Mathematical works of J. Barrow" par W. Whewell.

[6]) Comparez sur cette date la note 1 de la p. 474 qui précède.

exigua in triangulo MLA æqualia respectivis spatiolis seu rectangulis in spatio AEFC. unde et summa summæ.

Si curva VB [Fig. 112] non incipiat ab axe, fiet area AEFC ∞ $\frac{1}{2}$ qu. BC — $\frac{1}{2}$ qu. VA. Si enim ponatur continuatam curvam BV convenire cum axe in O, et ex subnormalibus ipsius VO formari OE: erit spatium OAE ∞ $\frac{1}{2}$ qu. AV, et spat. OCB ∞ $\frac{1}{2}$ qu. BC. Unde &c.

[Fig. 112]



§ 2. $\frac{zz\sqrt{rr-xx}}{rx}$ FK [Fig. 109 du § 1].

Quæritur quæ curva talem [subtangentem] det.

Leibnitsius curvæ æquationem hanc [$z^4 - 4rrzz + 4rrxx \infty 0$] ex data subtangente $\frac{zz\sqrt{rr-xx}}{rx}$ invenit insigni artificio. Ait autem et pluribus alijs curvis eandem subtangentem convenire, atque inter cæteras huic $z^4 + rrxx - r^4 \infty 0$. quod non puto ita esse.

$$\frac{}{4}$$

subtangens $\frac{-4z^4}{2rrx}$ ex regula. Sed $zz \infty \sqrt{r^4 - rrxx}$ ut ex æquatione curvæ facile apparet.

$$\frac{-4zz\sqrt{r^4-rrxx}}{2rrx} \text{ subtangens}$$

$\frac{-2zz\sqrt{rr-xx}}{rx}$. Est ergo dupla ejus quæ in priore curva nostra et propter signum — præfixum ultra x accipienda est.

Leibniz avait pleinement raison en disant, dans sa lettre du 2 mars 1691 (T. X, p. 50), que la soustangente $\frac{y^2\sqrt{a^2-x^2}}{ax}$ convient à plusieurs courbes; Huygens le reconnut dans sa lettre du 5 mai (T, X, p. 93). Seulement, Leibniz avait écrit par erreur, en copiant son brouillon, $a^2x^2 = a^4 - y^4$ au lieu de $a^2x^2 = a^4 - \frac{y^4}{4}$ (ou, dans les notations du texte de Huygens, $z^4 + rrxx - r^4 = 0$ au lieu de $\frac{z^4}{4} + rrxx - r^4 = 0$).

§ 3 [7]). La „Regle inverse des Tangentes de Mr. Fatio" est clairement expliquée par Huygens deux ans plus tard dans sa lettre du 23 juillet 1693 au Marquis de l'Hospital. Nous pouvons donc renvoyer le lecteur à cette lettre (T. X, p. 464—468). Mais on trouve aussi un exposé de la règle par Fatio lui-même (avec des remarques de Huygens) aux §§ 11 et suivants de la présente Pièce.

$xyy - aay + x^3 \propto 0$ æquatio curvæ. Comparez le § 28 qui fuit.

Aequatio tangentis implicita

$$\frac{-2xxy + aax}{3aa - 2xy} \top y - z \top u \quad .$$

La règle Souftangente : $y = dx : dy$ eft valable pour une courbe quelconque. Or, tandis que, dans la lettre citée de 1693, Huygens défigne, en adoptant la notation de Leibniz, par dx et dy les accroiffements des variables x et y, il les défigne en 1691 avec Fatio par z et u refpectivement; z et u, ici et dans ce qui fuit, repréfentent donc des grandeurs infinitéfimales.

$$-2xxy + aax \top 3aay - 2xyy - z \top u$$

$$-2xxyu + aaxu - 3aayz + 2xyyz \propto 0.$$

Non fuccedit hic methodus Fatij.

Comme nous l'avons dit dans l'Avertiffement, Huygens avait propofé la fouftangente $\frac{2x^2y - a^2x}{3a^2 - 2xy}$ à Leibniz dans une lettre d'août 1690; dans la correfpondance ultérieure il eft fouvent queftion tant de cette fouftangente-ci que de la fouftangente $\frac{-2x^2y + a^2x}{3a^2 - 2xy}$.

Aequatio tangentis fimpliciter inventa ex terminis æquationis curvæ [c. à. d. la courbe $xy^2 - a^2y + x^3 = 0$, d'où provient auffi l'„æquatio tangentis implicita" ci-deffus; voyez la p. 475 du T. IX].

$$\frac{-2xyy + aay}{yy + 3xx} \top y - z \top u$$

$$-2xy + aa - yy + 3xx - z - u$$

$$-2xyu + aau - yyz - 3xxz \propto 0$$

$$+ aay - yyx - x^3 \quad \propto 0 \quad \text{hic fuccedit.}$$

§ 4. Aequatio curvæ $y^4 - 8aayy + 16aaxx \propto 0$.

Voyez fur cette courbe la p. 473 du T. IX et le § 27 qui fuit.

Aequatio tangentis implicita $\frac{-yy}{2x} + 2x - y - z - u \quad \varkappa . \lambda : 2 . -4$

Voyez fur $\varkappa$ et λ les §§ 10 et 11 qui fuivent.

Huygens avait propofé cette fouftangente implicite à Leibniz en même temps que celle du § précédent.

$$- \quad yy + 4xx - 2xy - z - u$$

$$-yyu + 4xxu - 2xyz \propto 0 \text{ five } 2xyz - 4xxu + yyu \propto 0$$

$$-yyy \qquad -2xxy$$

$$-\tfrac{1}{3}y^3 \qquad -xxy \quad \text{non fuccedit.}$$

Huygens biffa les mots „non fuccedit"; peut-être le fit-il après avoir exécuté le calcul du § 27 qui fuit, où il put „intégrer" l'équation à l'aide d'un transformateur.

Aequatio tangentis fimplex [voyez la p. 473 du T. IX]

$$\frac{-y^4 + 4aayy}{8aax} - y - z - u$$

7) Manuscrit G, f. 84 v — 85 r (pag. 67 et 68 de Huygens).

$$-y^3 + 4aay \text{ —— } 8aax \text{ —— } z \text{ —— } u$$
$$-y^3u + 4aayu - 8aaxz \infty 0$$
$$-\tfrac{1}{4}y^4 + 2aayy - 4aaxx \infty 0 \quad \text{hic fuccedit.}$$

Itaque data æquatione tangentis fimpliciter inventa, fuccedit Fatij Regula, fed non item fi implicita fuerit reftitutione una aut pluribus valoris ex data curvæ proprietate.

Ce dernier alinéa eft biffé. Il réfume fort bien le réfultat provifoire des recherches des §§ 3 et 4; mais voyez ce que nous avons dit plus haut fur le calcul du § 27.

§ 5. Non fuccedit, cum terminus aliquis æquationis tangentis continet radicem quæ plures uno terminos includit [comparez la remarque de Huygens citée au § 1 et s'appliquant à la même fouftangente]. Veluti cum datur

$$\frac{yy\sqrt{rr-xx}}{rx} \text{ —— } y \text{ —— } z \text{ —— } u$$
$$y\sqrt{rr-xx} \text{ —— } rx \text{ —— } z \text{ —— } u$$

$uy\sqrt{rr-xx} - rxz \infty 0$ æquatio tangentis. ubi æquatio curvæ eft $yy - 2rr + 2r\sqrt{rr-xx} \infty 0$ five $y^4 - 4rryy + 4rrxx \infty$ quæ non poteft per Fatij regulam inveniri.

Dans la fuite de ce § Huygens calcule encore une fois la fouftangente, en partant exceptionnellement (voyez la p. 482 de l'Avertiffement qui précède) d'une équation de la courbe renfermant un radical. Mais, conformément à ce que nous avons dit dans l'Avertiffement, il n'eft pas queftion d'une différentiation directe de ce radical.

Aequatio curvæ $yy - 2rr + 2r\sqrt{rr-xx} \infty 0$

$$s \text{ —— } y \text{ —— } s + e \Big/ \frac{sy+ye}{s} \quad \text{pro } y \text{ [Fig. 113]}$$

[Fig. 113]

$$\left.\begin{matrix} yy \\ -2rr \\ +2r\sqrt{rr-xx} \end{matrix}\right. \infty \left\{\begin{matrix} \dfrac{ssyy+2syye}{ss} \text{ pro } yy \\ -2rr \\ +2r\sqrt{rr-xx-2ex-ee} \end{matrix}\right\} \text{add.}$$

$$ssyy - 2rrss + 2rss\sqrt{rr-xx} \infty$$
$$ssyy + 2syye - 2ssrr + 2rss\sqrt{rr-xx-2ex}$$

$$rs\sqrt{rr-xx} - yye \infty rs\sqrt{rr-xx-2ex}$$

$$r^4ss - rrssxx - 2rsyye\sqrt{rr-xx} \infty$$
$$r^4ss - rssxx - 2rrssxe$$

$$-yy\sqrt{rr-xx} \infty -rsx$$

$$\frac{yy\sqrt{rr-xx}}{rx} \infty s \quad \text{hinc non}$$

videtur dari regreffus.

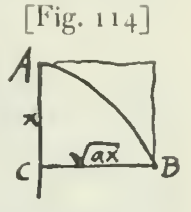
s = fouftangente.

§ 6 [8]). $\sqrt{ax}$ ſubnormalis quæſitæ curvæ.

$$\sqrt{ax} \text{ —— } y \text{ —— } y \Big/ \frac{yy}{\sqrt{ax}} \text{ ſubtangens}$$

Methodus Fatij $z \,.\, u : \frac{yy}{\sqrt{ax}} \,.\, y$

[Fig. 114]



Parabola . a latus rectum

[c. à. d. z —┬— u —— $\frac{yy}{\sqrt{ax}}$ —┬— y ou z ad u ut $\frac{yy}{\sqrt{ax}}$ ad y. Huygens adopte ici *à fort peu près* la notation de Fatio. Toutefois, ce dernier écrit (voyez la p. 169 du T. IX et le § 13 qui ſuit) $z \,.\, u :: \frac{yy}{\sqrt{ax}} \,.\, y$, ce qui eſt la notation de Wallis dans ſon „Arithmetica infinitorum" et ailleurs]

$$z\sqrt{ax} \infty uy$$

$$\frac{a^{1/2}x^{3/2}}{\frac{3}{2}} \infty \tfrac{1}{2}yy$$

$$\tfrac{2}{3}a^{1/2}x^{3/2} \infty \tfrac{1}{2}yy$$

$$\tfrac{4}{9}ax^3 \infty \tfrac{1}{4}y^4$$

$$\tfrac{16}{9}ax^3 \infty y^4 \quad \text{quadratrix parabolæ}$$

$$\tfrac{4}{3}x\sqrt{ax} \infty y^2$$

ſpat. ABC $\frac{2}{3}x\sqrt{ax} \infty \frac{1}{2}yy$ quadratura parabolæ ex Barrovij Theoremate [voyez le § 1 ter qui précède; dans le § 1 il eſt auſſi queſtion d'une „æquatio curvæ quadratricis" en connexion avec le théorème de Barrow].

---

§ 7 [9]). $a^4 - aayy - xxyy \infty 0$ æquatio quadrandæ quæ eſt altera earum quæ ad Catenariam utiles ſunt.

Voyez ſur cette courbe la p. 501 du T. IX (Appendice à la lettre de Huygens à Leibniz du 9 octobre 1690).

$$\frac{a^4}{aa + xx} \infty yy$$

$$\frac{aa}{\sqrt{aa+xx}} \infty y \qquad \frac{a\sqrt{aa-yy}}{y} \infty x$$

$$\frac{aa}{\sqrt{aa+xx}} \text{ —— } z \text{ —— } z \Big/ \frac{zz\sqrt{aa+xx}}{aa} \text{ ſubtangens cujuſdam, vel hæc}$$

$\frac{zzy}{a\sqrt{aa-yy}}$. Difficile eſt curvam huic propriam invenire, nec puto extare geometricam. Alioqui et curva Catenæ eſſet geometrica.

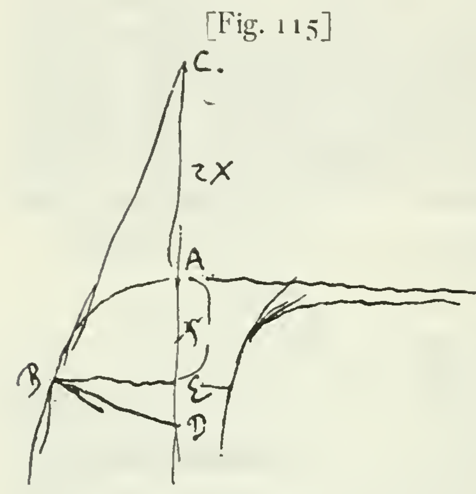
---

[8]) Manuscrit G, f. 89 r et v. (p. 76 et 77 de Huygens).

[9]) Manuscrit G, f. 92 v. (p. 81 de Huygens).

§ 8 [10]). AB parabola cubica $y^3 \infty aax$. $3x$ fubtangens. $3x$ —— $\sqrt{C\, aax}$ —— $\sqrt{C\, aax} \,/\,$ fubnormalis ED $\dfrac{a\sqrt{C\, axx}}{3x} \infty y$ applicata in alia curva [Fig. 115].

[Fig. 115]



$$\frac{a^4xx \infty 27x^3y^3}{a^4 \infty 27xy^3}$$

$\frac{1}{27}a^4 \infty xy^3$ æquatio curvæ cujus quadratrix [voyez la fin du § 6 qui précède] eft parabola cubica.

Eadem conftructio fubtangentis non poteft convenire duabus aut pluribus curvis eundem verticem habentibus. fi in fubnormali non habeatur ullum y.

---

§ 9 [11]). Addenda exemplis fubftitutionum in fin. p. 2 Epiftolæ Fatij. ubi unum x in z et unum y in u mutatur.

C'eft *peut-être* la lettre du 3 avril 1691, quoique Fatio y écrive, comme Newton, $\dot{x}$ et $\dot{y}$ et non pas z et u [„$y\dot{x}$ = Fluxion de l'efpace AOF" etc.] Toutefois les „addenda" du préfent § correspondent plutôt aux données du § 11. Il eft poffible qu'il s'agiffe de la lettre inconnue de Fatio, antérieure à 1690, dont il eft queftion dans la note 15 de la p. 571 du T. IX.

termini dati in æquatione tangentis:
- ax^my^n. Subftituendum $\text{m}ax^{m-1}zy^n + \text{n}ax^my^{n-1}u$
- $\dfrac{x^2}{y^3} = \dfrac{x^2y}{y^4} = x^2y^{-3} = x^2yy^{-4}$ fubftituendum $\dfrac{2xz}{y^3} - \dfrac{3x^2u}{y^4}$
- $x^{1/2}y^{-2/3}$ fubftituendum $\frac{1}{2}zx^{-1/2}y^{-2/3} - \frac{2}{3}x^{1/2}uy^{-5/3}$.

In termino priori ratio fubftitutionis eft quod per exponentem literæ x hoc eft $\frac{1}{2}$ multiplicandus terminus datur. Tum unum x mutandum in z. Sed quia hic tantum habetur $x^{1/2}$, neceffe eft quo fiat x ut ducatur iftud $x^{1/2}$ in fimile $x^{1/2}$, ac rurfus per hoc ipfum dividatur, feu multiplicatio fiat per $x^{-1/2}$. Itaque his factis oritur $\frac{1}{2}zx^{-1/2}y^{-2/3}$.

In termino pofteriori ratio eft hæc. Primò ducendus eft terminus datus in $\frac{2}{3}$ exponentem literæ y. Tum unum y mutandum in u. Sed quia habetur tantum $y^{-2/3}$, ducendum hoc in $y^{+5/3}$, quo fiet $y^{3/3}$, five y^1 mutandum in u; fed et rurfus dividendum per $y^{+5/3}$, five multiplicandum per $y^{-5/3}$; quibus ita factis fit $-\frac{2}{3}x^{1/2}uy^{-5/3}$ pro altero termino fubftituto.

Terminus datus $x^{1/2}y^{-2/3}$ idem fignificat quod $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{yy}}$, ubi ut poffit mutari unum y in

---

10) Manuscrit G, f. 99 v. (p. 97 de Huygens).
11) Manuscrit G, f. 100 r. (p. 98 de Huygens).

u, faciendum ut in numeratore appareat y, quod fiet fi et numerator et denominator multiplicetur uterque per y, unde fit $\frac{\sqrt{x}\,y}{\sqrt[3]{y^5}}$, et mutato y in u, $\frac{\sqrt{x}\,u}{\sqrt[3]{y^5}}$ quod ita fcribitur $x^{1/2}uy^{-5/3}$.

§ 10. Ex 3e. [?] La proprietè des Tangentes eft donnée $z\,.\,u :: 2x + \frac{1}{2}p\,.\,y$ [voyez fur la notation :: le § 6 qui précède]. d'où l'Equation des Tangentes eft $zy - 2ux - \frac{1}{2}pu = 0$ [la fouftangente étant $2x + \frac{1}{2}p$ on voit qu'il s'agit de démontrer qu'on a affaire à une parabole]. On commence par chercher le terme generateur des deux termes correfpondants non marquez, lequel doit eftre un feul terme qui contienne x et y. Il faut connoitre quelles puiffances de x et de y doivent eftre dans ce terme. On fcait que les expofants de ces puiffances, pour lefquels on met $\varkappa$ et λ, font entre eux comme les nombres qui font au devant des termes correspondants, les quels nombres font ici 1 et —2. Car puifque les termes zy et $-2ux$ doivent venir d'un mefme terme generateur, les multiplicateurs 1 et —2 doivent eftre dans la raifon des expofants de x et de y, dans ledit terme. donc $\varkappa$ à λ comme 1 à —2. Et le terme generateur peut donc avoir eftè $\frac{x}{yy}$. Mais cettuicy fait naiftre ou rend les termes $\frac{z}{y^2} - \frac{2xu}{y^3}$, fcavoir le premier en multipliant ce correfpondant par 1, expofant de x, et changeant x en z, l'autre en multipliant par —2, expofant de y, (qui eft avec le figne — parce que cela marque qu'on divife par y^2) et faifant paroitre un y au numerateur pour eftre changè en u, et adjoutant en recompenfe un y au denominateur. Or ces termes $\frac{z}{y^2} - \frac{2xu}{y^3}$, ou bien $\frac{zy}{y^3} - \frac{2xu}{y^3}$ font dans la mefme raifon que les deux termes de l'Equation des tangentes $zy - 2ux$ a caufe du divifeur commun y^3. A fin donc d'y faire venir auffi le terme marqué $-\frac{1}{2}pu$, on change toute cette premiere æquation en multipliant tous les termes par $\frac{1}{y^3}$ — en marge: Il y a une regle generale pour trouver ce tranfformateur la quelle n'eft pas dans la lettre de M. Fatio. Voiez pag. 120 [§ 23 qui fuit] — ce qui donne l'equation $\frac{zy}{y^3} - \frac{2xu}{y^3} - \frac{\frac{1}{2}pu}{y^3} \infty 0$ des termes de la quelle on trouve les correspondants dans l'equation de la courbe d'où ils font venus par l'operation converfe de celle qui donne l'equation de la tangente, quand celle de la courbe eft donnee. Et vient $\frac{x}{yy} + \frac{\frac{1}{4}py}{y^3}$. Scavoir $\frac{x}{yy}$ formè de l'un des deux $\frac{zy}{y^3}$ ou $\frac{-2xu}{y^3}$, (mais on a defia vu qu'il eft $\frac{x}{yy}$ puifqu'il rendoit ces deux termes felon la regle) et $+\frac{\frac{1}{4}py}{y^3}$ pour generateur de $\frac{-\frac{1}{2}pu}{y^3}$, parce qu'il faut changer premierement dans le terme $\frac{-\frac{1}{2}pu}{y^3}$ un u

en y, vient $\frac{-\frac{1}{2}py}{y^3}$, et puis divifer par l'expofant de y qui eft —2. et ainfi il vient $+\frac{\frac{1}{4}py}{y^3}$.

Or ces deux termes $\frac{x}{yy} + \frac{\frac{1}{4}py}{y^3}$ ne peuvent eftre egaux à o, ni faire toute l'equation de la courbe, il faut y adjouter quelque quantitè connue comme $-\frac{a}{g^2}$, ou plustoft $-\frac{1}{p}$, et ainfi on aura $\frac{x}{yy} + \frac{\frac{1}{4}py}{y^3} - \frac{1}{p} \infty\ 0$ la quelle equation eftant reduite eft $px + \frac{1}{4}pp \infty\ yy$, qui eft a la Parabole[12]).

---

§ 11 [13]). **Dicté par Mr. Fatio.**

Definition des lettres μ κ et λ dans la Theorie de Mr. Fatio par la quelle on trouve l'equation de la Courbe, la proprietè des Tangentes eftant donnée.

Soit $\gamma a x^m y^n$ un terme dans l'Equation de la Courbe[14]). La regle donne pour fes correfpondants $\gamma m a x^{m-1} z y^n + \gamma n a x^m y^{n-1} u$.

μ eft le produit γa, qui peut eftre compofè de nombres comme γ, avec des quantitez analytiques comme a. Et cette quantitè μ, dans les lignes qui ne font pas exponentiales, eft la quantitè mefme par la quelle la partie inconnue $x^m y^n$ du terme generateur dans la courbe eft multipliée.

κ eft le nombre rationel, irrationel, oû exprimè par quelque quantitè analytique que ce foit, de dimenfions que l'inconnue x a dans le terme de la courbe; par exemple dans le terme $\gamma a x^m y^n$ κ eft egal à m.

λ eft le nombre rationel, irrationel, ou exprimè par quelque quantitè analytique que ce foit, de dimenfions que l'inconnue y a dans le terme de la courbe, par exemple dans le terme $\gamma a x^m y^n$ λ eft egal à n.

Or comme les quantitez m et n peuvent eftre pofitives ou negatives, entieres ou rompues, numeriques ou analytiques, fimples ou complexes, connues ou meflees et mefme compofees feulement des inconnues x ou y, ou de toutes les deux enfemble: et qu'elles peuvent eftre encore rationelles ou irrationelles: et que toutes ces chofes fe peuvent combiner diverfement entre elles, il paroit qu'il y pourra avoir beaucoup de varietè.

---

[12]) Comparez sur ce datif (sit venia verbo) la dernière ligne de la p. 216 qui précède, ainsi que la note 113 de la p. 217.

[13]) Manuscrit G, f. 100 v. (p. 99 de Huygens).

[14]) Comparez sur ce génitif la deuxième ligne et la note 113 de la p. 217 qui précède. On voit que dans les présents §§ Huygens se sert *généralement*, comme Fatio, du génitif (p. e. dans la l. 11 de la p. 507 etc. etc.). Voyez cependant la note 12 qui précède et le début du § 15 qui suit.

Quand la courbe dont l'Equation de la Tangente eſt produite eſt geometrique, il eſt certain que $\varkappa$ et λ ſont des nombres rationels. Et quand en cherchant par l'Equation donnée de la Tangente, quelle eſt ſa courbe, on trouve $\varkappa$ et λ eſtre des nombres rationels, il s'enſuit que la courbe eſt geometrique. Et qu'elle n'eſt point geometrique, quand $\varkappa$ et λ ne peuvent eſtre des nombres rationels.

Les termes qui doivent eſtre marquez d'un trait ($\frown$) ne ſont pas tant ceux qui ſont purs, (c'eſt a dire qui n'ont que les lettres x et z ou y et u ſeulement) que ceux qui n'ont parmy les autres termes de l'Equation des Tangentes aucuns termes qui puiſſent eſtre gemaux avec eux.

En examinant dans l'Equation de la Tangente quels deux termes ſont correſpondants, c'eſt à dire provenus d'un meſme terme de l'Equation de la courbe, on doit conſiderer les z comme des x, et les u comme des y.

---

§ 12 [15]). Soutangente donnee $\dfrac{aax}{yy + aa}$ —— y == z —— u.

Il s'agit de la ſouſtangente déguiſée de la courbe $x^2(a^2 + y^2) - a^2y^2 = 0$ déjà conſidérée au § 1 où a s'appelait r. Huygens fera mention de cette ſouſtangente déguiſée dans ſa lettre à Leibniz du 1 janvier 1692 (T. X, p. 223).

$$aax \text{ —— } y^3 + aay \text{ == } z \text{ —— } u$$

Aequation de la tangente $\quad y^3z + \underset{\lambda}{aayz} - \underset{\lambda}{aaxu} = 0$

Icy le terme zy^3 ne peut pas eſtre marquè de $\frown$, et avec cela il n'a point de correſpondant. les deux autres termes ſont correſpondants.

Il faut faire en ſorte que le terme zy^3 deviene pur, ce qui ſe fait en diviſant l'équation par y^3. On pouvait auſſi la multiplier par $\dfrac{x}{y^3}$ ou $\dfrac{x^2}{y^3}$.

L'Equation eſt donc $\quad \underset{\frown}{z} + \underset{\lambda}{\dfrac{aaz}{yy}} - \underset{\lambda}{\dfrac{aaxu}{y^3}} [= 0]$.

Les deux derniers termes demeurent neceſſairement correſpondants.

Et $\varkappa . \lambda$ :: 1. — 1. Soit le transformateur $x^g y^h$; donc 1 + g. — 2 + h :: 1. — 1. Parce qu'en multipliant le terme $\dfrac{aaz}{yy}$ (où il y a un z ou x) par le transformateur $x^g y^h$, l'expoſant de x c'eſt a dire $\varkappa$ ſera 1 + g, et l'expoſant de y c'eſt a dire λ ſera — 2 + h, parce qu'il y avoit — yy.

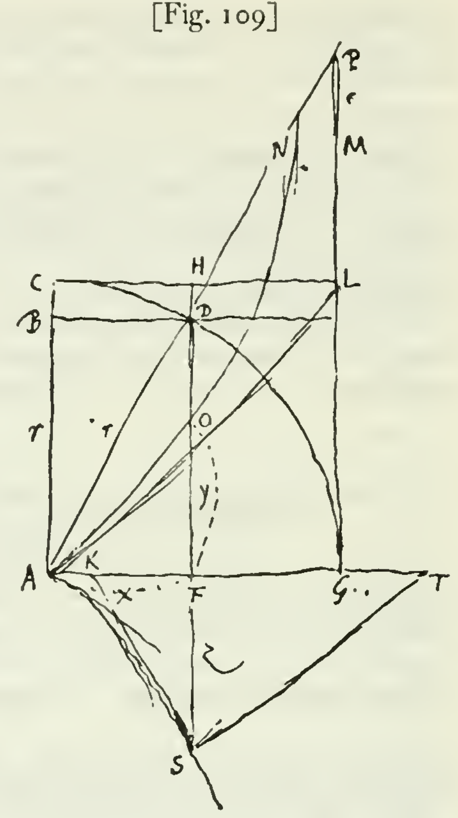
— 1 — g ∞ — 2 + h
1 — g ∞ h ∞ 0
1 ∞ g

Mais h doit eſtre ∞ 0, parce qu'autrement il s'introduiroit y dans le terme z en le multipliant par le transformateur $x^g y^h$.

[15]) Manuscrit G, f. 101 v. (p. 101 de Huygens).

L'Equation transformée fera

[Fig. 109]



$$zx + \frac{aazx}{yy} - \frac{aaxxu}{y^3} \infty 0$$

ou $$zx + \frac{aazxy}{y^3} - \frac{aaxxu}{y^3} \infty 0 .$$

Le terme generateur fera

$$\tfrac{1}{2}\frac{aaxx}{yy} \text{ et l'autre } \tfrac{1}{2}xx.$$

Et l'Equation de la Courbe fera

$$\tfrac{1}{2}\frac{aaxx}{yy} + \tfrac{1}{2}xx - \tfrac{1}{2}aa \infty 0$$

ou bien $aaxx + xxyy - aayy \infty 0$

eftant reduite.

Cette courbe eft AO pag. 66 [Fig. 109; comparez le § 1] dont la quadrature eft pag. 88 [c. à. d. à la p. 95 r de la pagination générale; voyez la note 26 de la p. 510 du T. IX, où toutefois il eft dit par erreur que la p. 95r correfpond à la p. 90 de Huygens].

En marge: Il valoit mieux de mettre $-bb$ au lieu de $-\frac{1}{2}aa$. Et dire que fuppofant $-bb$ egal à $-\frac{1}{2}aa$, on venoit a l'Equation reduite comme elle eft icij.

Au lieu de $-\frac{1}{2}aa$, on pouvait mettre $-\frac{1}{2}ab$ ou $-\frac{1}{2}bb$, et on aurait trouvè tousjours la foutangente comme elle a eftè propofee. Mais il faut que ce terme connu foit adjoutè et cela avec le figne —. parce que les 2 autres termes ont +.

Il faut noter auffi que pour que l'Equation reduite donne la foutangente propofee, il faut qu'il y ait $-aayy$, et par confequent $-\frac{1}{2}aa$ dans celle d'ou elle vient.

---

§ 13 [16]). **De la main de Fatio:**

$$z.u :: \frac{-2x^2y + aax}{3aa - 2xy}.y$$

On reconnait la fouftangente dont il eft déjà queftion au § 3.

$$\underset{\lambda}{3aayz} - \underset{\times}{2xy^2z} + \underset{\times}{2xxyu} - \underset{\lambda}{aaxu} = 0$$

---

[16]) Manuscrit G, f. 101 (p. 100 et 101 de Huygens).

$x^g y^h$ Transformateur qui se trouve $\frac{1}{x^4}$ (puisque h ∞ o et g ∞ — 4) et duquel on peut se passer de se servir pour transformer l'Equation.

λ   κ . λ :: 3 . — 1   donc — 1 — g = 3 + 3h
1 + g . 1 + h :: 3 . — 1   g = — 4 — 3h

Il est évident que $\begin{cases} \varkappa = 1 + g \\ \lambda = 1 + h \end{cases}$ λ $-\frac{aay}{x^3}$ Correspondant [**de la main de Huygens:** generateur] des λ.

Ici κ = — 3
λ = + 1

×   κ . λ :: — 2 . + 2   donc 4 + 2g = — 4 — 2h
2 + g . 2 + h :: — 2 . + 2   g = — 4 — h

Il est évident que $\begin{cases} \varkappa = 2 + g \\ \lambda = 2 + h \end{cases}$ — 4 — 3h = — 4 — h
donc h = o
g = — 4

[**De la main de Huygens:** Parce que dans le terme generateur des 2 termes $3aayz$ et $-aaxu$, on a reconnu que l'exposant des x, c'est à dire κ est 1 + g, c'est a dire — 3. Et que l'exposant des y, c'est à dire λ, est 1 + h, c'est à dire 1. Et il paroit que aa doit aussi entrer dans le dit terme generateur].

× $+\frac{y^2}{x^2}$ Correspondant [**de la main de Huygens:** generateur] des ×

Ici κ = — 2
λ = + 2

$$\frac{-aay}{x^3} + \frac{y^2}{x^2} \pm \frac{a}{b} = 0$$

$$-aay + xy^2 \pm \frac{a}{b} x^3 = 0$$

[**De la main de Huygens:** Notez que si on ne met point $\frac{a}{b}$, l'Equation sera aa ∞ xy de sorte que la courbe peut bien estre aussi une hyperbole.]

[**De la main de Huygens:** Exemple à bien remarquer.]

$$\frac{a}{y^3} - \frac{b}{x^2y} + \frac{1}{x^2} = 0$$

[**De la main de Huygens:** æquation de la courbe, ou $axx - byy + y^3$ ∞ o.]

$$\frac{-3au}{y^4} + \frac{2bz}{x^3y} + \frac{bu}{x^2y^2} - \frac{2z}{x^3} = 0$$

[**De la main de Huygens:** Equation des tangentes, où le premier et dernier terme seroient marquez ⌒.]

$$\underset{\smile}{\overset{}{-3aux^3}}_{\times} + \underset{\lambda}{2bzy^3} + \underset{\lambda}{buxy^2} - \underset{\smile}{2zy^4}_{\times} = 0$$

[**De la main de Huygens**: Equation des tangentes reduite et donnée, ou le premier et dernier terme ne font plus marquez, et ne paroiffent pas correfpondants non plus.]

$\varkappa . \lambda$ :: 2 . 1	donc $1 + g = 6 + 2h$	Les termes $\overset{\times}{\smile}$ ne font pas propre-
$1 + g . 3 + h$ :: 2 . 1	$g = 5 + 2h$	ment correfpondans; et [mot barré
	$g = -3$	par Huygens et remplacé par toute-
	$h = -4$	fois] il fe faut bien donner de garde

de rendre encore la courbe exponentiale; mais il faut voir fi (fans aller contre l'Equation $g = 5 + 2h$) on ne peut pas reduire le terme $-2zy^4$ à n'avoir que des x, et le terme $-3aux^3$, à n'avoir que des y. Or il eft d'abord évident que cela fe peut, fi on divife l'Equation par x^3y^4, c'eft à dire fi on la multiplie par $\frac{1}{x^3y^4}$. On auroit donc $g = -3$ & $h = -4$. Or par l'Equation $g = 5 + 2h$ on auroit $-3 = 5 - 8$ c'eft à dire $-3 = -3$ et toutes chofes feroient confiftentes. [**De la main de Huygens**: Mais fi cela n'euft pas eftè ainfi l'Equation auroit eftè intraitable.]

[**De la main de Huygens**: Apres avoir trouvè le terme generateur de deux termes correfpondants de l'equation des tangentes, non pas entierement, mais feulement les x et y qui y entrent, on trouvera les autres lettres, en prenant le divifeur commun des deux termes correfpondants apres en avoir oftè tous les x et les y, ou je comprens auffi les z et les u. Ainfi dans le premier de ces deux Exemples, apres avoir trouvè que le terme generateur des termes $3aayz$ et $-aaxu$, doit avoir $\frac{-y}{x^3}$, on trouve qu'il faut encore y mettre aa dans le numerateur. et on aura $-\frac{aay}{x^3}$.

Icy le terme generateur $-\frac{b}{x^2y}$ fe trouve de ce qu'il y doit entrer x^{1+g} qui fait x^{-2}. Et de plus y^{3+h} qui fait y^{-1}, c'eft à dire $\frac{1}{x^2y}$, a quoy adjoutant dans le numerateur la lettre b, commun divifeur des deux termes correspondants λ (fans compter les x et y) [on] a $-\frac{b}{x^2y}$. Et il y a le figne $-$, parce que les x font au divifeur, et que le terme correfpondant ou il y a z eft avec $+$, ce qui eft de mefme dans le premier exemple.]

§ 14. **De la main de Fatio:**

Equation des tangentes que l'on propofe $\underset{\lambda}{\frac{aau}{y^3}} - \underset{\frown}{\frac{z}{x}} - \underset{\lambda}{\frac{aaz}{y^2x}} = 0$.

Dans cette Equation il ne faut pas croire que les deux premiers termes doivent indifferemment étre marquez d'un petit trait ($\frown$); car ainfi la courbe deviendroit

---

[17]) Manuscrit G, f. 102 r (p. 102 de Huygens).

intraittable. Le plus seur eſt de rechercher quels doivent étre les termes correſpondans entre eux; or un des correſpondans contient toujours la lettre z et l'autre la lettre u; dans les lignes geometriques ou qui ne ſont pas exponentiales les deux correſpondans contiennent le même nombre de dimenſions de x, et le même nombre de dimenſions de y. Ils ſont de plus diviſibles par les memes lettres connues. [**De la main de Huygens**: Or tout cela convient à ces deux termes extremes. Donc ils ſont correspondants, non obſtant que dans le terme $\frac{-aau}{y^3}$ il n'y ait que l'inconnue y ni auſſi dans le terme $\frac{aaz}{y^2x}$ (car le x efface le z); ce qui eſt digne d'eſtre remarquè puis qu'il eſt contre la regle generale, qui demande que dans les termes correſpondants les lettres x et y entrent toutes deux. Cela ſera ainſi dans cette Equation ſi on la multiplie par x, ou x^1. Mais il n'eſt pas neceſſaire, parce qu'on n'a qu'a ſuivre la methode generale, dont on a vu un exemple à la page precedente.]

$\varkappa . \lambda :: -1 . +1$ $x^g y^h$ transformateur

$0 + g . -2 + h :: -1 . +1$ h ∞ 0 parce qu'autrement la transformation introduiroit y dans le terme pur $-\frac{z}{x}$.

$g = 2 - h$. Sed h ∞ 0

$g = 2$

Ergo le transformateur x^2.

$-\frac{1}{2}\frac{aaxx}{yy} - \frac{1}{2}xx$ termes generateurs dans l'Equation de la Courbe. qui eſt la meſme que celle de la page precedente. [Voyez le § 11].

§ 15 [18]). **De la main de Fatio:**

Equation à une Courbe [la circonférence de cercle]

$x^2 + y^2 - a^2 = 0$ donc $x = \frac{a^2 - y^2}{x}$ & $y = \frac{a^2 - x^2}{y}$.

$2xz + 2yu = 0$ Equation à la tangente. Et ſubſtituant [pour déguiſer la ſouſtangente] les valeurs de x et de y

$$\frac{2a^2z - 2y^2z}{x} + \frac{2ua^2 - 2ux^2}{y} = 0$$

$2a^2zy - 2y^3z + 2ua^2x - 2ux^3 = 0$. Donc ſubſtituant la valeur de y dans le 1er terme et celle de x dans le 3e

$$\frac{2a^2za^2 - 2a^2zx^2}{y} - 2y^3z + \frac{2ua^2a^2 - 2ua^2y^2}{x} - 2ux^3 = 0$$

A. $2a^4zx - 2a^2zx^3 - 2y^4xz + 2uya^4 - 2ua^2y^3 - 2ux^4y = 0$

B. $z . u :: -2a^4y + \overline{2a^2y^3 + 2x^4y} . \overline{2a^4x - 2a^2x^3} - 2y^4x$

C. $:: -y \times \overline{a^4 - a^2y^2 - x^4} . + x \times \overline{a^4 - a^2x^2 - y^4}$.

---

18) Manuscrit G, f. 102 v. (p. 103 de Huygens).

Il n'y a ici aucune paire de termes qui puiſſent étre gemeaux enſemble. Et il n'y a aucune transformation poſſible qui rende tous les termes marquables ou purs.

$-a^2y^2 - x^4 = a^2x^2 - y^4$ [voyez l'explication de cette équation que Huygens donne un peu plus loin]

$x^4 - y^4 = a^2x^2 - a^2y^2$. Donc diviſant par $x^2 - y^2$

$x^2 + y^2 = a^2$. Cette Equation donneroit $xz + uy = 0$ pour l'Equation de la tangente.

Je ſubſtitue $x^2 + y^2$ dans l'Equation **A** par tout où ſe trouve a^2 et j'ai

$$2x^5z + 4x^3y^2z + 2y^4xz, - 2zx^5 - 2y^2zx^3, - 2y^4xz, + 2uyx^4 + 4uy^3x^2 + 2uy^5, - 2uy^3x^2 - 2uy^5 - 2ux^4y = 0$$

$$4x^3y^2z - 2y^2zx^3 + 2uy^3x^2 = 0$$

Diviſant par $2x^2y^2$ $\quad 2xz - xz + uy = 0$

$$xz + uy = 0.$$

[**De la main de Huygens:** Quand l'equation vient comme icy en **A**, je la reduis a une proportion de z a u, comme en **B**; et j'examine quels ſont les diviſeurs des deux membres de cette proportion. Je trouve qu'ils ont eſtè composez par des multiplications telles qu'on voit en **C**. Maintenant ſi $-y$ eſtoit egal à $+x$, la proportion de z à u ſe reduiroit a celle—cy: z à u comme $a^4 - a^2y^2 - x^4$ à $a^4 - a^2x^2 - y^4$. Et ſi $a^4 - a^2y^2 - x^4$ eſtoit egal à $a^4 - a^2x^2 - y^4$], la meſme proportion ſe reduiroit à celle ci $z . u :: -y . + x$, ce qui donneroit $zx + uy = 0$. Voions ce qui arriveroit en ſuppoſant $a^4 - a^2y^2 - x^4 = a^4 - a^2x^2 - y^4$. On auroit [**De la main de Huygens:**

$+ a^2y^2 + x^4 \propto a^2x^2 + y^4$ et par conſequent

$x^4 - y^4 \propto a^2x^2 - a^2y^2$ Et diviſant par $x^2 - y^2$ on auroit $x^2 + y^2 \propto a^2$, d'ou reſulte auſſi l'equation des tangentes $zx + uy \propto 0$.

Or, il arrive auſſi en ſubſtituant dans l'Equation **A**, au lieu de a^2 ſa valeur $x^2 + y^2$, qu'on revient en fin à conclure $xz + uy = 0$. Qui rend l'Equation de la courbe $x^2 + y^2 \propto a^2$. C'eſt icy un cas ſingulier.]

---

§ 16 [19]). Exemple de ſubſtitution double pour deguiſer l'Equation de la Tangente. Voiez devant cecy pag. 98 et ſuivantes [20]).

Equation de la Courbe $\quad xyy - aay + x^3 \propto 0$. Au § 13 il était déjà queſtion de la courbe $-aay + xy^2 \pm \frac{a}{b}x^3 = 0$. Equation de la Tangente ſelon la regle de Mr. Fatio

---

19) Manuscrit G, f. 106 v (p. 111 de Huygens). La date du 25 Apr. 1691 se trouve sur la f. 104 v. Comparez sur la f. 106 v la note 9 de la p. 87 du T. X.

20) C. à. d. les §§ 7 et suiv.

$$yyz + 3xxz + 2xyu - aau \infty 0$$
$$z.u :: aa - 2xy.yy + 3x^2$$

Subftitution pour un $x \infty \frac{aay - x^3}{yy}$

$$z.u :: aa \frac{-2aay + 2x^3}{y}.yy + 3x^2$$

Q $\quad zy^3 + 3zxxy + a^2yu - 2x^3u \infty 0$ Equation deguifée de la tangente.

$$z + \frac{3zx^2}{y^2} + \frac{aau}{y^2} - \frac{2x^3u}{y^3} \infty 0.$$ On a divifé l'equation par y^3 pour rendre le premier et troifieme terme purs.

Les termes qui doivent eftre marquez d'un trait ⌒ ne font pas tant ceux qui font purs c'eft a dire qui n'ont pas conjointement z avec y ou u avec x, que ceux qui n'ont parmi les autres termes de l'Equation des Tangentes aucuns termes qui puiffent eftre gemeaux avec eux. Et il eft tousjours facile de reconnoitre fi un terme proposè dans une Equation des Tangentes a un gemeau avec luy ou non, parce qu'il faut qu'ils contienent toutes les mefmes lettres, (en comptant les z pour x et les u pour y) exceptè les nombres qui les multiplient, fcavoir aux courbes geometriques.

$$\varkappa.\lambda :: 3. -2. \quad x + \frac{x^3}{yy} - \frac{aa}{y} = q$$ Termes generateurs.

Le premier terme generateur x vient de z premier terme de l'Equation changée, le fecond $\frac{x^3}{yy}$ vient de $\frac{3zx^2}{yy}$ en changeant un z en x et divifant apres cela par l'expofant de x. Le troifieme $\frac{-aa}{y}$ vient de $\frac{aau}{y^2}$, en changeant un u du numérateur en y et divifant en fuite par l'expofant de y qui eft -1, parce que $\frac{aay}{y^2}$ fait $\frac{aa}{y}$.

Ces termes generateurs de l'Equation de la courbe peuvent eftre egaux à rien, ou à une quantitè pofitive ou negative. Icy en les fuppofant egaux a rien, et en reduifant l'equation, on a $xyy + x^3 - aay \infty 0$, qui eftoit l'Equation de la courbe d'ou l'Equation de la Tangente a eftè tiree. Mais l'Equation de la Tangente fe feroit encore tiree de l'une de ces deux autres Equations de Courbe, fcavoir $xyy + x^3 - aay - b^3 \infty 0$ ou $xyy + x^3 - aay + b^3$ qui font des courbes differentes de l'autre.

N.B. Jufqu'icy la methode de M^r^. Fatio reuffit fort bien.

Voicy une feconde fubftitution dans l'Equation marquée **Q**. qui eftoit $zy^3 + 3zxxy + a^2yu - 2x^3u \infty 0$. Subftitution pour un $y \infty \frac{aay - x^3}{xy}$.

$$\text{R} \quad zy^3 + 3zxxy + \frac{a^4uy - aaux^3}{xy} - 2x^3u \infty 0$$

$$\underset{\frown}{zxy^4} + \underset{\lambda}{3zx^3yy} + \underset{\frown}{a^4uy} - \underset{\frown}{aaux^3} - \underset{\lambda}{2x^4uy} \infty 0.$$ Intraitable apres deux fubftitutions l'une de y l'autre de x. Elle eft intraitable par ce qu'il n'y a point de multiplicateur qui rende purs les trois termes marquez $\frown$. ni qui faffe qu'il y en ait deux entre eux de correfpondans, parce que ne l'eftant pas ils ne peuvent le devenir. Quand mefme ces trois termes marquez feroient rendus purs, il fe trouveroit plus de trois termes avec des inconnues dans l'Equation de la Courbe.

N.B. Si on fubftitue encore la valeur $y \infty \frac{x^3 + xyy}{aa}$ dans le terme a^4uy, elle redevient traitable. de quoy la raifon eft peut eftre, parce que le terme a^2yu dans l'equation Q eft nè des deux termes xyy et aay de l'Equation de la Courbe, ce qui paroit de ce que ce terme a^2yu eft reftè comme difference des termes — $aauy$ et $2a^2uy$, qui ont leur origine des dits termes xyy et aay. Il femble donc qu'apres avoir fubftituè dans le terme a^2yu un y qui eft nè du terme xyy, (ce qui rend l'equation intraitable) il faut encore fubftituer dans le terme a^4uy de l'Equation R, un y nè du terme aay de l'Equation de la Courbe. et que par la l'on rende l'Equation de la Tangente derechef traitable.

Equation Q. Subftitution pour un $x \infty \frac{aay - xyy}{xx}$.

$$zy^3 + \frac{3aazy^2 - 3xzy^3}{x} + aauy - 2x^3u \infty 0$$

$$+ \underset{\lambda}{3aazy^2} - \underset{\frown}{2xzy^3} + \underset{\lambda}{aaxuy} - \underset{\frown}{2x^4u} \infty 0$$

Equation traitable apres deux fubftitutions differentes de la valeur x. Icy les deux termes marquez $\frown$ deviendront purs en multipliant l'equation par $y^{-3}\,x^{-4}$ [21]). les deux autres demeurent correfpondans. comme il eft aisè de voir en comptant les z pour des x, et les u pour des y [22]).

Equation transformée

$$\underset{\lambda}{\frac{3aaz}{yx^4}} - \underset{\frown}{\frac{2z}{x^3}} + \underset{\lambda}{\frac{aau}{y^2x^3}} - \underset{\frown}{\frac{2u}{y^3}} \infty 0$$

[21]) Phrase corrigée **par Fatio.** Huygens avait écrit (ce qui revient au même): en divifant l'equation par y^3x^4.

[22]) **Fatio ajoute:** Auffi étant correfpondans d'abord ils le demeurent neceffairement apres la divifion par x^gy^h. ou la multiplication par $x^{-g}\,y^{-h}$.

De la main de Fatio: Cette Equation ne fera traittable qu'en cas qu'elle foit immediate c'eft à dire que les termes λ aient un generateur qui les rende immediatement. Car la transformation qui a été faite étoit la feule qui pût reuffir. Il faut donc voir fi, pour les termes λ, on a $\varkappa . \lambda :: 3 . 1$. Or cela eft ainfi, car dans le generateur immediat le nombre des dimenfions étant neceffairement le même que dans les correfpondans, on trouve pour le generateur des λ que $\varkappa$ et λ font -3 et -1 [en marge **de la main de Huygens:** Il faut voir feulement fi les termes $\frown$ peuvent venir d'un mefme generateur] ce qui eft confiftent avec la proportion $\varkappa . \lambda :: 3 . 1$. Mais fi au lieu de $\frac{aau}{y^2x^3}$ on avait eu $\frac{2aau}{y^2x^3}$ on auroit eu $\varkappa . \lambda :: 3 . 2$ ce qui auroit marqué que l'equation étoit intraittable. [**De la main de Huygens:** Les termes generateurs font icy $\frac{-aa}{x^3y} + \frac{1}{xx} + \frac{1}{yy} \infty q$ qui font tirez des termes de l'equation transformée, felon la regle ordinaire].

---

§ 17 [23]). Le § 17 ne nous eft pas compréhenfible. Le calcul eft incorrect. Nous n'avons pourtant pas voulu le fupprimer puifqu'il fait voir que Fatio, ou, fi l'on veut, Fatio et Huygens, effayèrent un inftant, fans aucun fuccès, d'appliquer la méthode aux courbes tranfcendentes. Le point d'interrogation ajouté par eux (par Fatio) à une équation du § 18, indique qu'ils fe rendaient compte de leur manque de fuccès.

De la main de Fatio: Equation de la Tangente $ax^4y^2z - b^3x^3yu = 0.$

x^3y^2 commun divifeur compofé des puiffances de x et de y.

$\varkappa . \lambda :: ax^2 . b^3$

$x^{ax^2}\ y^{b^3} \infty q$. Courbe que l'on peut avec Monfieur Leibnitz nommer exponentiale [Leibniz fe fert auffi de l'expreffion „equation tranfcendente"; voyez la p. 517 du T. IX].

$ax^2x^{ax^2-1}zy^{b^3} - b^3x^{ax^2}y^{b^3-1}u \infty 0$ On voit que Fatio n'eft pas en état (s'il l'eût été, cela eût été bien furprenant) de différentier correctement la fonction x^{ax^2}.

$$ax^{ax^2+1}zy^{b^3} - b^3x^{ax^2}uy^{b^3-1} \infty 0$$

$$axz - b^3y^{-1}u \infty 0$$

$$z . u :: \frac{b^3}{y} - ax$$

$$z . u :: b^3 . axy$$

$$\underset{\overset{\frown}{\lambda}}{x^7z} + \underset{\lambda}{ax^4y^2z} - \underset{\lambda}{b^3x^3yu} = 0$$

[**De la main de Huygens:** divide per $x^{ax^2}y^{b^3}$.

De la main de Huygens:
b^3x^3y $\quad ax^4y^2$
$b^3.x^3y$ $\quad axy.x^3y$ in æquatione data tangentis]

---

[23]) Manuscrit G, f. 107 r (p. 112 de Huygens).

$$z \,.\, \lambda :: ax^2 \,.\, b^3 :: \frac{2b^3}{ax^2} \,.\, 2$$

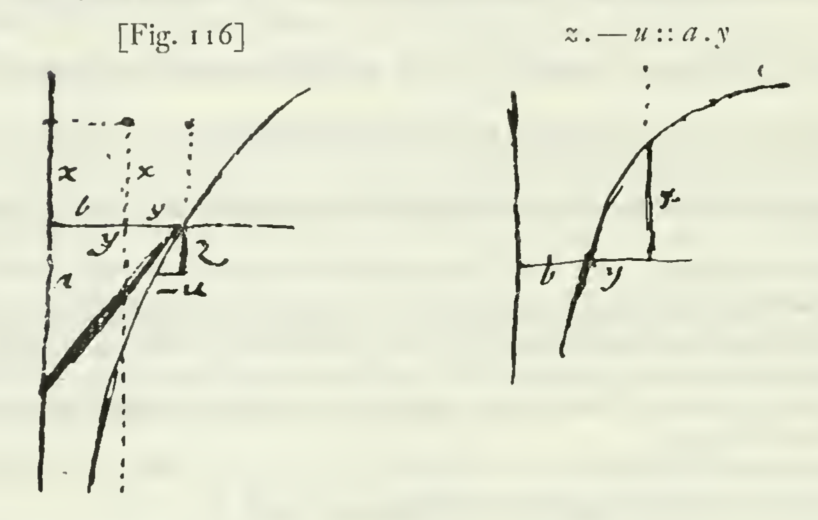
$$\frac{2b^3}{x^{axx} y^2}$$

qui font les dimenfions de y. qu'il faut garder pour conferver le terme marqué dans fa pureté.

§ 18 [24]). **De la main de Fatio:**

Propriété de la tangente de la ligne Logarithmique [Fig. 116]

[Fig. 116] $z \,.\, -u :: a \,.\, y$



[En marge **de la main de Huygens:** parce que u eft contè pour y, il a falu compter auffi z pour x.]

La lettre a défigne la fouftangente qui eft conftante pour la logarithmique, ce qui caractérife cette courbe.

$$zy + au = 0$$
$$\lambda \qquad \lambda$$
$$z \,.\, \lambda :: x \,.\, a$$

$x^x y^a = q$? Equation de la Courbe, mais comme il paroit elle eft exponentiale. Calcul apparemment erroné, non moins que celui du § 17.

Dans la fuite Fatio eft plus heureux: il réuffit à trouver une forme non-exponentiale de la courbe par un développement en férie antérieur à l'intégration. Il s'agit au fond, comme on voit, du développement en férie déjà obtenu par Mercator (Pièce VII à la p. 260 qui précède) de $l(1 + \frac{y}{a})$ ou, pour $a = 1$, de $l(1 + y)$.

$$z + \frac{au}{y} = 0$$

---

[24]) Manuscrit G, f. 107 v (p. 113 de Huygens).

Soit le y de la courbe $= b + y$ nouveau: par là on determine le nouvel y [Fig. 116 et Fig. 117].

$$\frac{au}{y} \text{ [devient] } \frac{au}{b+y}$$

$$\left[z + \frac{au}{y} \text{ devient} \right]$$

$$z + \frac{au}{b} - \frac{auy}{bb} + \frac{auy^2}{b^3} - \&c = 0$$

[L'intégration donne]

$$x + \frac{ay}{b} - \frac{ay^2}{2b^2} + \frac{ay^3}{3b^3} - \&c = q.$$

[Fig. 117]

Equation de la courbe par une suite infinie de termes qui ne sont point exponentiaux. Le 1er y est changé en $b + y$.

$$x + \frac{ay}{b} + \frac{ay^2}{2b^2} + \frac{ay^3}{3b^3} + \&c = q.$$ Equation de la meme courbe mais qui nait en faisant le premier $y = b - y$ nouveau.

Si on commence les x et les y en A [Fig 117], où la tangente fait un angle de 45° avec la courbe Logarithmique, on aura $b = a$.

De plus si x est infiniment petit on aura encore $x = y$.

$$x + y + \frac{y^2}{2a} + \frac{y^3}{3a^2} + \&c = q.$$

$$y + y + \frac{y^2}{2a} + \frac{y^3}{3a^2} + \&c = q.$$ qui est zero comme il est evident.

$$x + y + \frac{y^2}{2a} + \frac{y^3}{3a^2} \&c = 0.$$

$$x = -y - \frac{y^2}{2a} - \frac{y^3}{3a^2} \&c.$$ Il faut faire $a = 1$.

---

§ 19 [25]). Aequatio Parabolæ $ax - yy \infty 0$. $\frac{2yy}{a}$ subtangens simplex. Jam pro yy pone ax. $\frac{2ax}{a}$ sive $2x$ subtangens implicita.

---

[25]) Manuscrit G, f. 109 r (p. 116 de Huygens).

$$z \,.\, u : 2x \,.\, y$$
$$zy \infty 2ux$$
$$zy - 2ux \infty 0$$
$$\lambda \qquad \lambda$$

$\varkappa \,.\, \lambda : 1 \,.\, -2$

$\frac{x}{yy} - \frac{1}{a} \infty 0$ quia tantum duo exiſtunt termini correſpondentes abſque alio, non opus eſt hic Transformatorem quærere, ſed ſufficit, cum ſit $\varkappa$ ad λ ut 1 ad -2, ponere terminum generatorem in æquatione curvæ $\infty \frac{x}{yy}$, cui neceſſario addendus $-\frac{1}{a}$.

Sit tamen $x^g y^h$ transformator.

$$1 + g \,.\, 1 + h : 1 \,.\, -2$$
$$-2 - 2g \infty 1 + h$$
$$-2g - 3 \infty h$$
$$-3 \infty h.$$

Poſſum ponere $g \infty 0$ quia nullus eſt, in æquatione tangentis $zy - 2ux \infty 0$, terminus præter duos correſpondentes. Ergo $-3 \infty h$, eoque transformator $x^g y^h \infty \frac{1}{y^3}$, et æquatio transformata $\frac{z}{yy} - \frac{2ux}{y^3} \infty 0$

Hinc enim $\frac{x}{yy}$ terminus generator in æquatione curvæ quæſitæ.

Terminus generator $\frac{x}{yy}$ ex termino æquationis transformatæ $\frac{z}{yy}$ habetur mutando z in x et dividendo per exponentem quem tunc habet x, qui eſt hic 1. Idem terminus generator haberetur ex termino $\frac{-2ux}{y^3}$. mutando nempe u in y unde fit $\frac{-2x}{yy}$, et dividendo tunc per exponentem literæ y, qui hic eſt -2. Nam $\frac{-2x}{yy}$ diviſum per -2 facit $+\frac{x}{yy}$, eundem nempe terminum generatorem.

Ex hoc enim [termino $\frac{x}{yy}$] duo $\frac{z}{yy} - \frac{2xu}{y^3}$, primus mutando x numeratoris in z, et multiplicando per 1 exponentem ejuſdem x, alter multiplicando per -2 exponentem τοῦ y in termino $\frac{x}{yy}$, et mutando unum y numeratoris in u: ſed quia, in numeratore termini $\frac{x}{yy}$, non eſt y, oportet ut ibi y apponatur quod mutatur in u; ſimulque in denominatore adjiciatur unum y. atque ita fit $\frac{-2xu}{y^3}$.

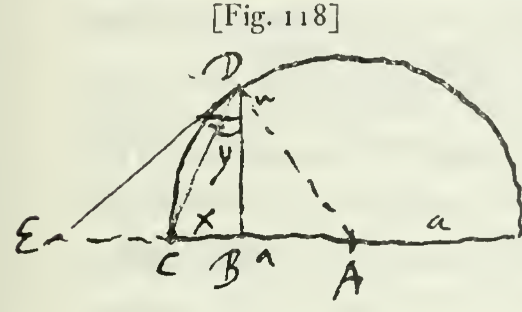
Quia autem folus terminus generator $\frac{x}{yy}$ invenitur, qui non poteft efficere æquationem curvæ, oportet quantitatem aliquam cognitam quæ eafdem dimenfiones habeat ab ipfo fubtrahere. Atque ita facere $\frac{x}{yy} - \frac{1}{a} \infty 0$. Unde $ax - yy \infty 0$ æquatio parabolæ.

---

§ 20 [26]). Oportet valorem x vel y fubftitui in eo tantum termino fubtangentis qui ortus eft è termino æquationis lineæ curvæ ex quo ifte valor x, vel y defumtus fuit; alioqui fit æquatio tangentis intractabilis quantum ad methodum D^r. Fatij.

Exempli gratia fit CD circumferentia [Fig. 118]. CB ∞ x. BD ∞ y. AC ∞ a.

[Fig. 118]



Aequatio curvæ

$$2ax - xx \infty yy \qquad x \infty \frac{yy + xx}{2a}$$

$$-yy + 2ax - xx \infty 0 \qquad 2a \infty \frac{yy + xx}{x}$$

$$\frac{2yy}{2a - 2x} \;\Big|\; \frac{yy}{a - x} \text{ fubtangens fimplex BE.}$$

$$\text{BE } \frac{yy}{a \dfrac{-yy - xx}{2a}} \;\Big|\; \frac{2ayy}{2aa - yy - xx} \text{ BE fub-}$$

tangens implicita per fubftitutionem valoris x in termino divifóris $- x$, qui ortus eft ex termino $- xx$, cum valor x fit ex termino $2ax$.

Huygens parle de cette fouftangente (l'appelant pourtant par erreur „fubnormalis"; comparez le § 22 qui fuit) dans fa lettre à Hubertus Huighens du 12 février 1692, T. X, p. 247, où nous citons dans la note 16 la préfente page du Manufcrit G.

$$z \text{ —— } u \text{ —— } 2ay \text{ —— } 2aa - yy - xx$$

$$2aaz - zyy - zxx - 2auy \infty 0 \qquad \text{æquatio tangentis}$$

intractabilis cum nulli termini correfpondentes infint, nec omnes puri poffint effici

In fubtangente implicita fubftituatur porro, pro $2a$ numeratoris, valor ejus $\frac{yy + xx}{x}$ ortus ex termino $2ax$. fit $\frac{y^4 + xxyy}{2aax - yyx - x^3}$ fubtangens.

$$z.u \text{ ==== } y^3 + xxy \text{ —— } 2aax - yyx - x^3$$

$$\overset{}{\underset{\frown}{2aazx}} - \underset{\lambda}{zyyx} - \underset{\frown}{zx^3} - \underset{\frown}{uy^3} - \underset{\lambda}{uxxy} \infty 0 \qquad \text{æquatio tan-}$$

gentis tractabilis. Hic funt duo termini correfpondentes notati λ, et reliqui tres puri.

---

[26]) Manuscrit G, f. 109 v (p. 117 de Huygens).

$\varkappa . \lambda : -1. -1$ Nullus verò transformator quia si quis esset, is terminorum purorum trium aliquos impuros redderet, hoc est x et y continentes.

Fit ergo, secundum regulam, terminus generator correspondentium duorum $-\frac{1}{2}xxyy$, terminorum vero purorum generatores $+aaxx - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}y^4$.

Ergo
$$-\tfrac{1}{2}xxyy + aaxx - \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{4}y^4 \infty 0$$
$$4aaxx \infty x^4 + 2xxyy + y^4$$
$$2ax \infty xx + yy \qquad \text{æquatio curvæ.}$$

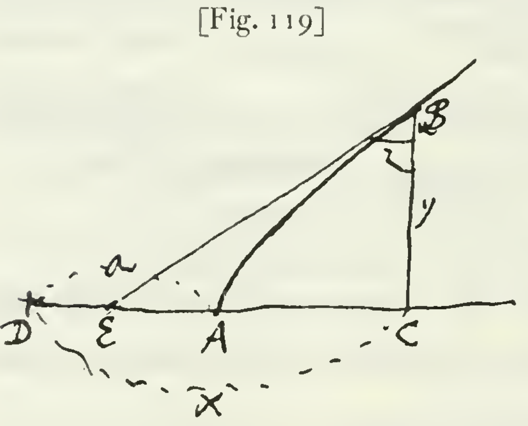
In hoc exemplo singulare est, quod ad æquationem pervenitur, ex qua utrimque radix extracta dat æquationem curvæ quæsitæ.

Similiter ut hic, invenio quoque contingere in subtangente curvæ pag. 111, quæ est $\dfrac{-2xyy + aay}{yy + 3xx}$, in qua si substituatur pro y in termino aay, valor ejus inventus ex termino xyy æquationis curvæ $xyy - aay + x^3 \infty 0$ [équation déjà considérée dans le § 16, emprunté à la p. 111 de Huygens] fit æquatio tangentis intractabilis
$$\underset{\curlywedge}{zxy^4} + 3zx^3y^2 + \underset{\curlywedge}{2x^2y^3u} - a^4yu + aax^3u \infty 0.$$
Si vero hic porro in termino $-a^4yu$ qui est ab aay, substituatur, pro uno a^2, valor ejus $\dfrac{xyy + x^3}{y}$, inventus ex termino aay: redditur æquatio tangentis tractabilis $\underset{\curlywedge}{zy^4} + 3zxxyy + \underset{\curlywedge}{2xy^3u} - aayyu \infty 0$ reformanda divisione per yy, ut duo termini non correspondentes fiant puri.

---

§ 21 [27]). AB [Fig. 119] est curva. DAC recta. BC applicata. Si DC, DA, DE sint proportionales, erit EB tangens hyperboles ut notum ex Conicis [28]). Ex hac proprietate invenienda est natura curvæ AB, nempe hyperboles.

[Fig. 119]



Sit DA ∞ a, DC ∞ x, CB ∞ y.

DC. DA : DA . DE

$x.\ a : a \,/\, \dfrac{aa}{x}$ } s. ex DC x

$z.u. = \dfrac{xx - aa}{x}$ EC — y

$\underset{\curlywedge}{zxy} - \underset{\curlywedge}{uxx} + \underset{\frown}{uaa} \infty 0$ æquatio tan-

[27]) Manuscrit G, f. 110 r (p. 118 de Huygens).

gentis. $\varkappa . \lambda : 1. - 1$. Sit $x^g y^h$ transformator. in quo g eſt exponens x, et h exponens y. $g+2. h+1:1. -1. \quad -g-2 \infty h+1$.

Sed g ∞ o quia alias introduceretur x in terminum purum uaa. Ergo -3∞ h. Ergo transformator $x^g y^h \infty \frac{1}{y^3}$. Et æquatio transformata $\frac{zx}{yy} - \frac{uxx}{y^3} + \frac{uaa}{y^3} \infty$ o. In termino $\frac{zx}{yy}$ mutetur z in x et tunc dividatur per exponentem x qui erit 2. ſitque $\frac{xx}{2yy}$ terminus generator duorum correſpondentium $\frac{zx}{yy}$ et $\frac{-uxx}{y^3}$. Deinde in termino $\frac{uaa}{y^3}$ mutetur u in y, ſit $\frac{aa}{yy}$ et dividatur per exponentem y qui eſt -2, ſit $\frac{-aa}{2yy}$, alter terminus quæſitæ æquationis, generator nempe termini $\frac{uaa}{y^3}$. quæ itaque æquatio eſt $\quad \frac{xx}{2yy} - \frac{aa}{2yy} \mp \frac{a}{b} \infty$ o. Apparet enim terminum aliquem cognitum hic adponendum, quia alioqui fieret $xx \infty aa$, quæ non eſt æquatio ullius lineæ curvæ. Poteſt autem ratio a ad b eſſe quælibet data, vel etiam æquales a et b. Itaque jam

$$xx - aa \mp \frac{2ayy}{b} \infty \text{ o.}$$

Quod ſi ponatur $-\frac{2ayy}{b}$, erit æquatio hyperbolæ; ſi vero $\frac{+2ayy}{b}$, erit ellipſis vel circuli, ut facile apparet. Sed hic ponendum $-\frac{2ayy}{b}$, quia xx majus poſitum fuit quam aa. Nam ita ſit $xx - aa \infty \frac{2ayy}{b}$, at in ellipſi $aa - xx \infty \frac{2ayy}{b}$.

Quod ſi ex æquatione ſimplici hyperbolæ, $xx - aa - \frac{2aay}{b} \infty$ o quæratur primò ſubtangens EC, ea ſit $\frac{4ayy}{2bx}$ ſive $\frac{2ayy}{bx}$, ubi ſi ſubſtituatur valor yy, qui ex hac æquatione eſt $\frac{bxx - baa}{2a}$, ſiet $\frac{bxx - baa}{bx}$ ſive $\frac{xx - aa}{x}$ ſubtangens implicita per ſubſtitutionem valoris yy, quæ ſuperius data erat.

---

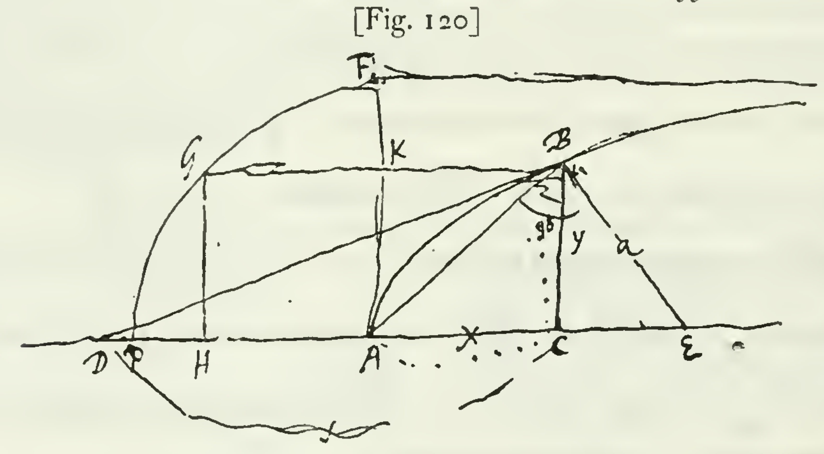
[28]) D est par hypothèse le centre de l'hyperbole, et DA $= a$ ce que nous appelons la moitié du grand axe. Apollonios, Conica, Lib. I, XXXVII (texte latin de Heiberg): „Si recta hyperbolam vel ellipsim vel ambitum circuli contingens cum diametro concurrit, et a puncto contactus ad diametrum recta ordinate ducitur, recta ab ordinate ducta ad centrum sectionis abscisa cum recta a contingenti ad centrum sectionis abscisa spatium comprehendet æquale quadrato radii sectionis", etc.

Poterat et æquatio hyperbolæ, $xx - aa - \frac{2ayy}{b} \infty$ o dividi per yy unde fit $\frac{xx}{yy} - \frac{aa}{yy} - \frac{2a}{b} \infty$ o, et hinc ſubtangens formari quæ fit $\frac{\frac{2xx}{yy} - \frac{2aa}{yy}}{\text{diviſor } \frac{2x}{yy}}$ hoc eſt $\frac{xx - aa}{x}$, cadem rurſus quæ ſupra. Nota autem tum terminum $\frac{2xx}{yy}$ eſſe primo cum ſigno — quia exponens y eſt — 2, ſed mutari in +, ex regula quæ ſigna contrarijs mutat in numeratore ſubtangentis.

---

§ 22 [29]). AB [Fig. 120] eſt curva. AC recta ∞ x. BC ad eam normalis ∞ y. BD tangens. Proprietas tangentis hæc ut ſubtangens DC ſit ∞ $2x + \frac{x^3}{yy}$.

[Fig. 120]



Il eſt queſtion de cette ſouſtangente dans la lettre du 12 février 1692 de Huygens à Hubertus Huighens (T. X, p. 246), où toutefois Huygens parle par erreur (erreur qu'il corrigea par après) de la „ſubnormalis" (note 13 de cette p. 246). Comparez le § 20 qui précède.

---

[29]) Manuſcrit G, f. 110 v et 111 r (p. 119—120 de Huygens).

Quæritur natura ſeu æquatio curvæ AB.

$$\begin{array}{c} \text{DC} \quad \text{CB} \\ z \,.\, u : 2x + \frac{x^3}{yy} \,.\, y \\ z \,.\, u : 2xyy + x^3 \,.\, y^3 \end{array}$$

$zy^3 - 2xyyu - x^3u \infty 0$ æquatio tangentis.

λ λ φ

Hic quidem duo termini correſpondentes habentur, ſed reliquus $-x^3u$ non eſt purus, quia et x habet et y, pro quo nempe cenſetur u;

Sed dividendo æquationem per x^3 fiet pro termino $-x^3u$, purus u. Ergo eo facto fit

$$\frac{zy^3}{x^3} - \frac{2yyu}{xx} - u \infty 0$$ ubi duo priores termini,

λ λ ⌢

etſi correſpondentes ſint, tamen ab eodem termino generatore oriri non potuerunt, nam $\frac{zy^3}{x^3}$ venit a generatore $\frac{-y^3}{2x^2}$. nempe multiplicando per -2, exponentem x, et mutando unum x numeratoris in z, (ſed quia non habetur x in numeratore generatoris apponitur ipſi x et in z mutatur, ſimulque unum x in denominatore additur) unde fit $\frac{y^3z}{x^3}$. Atqui alter terminus correſpondens $\frac{-2yyu}{xx}$ venit a generatore $-\frac{2y^3}{3xx}$ multiplicando nempe per 3 exponentem y et unum y numeratoris in u. Videndum itaque an adhuc amplius transformari poſſit æquatio $\frac{zy^3}{x^3} - \frac{2yyu}{xx} - u \infty 0$.

$\kappa \,.\, \lambda : 1 \,.\, -2$ Sit tranſformator $x^g y^h$.

$g-2 \,.\, h+3 : 1 \,.\, -2$ $g-2$, quia in termino $\frac{zy^3}{x^3}$ exponens x eſt -2 propter

$-2g+4 \infty h+3$ $\frac{z}{x^3}$ ſeu $\frac{x}{x^3}$ ſeu $\frac{1}{xx}$.

$-2g+1 \infty h$ Sed g eſt $\infty 0$, quia alias tranſformator induceret x in terminum purum u. Ergo tranſformator $x^g y^h \infty y$.

$$\frac{zy^4}{x^3} - \frac{2y^3u}{xx} - uy \infty 0$$ æquatio tranſformata, ubi jam

λ λ ⌢

duo termini correſpondentes et tertius $-uy$ purus.

Ergo generator duorum eſt $\frac{-y^4}{2xx}$, et $\frac{-yy}{2}$ alter, quibus neceſſario addendus terminus aliquis cognitus, ac ſimpliciſſimus quidem $+\frac{1}{2}aa$, unde fit æquatio

$$y^4 + yyxx - aaxx \infty 0,$$

curvæ unicæ quæ problemati convenit. Hæc curva eſt ejuſmodi, ut ductâ ab A vertice recta AB, et huic normali BE, hæc ipſa ſemper eidem lineæ a æqualis eſt. Hanc Gutſchovius Sluſio propoſuit, Sluſius mihi, cujus quadraturam ex circuli quadratura pendere inveni [voyez ſur ce ſujet la note 15 de la p. 246 du T. X, où nous avons cité ce paſſage]. Nempe ſi APF ſit circuli quadrans, radio AP ∞ BE ſeu a, et ducatur BKG parallela et GH perpend. AC, fieri ſpat. BKA ∞ ſegmento GPH. Vid. Lib. B, circa med. [Manuſcrit B, p. 125 et 126, datant du 15 ſeptembre 1662].

Ut oſtendatur porro curvam cujus æquatio $y^4 + yyxx - aaxx \infty 0$ dare ſubtangentem $2x + \frac{x^3}{yy}$, dividenda tantum æquatio hæc per xx, unde fit $\frac{y^4}{xx} + yy - aa \infty 0$. Unde ſecundum regulam formata ſubtangens erit

$$\frac{\frac{-4y^4}{xx} - 2yy}{-\frac{2y^4}{x^3}} \text{ hoc eſt } 2x + \frac{x^3}{yy}.$$

Nota diviſorem hunc eſſe $\frac{-2y^4}{x^3}$, quia terminus $\frac{y^4}{xx}$ multiplicandus fuit per exponentem quem in eo habet x, qui exponens eſt hic -2. ac deinde dividendus per x. unde fit $-\frac{2y^4}{x^3}$. hæc nempe ſecundum regulam tangentium.

Nam aliter quoque ex æquatione $y^4 + yyxx - aaxx \infty 0$, formatâ ſubtangente ſimplici $\frac{-4y^4 - 2yyxx}{2yyx - 2aax}$ et in termino $-2aax$ ſubſtituendo valorem aa, ex ipſa æquatione inventum, nempe $aa \infty \frac{y^4 + yyxx}{xx}$ habebimus $\frac{-4y^4 - 2yyxx}{2yyx - \frac{2y^4}{x} - 2yyx}$, hoc eſt $2x + \frac{x^3}{yy}$ ſubtangentem eandem.

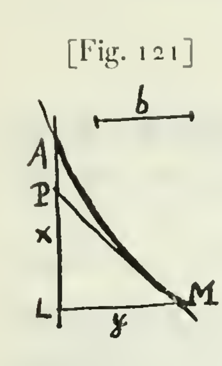
---

§ 23 [30]). Non reperi adhuc, licet in multis exemplis ſim expertus, æquationes tangentium intractabiles ultro ſeſe offerentes. Sed tantum datâ operâ tales fieri videntur, eo modo quo dixi pag. 117 in principio [§ 20] nempe per ſubſtitutiones quaſdam quantitatum.
Ecce exempla quædam ubi ſemper tractabiles fiunt æquationes tangentium, ſive ſubtangentes; etſi hæ non ſint ſimplices tamen, quales ex æquatione curvæ deſcribuntur.

---

[30]) Manuscrit G, f. 111 r (p. 120 de Huygens). Nous avons cité cette page dans la note 11 de la p. 223 du T. X.

[Fig. 121]



AM [Fig. 121] eſt curva. b recta data. AL recta $\infty\ x$. LM applicata $\infty\ y$. PM tangens. ſubtangens PL $\infty\ \frac{bx + xx}{2b + x}$.

Huygens propoſera cette ſouſtangente à Leibniz dans ſa lettre du 1 janvier 1692 (T. X, p. 223), diſant que la méthode de Fatio conduit aiſément à l'équation de la courbe correſpondante (ſavoir l'hyperbole).

$$\frac{bx + xx}{2b + x} \text{ --- } y \text{ --- } z \text{ --- } u$$

$$bx + xx \,.\, 2by + xy = z \text{ --- } u$$

æquatio tangentis $\underset{\lambda}{2byz} + \underset{\varphi}{xyz} - \underset{\lambda}{bxu} - \underset{\varphi}{xxu}\ \infty\ 0$. hic duo paria terminorum correſpondentium.

En marge: Termini correſpondentes ſunt in quibus eædem poteſtates quantitatum x et y reperiuntur; ſed ita ut etiam z pro x habeatur et u pro y. — Methodus Fatij aliquatenus exponitur. vide pag. 98 [§ 9 qui précède].

Quia termini correſpondentes $2byz$ et $-\ bxu$ ab eodem termino genitore orti ſunt, neceſſe eſt in hoc termino genitore exponentem τοῦ x eſſe ad exponentem τοῦ y ut 2 ad $-$ 1, hoc eſt ut numeri his terminis præfixi, nam $2byz$ habet 2, et $-\ bxu$ cenſetur habere $-$ 1. Ergo $\varkappa \,.\, \lambda : 2. - 1$. Sed hi termini non poſſunt, quales hic ſunt, ex uno eodemque termino generatore oriri: poterunt autem certo modo in poteſtates x vel y utriuſque ducti. Itaque quærendus eſt transformator totius hujus æquationis tangentis qui transformator ſit $x^g y^h$, ubi g et h ſunt ignoti adhuc exponentes τῶν x y. Ergo cum in termino $2byz$ ſive etiam $-\ bxu$, habeatur jam nunc unum x, (nam z eſt pro x), facta transformatione erit in ipſo exponens τοῦ $x\ \infty\ 1 + g$. Similiterque cum in alterutro iſtorum terminorum habeatur jam nunc unum y; (nam et u eſt pro y) facta tranſmutatione erit in ipſo exponens τοῦ $y\ \infty\ 1 + h$. Atqui diximus in termino horum genitore communi eſſe exponentem τοῦ x ad exponentem τοῦ y ſicut 2 ad $-$ 1. Ergo erit

$$1 + g \text{ ad } 1 + h \text{ ut } 2 \text{ ad } -1.$$

$$\text{Ergo } \quad -1 - g\ \infty\ 2 + 2h$$

$$\frac{-3 - g}{2}\ \infty\ h$$

Conſidero deinde terminos reliquos correſpondentes xyz et $-\ xxu$, in quorum communi genitore exponens τοῦ x ad exponentem τοῦ y debet eſſe ut 1 ad $-$ 1, quia hi cenſentur numeri ipſis præfixi. Itaque hic $\varkappa$ ad λ ut 1 ad $-$ 1.

Quia autem in terminorum utrovis eſt xx et y, erit in ipſis, poſt transformationem ex ductu $x^g y^h$, exponens τοῦ $x\ \infty\ 2 + g$, et exponens τοῦ y $1 + h$.

Ergo $\quad 2 + g$ ad $1 + h$ ut 1 ad $-$ 1

unde $\quad -2 - g\ \infty\ + 1 + h$

et $\quad -3 - g\ \infty$ h. Sed erat h $\infty\ \frac{-3 - g}{2}$.

Ergo $$-3-\mathrm{g} \infty \frac{-3-\mathrm{g}}{2}$$

Ergo $$-3 \infty \mathrm{g}$$ Ergo $\mathrm{h} \infty \frac{-3+3}{2} \infty 0$. Ergo transformator $\frac{1}{x^3} \infty x^{\mathrm{g}} y^{\mathrm{h}}$.

Nam quia in transformatore hoc invenitur exponens g τοῦ x esse -3, hoc significat divisionem per x^3, sive multiplicationem in $\frac{1}{x^3}$. Exponens autem h τοῦ y est ∞ o. ideoque transformatio non auget nec diminuit exponentem τοῦ y qui est in æquatione ante transformationem.

Erat æquatio ista $$2byz + xyz - bxu - xxu \infty 0$$
⅄ ♀ ⅄ ♀

quæ ducta in transformatorem $\frac{1}{x^3}$ facit $$\frac{2byz}{x^3} + \frac{yz}{xx} - \frac{bu}{xx} - \frac{u}{x} \infty 0.$$
⅄ ♀ ⅄ ♀

In qua æquatione termini bini quique manent necessario correspondentes, quia tales erant ante ductum in $\frac{1}{x^3}$. Nunc autem duo notati ⅄ poterunt habere genitorem communem, itemque duo reliqui notati ♀. Nempe secundum regulam, in termino $\frac{2byz}{x^3}$, mutato z in x, et tunc dividendo per exponentem x, qui erit -2, quia xx est in divisore, fiet $\frac{-by}{xx}$ pro generatore duorum notatorum ⅄. Similiterque in termino $\frac{yz}{xx}$ mutando z in x et tunc dividendo per exponentem x qui erit -1, quia x erit in divisore, fiet $\frac{-y}{x}$ pro generatore duorum notatorum ♀.

En marge: Nota ex termino $-\frac{by}{xx}$ fieri in æquatione terminum $\frac{2byz}{x^3}$ multiplicando ipsum per exponentem literæ x, hoc est per -2, et mutando z in x; sed quia non invenitur z in $-\frac{by}{xx}$, addendum est in numeratore, et x in divisore, et sic fit $\frac{2byz}{x^3}$.

Ergo duo termini in æquatione curvæ quæsitæ sunt $\frac{-by}{xx}$ et $\frac{-y}{x}$ quibus necessario adjungendus terminus aliquis cognitus totidem dimensionum, ut $\frac{b}{a}$, atque ita tota æquatio curvæ sit $\frac{-by}{xx} - \frac{y}{x} + \frac{b}{a} \infty 0$. quæ reducta facit

$$-by - xy + \frac{bxx}{a} \infty\ 0$$ quæ oſtendit

curvam AM eſſe hyperbolam. Quod ſi pro $\frac{b}{a}$ poſuiſſem $\frac{1}{2}$, fuiſſet æquatio $- by - xy + \frac{1}{2}xx \infty\ 0$, atque ita hyperbola fuiſſet æqualium laterum. Nam tunc

$$xx \infty\ 2xy + 2by$$

$$x \infty \sqrt{yy + 2by} + y$$ ubi nulla fractio ad yy.

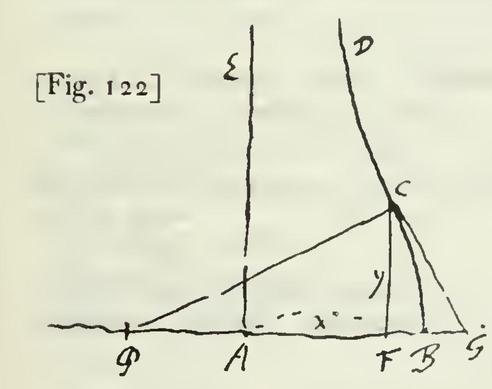
En marge: Ut oſtendatur ſubtangentem eſſe $\frac{bx + xx}{2b + x}$, æquatio $- aby - axy + bxx \infty\ 0$ dividatur per xx; fit $- \frac{aby}{xx} - \frac{ay}{x} + b \infty\ 0$, unde deſcripta ſubtangens ſecundum regulam noſtram erit

$$\frac{\frac{aby}{xx} + \frac{ay}{x} \quad \text{dividendus}}{\frac{2aby}{x^3} + \frac{ay}{xx} \quad \text{diviſor}}$$ hoc eſt $\frac{bx + xx}{2b + x}$.

Videtur ita dividendum fuiſſe per xx quia transformator fuit $\frac{1}{x^3}$.

---

§ 24 [31]). Sit BD [Fig. 122] Conchoides veterum, aut certe Nicomedis, qui eleganter ea uſus eſt in duarum mediarum inventione et in triſectione anguli [32]).



[Fig. 122]

P polus, AE regula, AB diameter. punctum in ea C. AF $\infty\ x$, FC $\infty\ y$, quæ ſcilicet parallela AE. AP $\infty\ b$, AB $\infty\ c$. Tangens CG. Subtangens FG. quæ invenitur eſſe $\frac{- x^3yy}{x^4 + bx^3 + bccx + bbcc}$. Ex qua ſit invenienda æquatio Curvæ. Eſt autem $- x^3yy$ negativa, cum diviſor ſit affirmativa, quia GF in contrarium AF ponitur.

---

[31]) Manuscrit G, f. 112 r (p. 122 de Huygens).

[32]) Huygens s'était occupé de cette conchoïde déjà en 1652: voyez le T. XII.

Ergo $\dfrac{-x^3yy}{x^4+bx^3+bccx+bbcc} \;\text{—}\!\!\!\!\text{⊤}\; y \;=\!=\; z \;\text{—}\!\!\!\!\text{⊤}\; u$

$-x^3y \;\text{—}\!\!\!\!\text{⊤}\; x^4+bx^3+bccx+bbcc \;=\!=\; z \;\text{—}\!\!\!\!\text{⊤}\; u$

$zx^4+zbx^3+zbccx+zbbcc+ux^3y \infty 0.$

Hic nulli ſunt termini correſpondentes cum unus tantum ſit in quo y. Sed video facta diviſione per x^3, omnes terminos evadere puros, hoc eſt tales ut tantum habeant x vel y. Ergo hoc facto fit $zx+zb+\dfrac{zbcc}{xx}+\dfrac{zbbcc}{x^3}+uy \infty 0.$

Neque aliud hic requiritur, cum ex ſingulis hiſce terminis ſinguli deſcribantur æquationis curvæ. Nempe

$$\tfrac{1}{2}xx+bx-\frac{bcc}{x}-\tfrac{1}{2}\frac{bbcc}{xx}+\tfrac{1}{2}yy \infty 0.$$

Et hæc quidem curva ſatisfacit quæſito, quia dat ſubtangentem eandem datæ. Sed et alijs duabus curvis eadem conſtructio tangentis convenit, quia liberum eſt huic æquationi apponere terminum aliquem cognitum vel affirmativum vel negativum. ac ſi quidem adponatur $+\tfrac{1}{2}bb-\tfrac{1}{2}cc$, tunc demum æquatio oritur Conchoidis, nempe

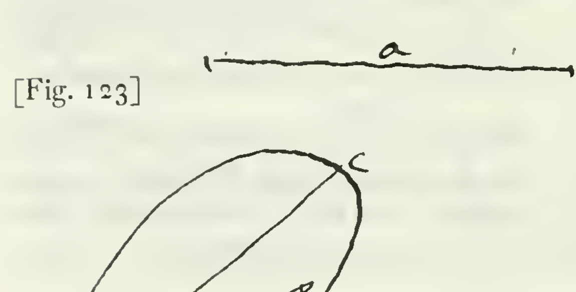
$$\tfrac{1}{2}xx+bx-\frac{bcc}{x}-\tfrac{1}{2}\frac{bbcc}{xx}+\tfrac{1}{2}yy+\tfrac{1}{2}bb-\tfrac{1}{2}cc \infty 0$$

ſive $x^4+2bx^3-2bccx+xxyy+bbxx-ccxx \infty$, nam hæc calculo facile invenitur.

Le cas de la conchoïde eſt le dernier des exemples de la méthode de Fatio que Huygens donne dans ſa lettre au Marquis de l'Hoſpital du 23 juillet 1693, citée auſſi au début du § 3 qui précède. De l'Hoſpital — voyez ce que nous diſons ſur lui à la fin de notre Avertiſſement — peut répondre (10 août 1693, T. X, p. 485) que pour lui ce cas eſt ſi ſimple „qu'il n'eſt beſoin d'aucune methode pour [le] reſoudre".

§ 25 [33]). AB [Fig. 123]. Curva cujus diameter AC, faciens angulum CAD 45 gr. AD ∞ x. BD ∞ y. a linea data. Æquatio curvæ [„folium Carteſii"] $x^3+y^3-xya \infty 0$. Divide per xy. $\dfrac{xx}{y}+\dfrac{yy}{x}-a \infty 0$. $\dfrac{-3y^3+xya}{3xx-ya}$ ſubtangens ſimplex. Subſtituto [in ſubtangente ſimplici] utrobique

[Fig. 123]



33) Manuscrit G, f. 112 v (p. 123 de Huygens).

valore ya qui eft $\frac{x^3 + y^3}{x}$ fit $\frac{x^4 - 2xy^3}{2x^3 - y^3}$ fubtangens implicita ex qua fit invenienda æquatio Curvæ.

$$\frac{x^4 - 2xy^3}{2x^3 - y^3} \text{ ——— } y \text{ ═══ } z \text{ ——— } u$$

$$x^4 - 2xy^3 \text{ ——— } 2x^3y - y^4 \text{ ═══ } z \text{ ——— } u$$

$$2x^3zy - zy^4 \text{ ——— } x^4u + 2xy^3u \infty 0$$ æquatio Tangentis.

♀ ⅄ ♀ ⅄

$x^g y^h$ tranfformator.

♀ $\varkappa . \lambda : 2. -1$

$g + 4 . h + 1 : 2. -1$

$\frac{-g-6}{2} \infty h$

⅄ $\varkappa . \lambda : -1. 2$

$g + 1 . h + 4 : -1. 2$

$\frac{2g + 2}{h} \infty -h - 4$

$h \infty -2g - 6$

Ergo

$-2g - 6 \infty \frac{-g-6}{2}$

$-2 \infty g$

Ergo $h \infty -2$

Terminus $2x^3zy$ tranfformatus $\frac{2x^3zy}{xxyy} \Big| \frac{2zx}{y}$. generator $\frac{xx}{y}$.

Terminus $-zy^4$ tranfformatus eft $\frac{-zyy}{xx}$. cujus generator $\frac{yy}{x}$.

Ergo termini æquationis $\frac{xx}{y} + \frac{yy}{x} - a \infty 0$. Æquatio Curvæ $x^3 + y^3 - xya \infty 0$. Nam terminus aliquis cognitus $-a$ neceffario addendus quia priores ambo habent $+$.

§ 26 [34]). Ici Huygens, fans abandonner tout-à-fait les z, u, commence, comme on voit, à fe fervir des notations dx, dy de Leibnitz dans le problème inverfe des tangentes: voyez ce que nous avons dit au début du § 3 fur les notations dx, dy et z, u. Dans fa lettre du 23 juillet 1693 au Marquis de l'Hofpital il écrit dx et dy dans toutes les équations différentielles.

$$\frac{2xdx}{y} - \frac{yydx}{xx} - \frac{xxdy}{yy} + \frac{2ydy}{x} \infty 0$$

$$2x^3ydx - y^4dx - x^4dy + 2xy^3dy \infty 0$$

$\frac{-3y^3 + xya}{3xx - ya}$ fubtangens fimplex paginæ præcedentis [§ 25].

$x^3 + y^3 - xya \infty 0$

$3y^3 \infty -3x^3 + 3xya.$

$\frac{+3x^3 - 2xya}{3xx - ya} \text{ ——— } y \text{ ——— } z \text{ ——— } u$

$3x^3u - 2xyau - 3yxxz + ay^2z \infty 0$ æquatio tangentis [apparemment intraitable dans cette forme].

[34]) Manuscrit G, f. 112 v et 113 r (p. 123 et 124 de Huygens).

§ 27 [35]). $y^4 - 8aayy + 16aaxx \infty 0$ æquatio curvæ pag 1 [36]).

Comparez le § 4 qui précède. La courbe eſt repréſentée à la p. 473 du T. IX.

Soutangente deguiſée $\dfrac{-yy+4xx}{2x}$ —— y —— z —— u

$$-yy+4xx \text{ —— } 2xy \text{ —— } z \text{ —— } u$$

$$-uyy+4xxu-2zxy \infty 0$$

$$\begin{array}{lccccc} \text{Transformator} & x^g y^h & \overset{\frown}{\varkappa} \text{ —— } & \overset{\lambda}{\lambda} \text{ —— } & \overset{\lambda}{-2} \text{ —— } & +4 \\ & & g+2 \text{ —— } & h+1 \text{ —— } & -2 \text{ —— } & +4 \\ \hline \end{array}$$

$$2g \infty -h-5$$

Sed g ∞ 0 quia ſi in transformatore eſſet x ullum, fieret terminus uyy impurus, hoc eſt haberet y et x.

$$h \infty -5 \qquad \text{et transformator } \frac{1}{y^5}$$

$$\frac{-u}{y^3}+\frac{4xxu}{y^5}-\frac{2zx}{y^4} \infty 0 \text{ æquatio transformata}$$

$\dfrac{-xx}{y^4}+\dfrac{2}{yy}$ [lisez $\dfrac{1}{2yy}$] $\pm\dfrac{1}{8aa} \infty 0$. additur $\pm\dfrac{1}{8aa}$ vel $\pm\dfrac{1}{aa}$ quia alias æquatio non deſignaret curvam aliquam [37]).

$-8aaxx+16aayy$ [lisez $4aayy$] $-y^4 \infty 0$

vel $0 \infty y^4 - 2aayy$ [lisez $-\frac{1}{2}aayy$] $+aaxx$, mea. $y^4+2aayy$ [lisez $+\frac{1}{2}aayy$] $-aaxx \infty 0$ altera.

---

§ 28 [38]). Subtangens curvæ pag. 2 [39]) $\dfrac{-2xxy+aax}{3aa-2xy}$ —— y —— dx —— dy

Comparez le § 3 qui précède. La courbe $xy^2-a^2y+x^3=0$ eſt repréſentée à la p. 474 du T. IX.

---

[35]) Manuscrit G, f. 113 r (p. 124 de Huygens).

[36]) Pag. 51 v de la numération générale, où il est question, comme à la page suivante (note 39), des soustangentes proposées à Leibniz en 1690 (hinc Leibnitſio curvæ naturam inquirendam propoſui in epiſtola 24 Aug. 1690). Comparez la p. 487 de l'Avertiſſement qui précède. Voyez auſſi ſur ces p. 1 et 2 de Huygens les p. 472—475 du T. IX.

[37]) Pour obtenir l'équation initiale avec la même constante a il faut écrire

$$\frac{-xx}{y^4}+\frac{1}{2y}-\frac{1}{16aa} \infty 0.$$

[38]) Manuscrit G, f. 113 v (p. 125 de Huygens).

[39]) Pag. 52 r de la pagination génerale.

$$-2xxy + aax - 3aay - 2xyy = dx - dy$$

[Transformator] $x^g y^h$ $\quad -2xxydy + aaxdy - 3aaydx + 2yyxdx \propto 0$ æquatio differentialis.

$$\frac{\kappa . \lambda : +2. -2}{\begin{array}{c} g+2 . h+2 - 2. -2 \\ \hline g \propto -h-4 \end{array}} \qquad \frac{\kappa . \lambda : -3. 1}{\begin{array}{c} g+1 . h+1 = -3 . 1 \\ \hline g \propto -4-3h \end{array}}$$

$g \propto -4$, $h \propto 0$, transformator $\frac{1}{x^4}$.

$$\frac{-yy}{xx} + \frac{aay}{x^3} \mp 1 \propto 0$$

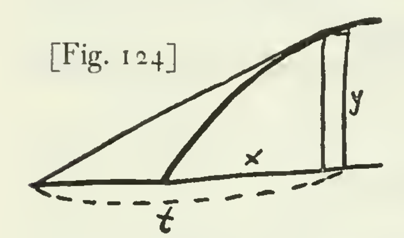
vel $\quad xyy - aay \mp x^3 \propto 0.$

IV

METHODUS LEIBNITIJ [1]).

Dec. 1691

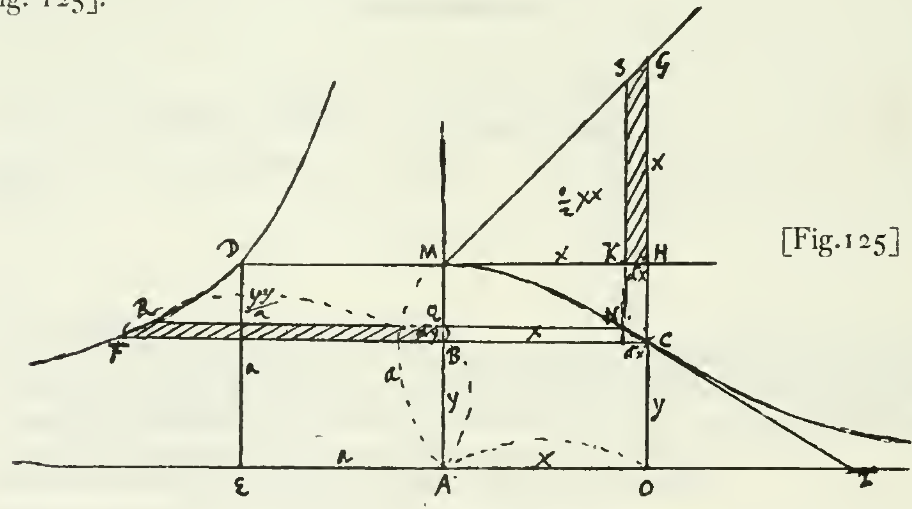
Huygens exécute quelques calculs en vue de sa réponse à Leibniz du 1 janvier 1692 (T. X, p. 221). Consultez aussi les notes que nous avons ajoutées à cette lettre.



[Fig. 124]

19 Dec. 1691. Methodus Leibnitij. qua ex data subtangente investigatur curva ei conveniens. Leibniz avait expliqué sa méthode et ses notations dans la lettre à Huygens d'octobre 1691 (T.X, p. 197).
$t : y :: d\bar{x} : d\bar{y}$ [Fig 124]. subtangens $t \propto y d\bar{x} : d\bar{y}$ sive $\frac{ydx}{dy}$ formula generalis. $d\bar{x}$ vel dx significat Leibnitio incrementum lineæ x sive differentiolam duarum inæqualium proximarum x. $d\bar{y}$ vel dy similiter incrementum lineæ y . $aa : y$ significat $\frac{aa}{y}$.

Sit $t \propto 1 : x$ sive $\frac{aa}{x}$ subtangens data. Poterat pro aa esse ab. MC est curva [Fig. 125].



[Fig. 125]

[1]) Manuscrit H, p. 8 (ce manuscrit n'a pas d'autre numération que celle de Huygens). Cette page a été citée dans les notes 5 de la p. 222 et 18 de la p. 247 du T. X.

CO applicata ejus, AO abſciſſa. CT tangens in C. AO ꝏ x. OC ꝏ y. a linea data. OT ꝏ t ſubtangens, ſemper eſt $\frac{aa}{x}$. Quæritur natura ac conſtructio curvæ MC.

$$\frac{aa}{x} \text{ ꝏ } y\overline{dx} : \overline{dy}$$

$$aa\overline{dy} : y \text{ ꝏ } x\overline{dx}$$

$$\int \overline{aa\overline{dy} : y} \text{ ꝏ } \int \overline{x\overline{dx}} \text{ ꝏ } \tfrac{1}{2}xx.$$

$\frac{aa}{x}$ —— y —— dx —— dy

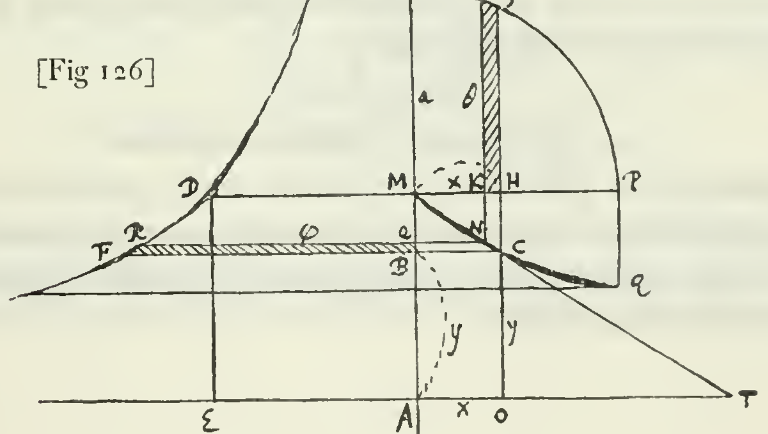
$\frac{aa}{x}$ ꝏ $\frac{ydx}{dy}$

$\frac{aady}{y}$ ꝏ xdx

Hic [Fig. 125] $\int \overline{aa\overline{dy} : y}$ ſeu ſumma omnium $\frac{aa\overline{dy}}{y}$ eſt ſpatium hyperbolicum ut FBMD. Nam ut y ad a, hoc eſt ut AB ad AM, ita a ſive MD ad BF ꝏ $\frac{aa}{y}$ quæ ducta in BQ ꝏ $\overline{dy}$, hoc eſt, in differentiolam τῶν y, facit ſpatiolum BR ꝏ $\frac{aa\overline{dy}}{y}$ quod æquale ſpatiolo HS ꝏ $x\overline{dx}$. unde et ſummæ $\int \overline{\frac{aady}{y}}$ ꝏ $\int xdx$ ſive $\frac{1}{2}xx$. Hic jam ſubtangens OT ꝏ $\frac{aa}{x}$.

DF eſt hyperbola ad aſymptotos AM, AE, cujus quadratum AMDE. MG facit angulum GMH dimidium recti. Jam ducta GHC parallela MA, oportet in ea punctum curvæ C ita ſitum eſſe ut ducta CBF parallela AO, fiat ſpatium hyperbolicum BFDM æquale ſpatio ſeu triangulo GHM. Si ergo poſſim triangulo GHM abſcindere æquale ſpatium hyperbolicum BFDM, hoc eſt ſi detur quadratura hyperbolæ, potero conſtruere curvam MC. Poterat et FBC prima duci, in qua punctum C ita accipiendum ut ducta CG fiat triangulum GMH æquale ſpatio BFDM.

Si ſubtangens t ꝏ $1 : \sqrt{1 - xx}$ hoc eſt ſi t ꝏ $\frac{aa}{\sqrt{aa - xx}}$ [Fig. 126]



$$\frac{aa}{\sqrt{aa-xx}} \infty y\overline{dx} : \overline{dy}$$

$$aa\overline{dy} : y \infty \overline{dx} : \sqrt{aa-xx}$$

$$\int \overline{aady : y} \infty \int \overline{dx\sqrt{aa-xx}}$$

Hæc curva MC conſtrui poterit datis quadraturis Hyperbolæ et Circuli. Oportet enim punctum ejus quodlibet C ita eſſe poſitum ut ductis CF, CG, ſpatium hyperbolicum MDFB fiat æquale ſpatio circulari MLGH. Et ſemper adeo ſpatiolum BR æquale ſpatiolo HS; hoc eſt $aa\overline{dy} : y \infty \overline{dx}\sqrt{aa-xx}$. Jam erit ſubtangens OT ſive $t \infty \frac{aa}{\sqrt{aa-xx}}$. Patet $aa\overline{dy} : y$, ut in ſuperiori exemplo, eſſe ſpatiolum BR hyperbolicum; et $\overline{dx}\sqrt{aa-xx}$ eſſe ſpatiolum circulare HS.

Locus eſt methodo huic ut ait Leibnitius, quandocunque quantitas ſubtangentem datam conſtituens oritur ex ductu vel diviſione quantitatum quæ præter datas quantitates tantum x vel y habent, non utrumque ſimul. Sic ſubtangens $\frac{aa}{\sqrt{aa-yy}}$ non admittitur. nec $\frac{ax+yy}{b}$; nec $\frac{ax+yy}{a}$. quæ poſtrema Fatij methodum admittit. eſtque ſubtangens parabolæ.

Methodus hæc in eo poſita eſt, ut ad æquationem perveniatur in qua ex una parte non habeatur niſi x et dx; ex altera non niſi y et dy, præter quantitates cognitas, nec ſuccedit niſi cum hoc fieri poteſt; cum vero poteſt, deducitur problema ad quadraturas.

Il eſt vrai que Leibnitz n'avait pas fait connaître ſa méthode en entier; voyez les p. 224 et 227 du T. X.

Nous empruntons encore à la p. 9 du Manuſcrit H ce qui ſe rapporte à la logarithmique.

$t \infty y\overline{dx} : dy$ formula generalis. Ergo $\overline{dx} \infty \overline{dy}\, t : y$ formula cum t datur per y, vel cum $t \infty a$. Sit $t \infty a$, ſemper ſubtangens data [comparez le § 18 qui précède].

$\overline{dx} \infty \overline{dy}a : y$ ſive $a\overline{dx} \infty aa\overline{dy} : y$. Hic altero a multiplicavi ut fieret $\int \overline{aa\overline{dy} : y}$ ſpatium hyperbolicum. Poterat et per b pro a.

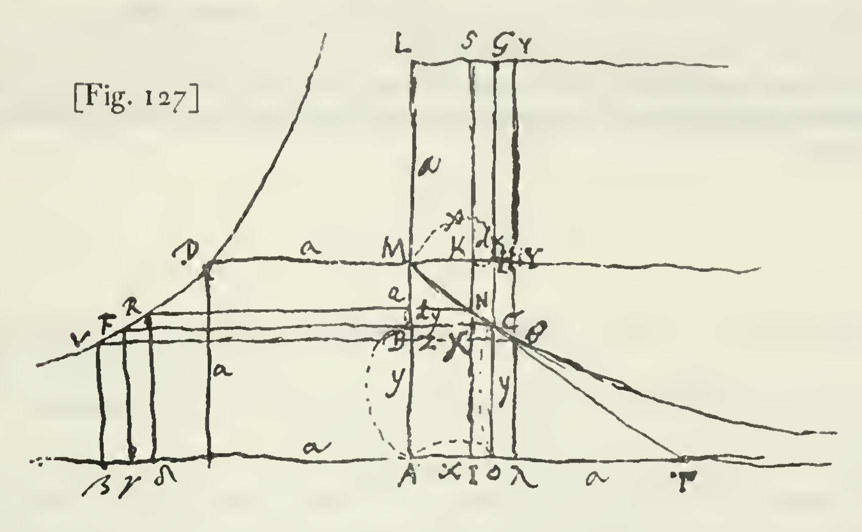
$$\int \overline{a\overline{dx}} \infty \int \overline{aa\overline{dy} : y}$$

rectangulum ſpatium hyperbolicum

Ad æquationem $x \infty \int \overline{\overline{dy}a : y}$ producit Leibnitius. ex qua obſcura adhuc manet curvæ conſtructio. Imo ne a quidem adſumit, ſed ponit $t \infty 1$, unde ipſi æqualis $x \infty \int \overline{\overline{dy} : y}$. Unde concludit curvam quæſitam pendere à quadratura hyperbolæ quod plane obſcurum eſt unde conſtet.

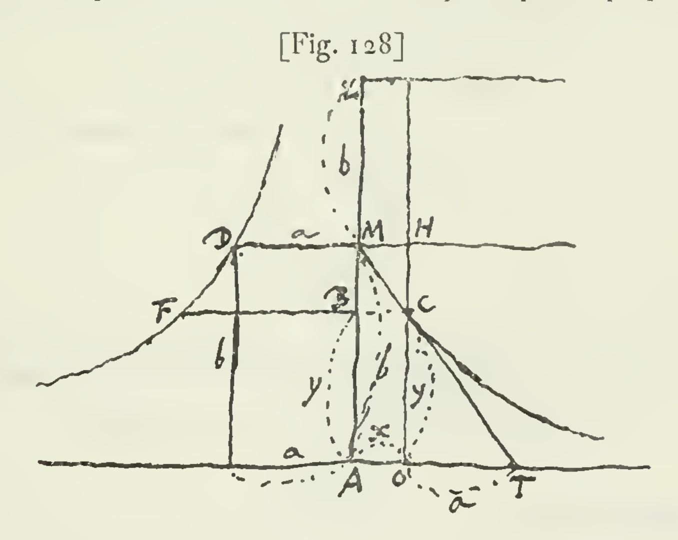
Hæc curva MC [Fig. 127], quæ eſt Logarithmica, conſtrui poterit data quadratura hyperbolæ. Oportet enim ejus punctum quodlibet C ita eſſe poſitum ut ductis

[Fig. 127]



CF, CG, ſpatium hyperbolicum MDFB, æquetur rectangulo HL, adeoque ſemper ſpatiolum BR rectangulo minimo HS. Hoc eſt ſemper $aady : y \infty adx$. Unde patet ſi æqualia ſint ſpatiola BR, ZF, etiam æqualia debere eſſe ſpatiola KG, GY, ideoque et lineolas IO, Oλ. Spatiola autem BR, ZF ſunt æqualia quando proportionales ſunt

[Fig. 128]



RQ, FB, VZ; tumque etiam proportionales ſiunt Rδ, Fγ, Vβ, hoc eſt NI, CO, θλ. Ergo ea eſt natura curvæ MCθ, ut ſi NI, CO, θλ proportionales ſint, ſimul rectæ IO, Oλ ſint æquales. quam ſcimus eſſe proprietatem Logarithmicæ, cujus aſymptotos AT.

Et hujus quidem ſubtangens, ut OT, ſemper fiet æqualis a. Angulus quem curva facit ad MA eſt ſemirectus. Quod aliter fuiſſet [Fig. 128] ſi multiplicaſſem utrimque per b. unde $bd\overline{x} \infty bad\overline{y} : y$. Tunc enim rectangulum hyperbolæ fuiſſet ab et curva MC exiſſet à termino rectæ b, ſi hæc in aſymptoto AL accepta fuiſſet, ut in hac figura.

NB. Poteſt quidem hæc Curva Logarithmica per puncta quotlibet conſtrui abſque quadratura Hyperbolæ, ſed non ita ut ſubtangentem habeat datæ huic æqualem, quod hic fecimus.

V.

À PROPOS DE LA MÉTHODE DU MARQUIS DE L'HOSPITAL [1]).

1692

Huygens prépare sa réponse à de l'Hospital du 22 octobre 1692 (T. X, p. 325). Voyez les notes que nous avons ajoutées à cette lettre.

§ 1. Comment il a pu trouver qu'à la soutangente $\frac{y\sqrt{aa+yy}}{a}$ appartenoit la courbe $2yzz \infty aay + 2aaz\sqrt{2}$? J'ay eu de la peine a prouver que cela est ainsi. Je le prouve en tirant de cette courbe la soutangente par la regle des Tangentes, vient $\frac{4yzz - aaz\sqrt{2}}{2zz - aa}$, qui doit estre la mesme que $\frac{y\sqrt{aa+yy}}{a}$. Ce que je trouve estre ainsi, en substituant 3 fois des valeurs, suivant l'équation donnée de la courbe. Une autre preuve est icy a cette page:

$$\frac{-2zzy + aay + 2aaz\sqrt{2} \infty 0}{-2zz + aa + \frac{2aaz\sqrt{2}}{y} \infty 0} \qquad \text{per } y$$

Subtangens ex regula post divisionem per y

$$\frac{+4zz - \frac{2aaz\sqrt{2}}{y}}{\frac{+2aaz\sqrt{2}}{yy}}$$

$$\frac{+2zyy - aay\sqrt{2}}{+aa\sqrt{2}} \text{ Subst. valorem } z \infty \frac{aa\sqrt{2} + \sqrt{2}\,a\sqrt{aa+yy}}{2y}$$

$$\frac{+yaa\sqrt{2} + \sqrt{2}\,a\,y\sqrt{aa+yy} - aay\sqrt{2}}{+aa\sqrt{2}}$$

$$\frac{y\sqrt{aa+yy}}{a} \qquad \text{subtangens implicita.}$$

[1]) Manuscrit H, p. 103.

On peut dans la conſtruction mettre $z \infty \dfrac{ay}{\sqrt{2aa + 2yy} - \sqrt{2aa}}$.

Huygens a trouvé cette valeur en égalant deux expreſſions de la ſouſtangente: $\dfrac{y\sqrt{aa + yy}}{a} \infty \dfrac{4yzz - 2aaz\sqrt{2}}{2zz - aa}$ tout en ayant auſſi égard à l'équation de la courbe $2yzz \infty aay + 2aaz\sqrt{2}$. Vérification de cette valeur de z:

$$\sqrt{2aa + 2yy} \infty \frac{ay}{z} + \sqrt{2aa}$$

$$2aa + 2yy \infty \frac{aayy}{zz} + \frac{2ay\sqrt{2aa}}{z} + 2aa$$

$$2zzyy \infty aayy + 2aazy\sqrt{2}$$

$$2zzy \infty aay + 2aaz\sqrt{2}$$ eadem quæ illius.

§ 2. Conſtruction de Mr. le Marquis de l'Hoſpital pour trouver la longueur d'une partie donnée de la ligne Logarithmique.

En marge: Cette conſtruction ſuppoſe qu'on ſache la ſoutangente generale de la Logarithmique, qu'on ne ſcauroit trouver. Et pour decrire cette courbe qui conviene a une ſoutangente donnée, on ne le peut qu'en ſuppoſant la quadrature de l'hyperbole.

Soit la Courbe Logarithmique indefinie ABCD [Fig. 129], qui a pour aſymptote la droite TE. D'un point quelconque E de cette aſymptote ayant menè la perpendiculaire EL, ſoit decrite la courbe Geometrique HI, dont la nature ſoit exprimée par cette Equation (EF ou EG ∞ y. FI ou HG ∞ z)

$$\frac{aa\sqrt{2} + a\sqrt{2aa + 2yy}}{2y} \infty z.$$

[Fig. 129]

Cette figure eſt une copie, avec quelques additions, de celle de l'Hoſpital (T. X, p. 314).

Ou, en oſtant les incommenſurables, $aay + 2aaz\sqrt{2} \propto 2yzz$. Que l'on mene à preſent deux paralleles quelconques AFI, BGH à l'aſymptote TE. Et ayant pris TE ∞ a, parametre ou ſoutangente; EL ∞ FI; EK ∞ GH; et menè les droites TG, TF, et les paralleles LD, KC qui rencontrent la Logarithmique aux points D, C; je dis que la portion AB de cette Logarithmique eſt egale à TG — TF + LD — KC.

Demonſtration. Ayant pris l'arc BM infiniment petit, et menè MO parallele à BH, l'on nommera, comme fait Monſ[r]. Leibnitz, BN ou HP, $d\bar{y}$; MN $d\bar{x}$: et l'on aura par la proprietè de la Logarithmique $dx \propto \frac{ady}{y}$, d'où l'on tire BM ou $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ $\propto \frac{dy\sqrt{aa+yy}}{y} \propto \frac{aady + yydy}{y\sqrt{aa+yy}}$: or il eſt clair que la ſomme des $\frac{ydy}{\sqrt{aa+yy}}$ dans la portion AB ∞ TG — TF. de ſorte qu'il ne reſte plus qu'a demontrer, que la ſomme des $\frac{aady}{y\sqrt{aa+yy}}$ ∞ LD — KC: ce que je prouve ainſi. Soit priſe KQ ∞ OP, et ſoit menée QS. l'on trouvera par la Methode des Tangentes de Barrou ou de M[r]. Leibnitz, que OP ou KQ $\propto \frac{a^3dy\sqrt{2} + aady\sqrt{2aa+2yy}}{2yy\sqrt{aa+yy}}$. Or par la proprietè de la Logarithmique RS $\propto \frac{a \text{ in } KQ}{EK} \propto \frac{aady}{y\sqrt{aa+yy}}$. Donc la ſomme des RS c'eſt à dire LD — KC ∞ à la ſomme des $\frac{aady}{y\sqrt{aa+yy}}$ dans la portion AB. Donc &c.

Ayant examinè cette Conſtruction et Demonſtration, je les ay trouvè bonnes, et l'invention admirablement belle et ſubtile. Voir pag. 99, 100, 101, 102, 103, item 160[3]) ou eſt ma ſolution. Il aura trouvè que la conſtruction de la courbe dont $\frac{zy\sqrt{aa+yy}}{aa}$ eſt ſoutangente, dependoit de la quadrature de l'hyperbole, et qu'ainſi on la peut conſtruire par le moien de la Logarithmique. Or elle ſera reduite a la quadrature de l'hyperbole, ſi la quadrature de la courbe $\theta\theta xxaa + \theta\theta x^4 \propto a^6$ ſe reduit a celle de l'hyperbole.

En marge: Au lieu de dy je mets λ, au lieu de dx je mets $\varkappa$, ce qui eſt plus commode. Comparez à la p. 509 qui précède le § 1 ter de la Pièce III (theorema Barrovij).

En marge: Notez que parce que ET ∞ a, il ſ'en ſuit que GT eſt parallele a celle qui toucheroit la courbe en B, et qu'ainſi Gβ eſt egale et parallele à BM. d'ou il

[3]) Ce sont toutes des pages du Manuscrit H. Les p. 99 et 101 ont été citées respectivement aux p. 325 et 327 du T. X, et la p. 160 (solution définitive du problème de la rectification de la logarithmique) y a été publiée aux p. 358—360.

paroit que menant $\delta\theta$ perpendiculaire fur $G\beta$, fa partie $G\theta$ fera $\frac{ydy}{\sqrt{aa+yy}}$. Et on voit aifement que la fomme de toutes cellecy fera ∞ TG — TF.

Voyez en outre fur la rectification de la logarithmique l'article de Huygens publié dans la livraifon de février 1693 de l',,Hiftoire de Ouvrages des Sçavans'' (T. X, No. 2793, à la p. 407) que nous citons auffi à la fin de la Pièce VI qui fuit.

VI.

LE PROBLÈME DE LA CHAÎNETTE, ETC.

1691 et 1693

Nous avons publié dans les Tomes IX et X — voyez e.a. ce qui a été dit à la p. 500 (note 3) du T. IX d'un article de 1900—1901 de D. J. Korteweg — un grand nombre de passages, tirés des manuscrits, sur le problème de la chaînette; on peut consulter là-dessus, outre les Tables des „matières traitées" de ces deux Tomes, le § 7 de la p. 513 qui précède et la Table à la fin du présent Tome qui donne la liste des pages des Manuscrits F, G, H et I utilisées dans les Tomes IX et X.

Parmi ces Pièces on trouve au T. X les deux articles suivants de Huygens publiés par lui-même.

T. X, p. 95, No. 2681: Clarissimis et Eruditione conspicuis viris Actorum Eruditorum auctoribus Lipsiæ, Hagæ Comitum 5 Maj. 1691, lettre imprimée dans la livraison de juin 1691 (p. 281—282) des „Acta Eruditorum" sous le titre Christiani Hugenii, Dynastæ in Zulechem [4]) solutio ejusdem problematis.

T. X, p. 407, No. 2793: Lettre à H. Basnage de Beauval, imprimée au mois de février (p. 244—257) dans le fascicule de décembre 1692, janvier et février 1693 de l'„Histoire des Ouvrages des Sçavans". Cette lettre ne traite d'ailleurs pas exclusivement de la chaînette, mais aussi de la tractrice, de la rectification de la courbe logarithmique (comparez la fin de la Pièce V qui précède) et de la quadrature du „folium Cartesii".

[4]) Ceci est une erreur de la rédaction des Acta Eruditorum. En 1687, après la mort de son père Constantyn, Huygens avait échangé le titre de Seigneur de Zuylichem contre celui de Seigneur de Zeelhem. Il attire lui-même l'attention sur cette erreur dans une letrre de 1691 (T. X, p. 134).

VII.

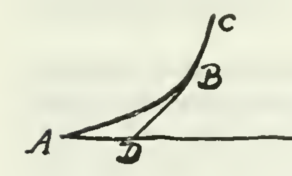
SOLUTION D'UN PROBLÈME MATHÉMATIQUE PROPOSÉ PAR JEAN BERNOULLI.

[Sept. 1693]

T. X, p. 512, No 2823: C. H. Z. de Problemate Bernouliano in actis Lipſienſibus hujus anni pag. 235 propoſito, article publié dans les „Acta Eruditorum" d'octobre 1693.

Il s'agit du problème formulé comme ſuit par de l'Hoſpital (T. X, p. 454): „La courbe ABC [Fig. 130] a une proprieté telle, que chacune de ſes touchantes BD eſt toujours à la partie AD de l'axe priſe entre ſon origine A et la rencontre D de la touchante, en raiſon de p à q. On demande la nature de cette ligne ou la maniere de la decrire".

[Fig. 130].



Voyez dans le T. X, outre le No. 2823, le No. 2821, où nous avons publié les calculs de Huygens du Manuſcrit I qui ſe rapportent à ce problème.

[Sept. 1694]

L'article No. 2875 de la p. 673 du T. X: C. H. Z. Conſtructio univerſalis Problematis a Clariſſimo Viro, Jo. Bernoulio, ſuperiori anno menſe Majo propoſiti, publié en ſeptembre 1694 dans les „Acta Eruditorum", ſe rapporte au même ſujet [1]).

[1]) Il en eſt de même de la lettre du 1 octobre 1693 de Huygens à de l'Hoſpital (T. X, p. 534, No. 2828).

L' article de ſeptembre 1694 eſt immédiatement ſuivi dans les Acta Eruditorum par une courte Pièce tirée par Leibniz d'une lettre de Huygens. Elle se rapporte à la courbure des voiles d'un vaisseau d'après Jacques Bernoulli et eſt intitulée Excerpta ex epiſtola C. H. Z. ad G. G. L. (T. X, No. 2874).

VIII.

A PROPOS DES „REFLECTIONS UPON ANCIENT AND MODERN LEARNING" DE 1694 DE W. WOTTON.

[1694 ou 1695] [1])

Reflexions upon Ancient and Modern Learning. by Will. Wotton. at the fign of the Tempel [fic], near the Inner-Temple-Gate, in Fleetftreet. 94.

Il y a un difcours inferè de M. Edmond Halleij. of Ancient and Modern Aftronomy and Optics. Il appelle les quarts de Cercle avec des verres de lunette Inftruments of the production of Grefhams: Il ne parle point des nouveaux ni vieux Satellites. Il loue M. Newton. Sr. Paul Neile [2]). φιλόπατρις comme tous les Anglois.

Il y a auffi un difcours de Mr. John Craige [3]) touchant l'Arithmetique et Geometrie. Il loue Newton Leibniz, moy et autres: Il dit que des Cartes n'a pas compris l'intention des anciens dans le Probleme de Pappus, et que Newton l'a refolu comme il faut.

Il eftime grandement la methode de Cavallerius qui a mon avis n'eft pas une methode de demontrer, mais de montrer qu'on peut former une demonftration [4]). Et Archimede ne l'a pas ignoree [5]), comme dit auffi Wallis [6]).

---

[1]) Manuscrit I, p. 130 (le manuscrit n'a pas d'autre pagination que celle de Huygens). La p. 131 porte la date du 29 janvier 1695 (voyez sur cette page la p. 338 du T. XIX).
C'est une des dernières pages que Huygens ait écrites, du moins dans le Manuscrit I. Les p. 132—134 traitent d'un sujet astronomique, le reste du Manuscrit est en blanc.

[2]) Voyez e.a. sur Neile astronome quelques pages de notre T. XV, sur Neile mathématicien la note 1 de la p. 210 du T. XVIII.

[3]) On peut voir dans notre T. X que Huygens connaissait les œuvres mathématiques de Craig ou Craige qui avaient vu le jour en 1685 et 1693.

[4]) Nous avons relevé ce passage à la p. 479 de l'Avertissement. Voyez aussi sur les „démonstrations", c. à. d. les „démonstrations formelles", les notes 31 des p. 181—182 et 104 de la p. 215 qui précèdent. Nous y renvoyons e. a. à la p. 337 du T. XIV.

[5]) Voyez encore sur ce sujet la sentence de Huygens, datant sans doute de 1659, que nous avons publiée à la p. 286 du T. XVII en l'intitulant: „Remarque générale sur le calcul de la grandeur d'une ligne, d'une surface ou d'un volume en partant p. e. de la considération de la pesanteur:

L'autheur montre qu'il eſt ſavant en anatomie et raporte toutes les nouuelles decouvertes par le menu.

Dans ſa dernière lettre, celle du 4 mars 1695, à ſon frère Conſtantyn (ſe trouvant en ce temps à Londres en ſa qualité de ſecrétaire du roi Guillaume), Huygens recommande la lecture du livre de Wotton.

---

méthode d'Archimède". Nous rappelons que le manuscrit de la Méthode d'Archimède (voyez e. a. sur cet écrit la p. 178 qui précède) n'a été découvert qu'au début de notre, c. à. d. du vingtième, siècle; mais l'application de cette méthode au cas de la parabole dont Huygens parle à la p. 286 du T. XVII (application à laquelle Archimède avait donné la forme d'une démonstration rigoureuse) faisait partie des œuvres connues du géomètre grec; or, la connaissance de ce seul cas a permis à quelques mathématiciens du dix-septième siècle d'appliquer cette méthode infinitésimale à d'autres problèmes: voyez, aux p. 298 et 299 de notre T. XI, faisant partie des „Theoremata (de Huygens de 1651) de Quadratura hyperboles, ellipsis et circuli ex dato portionum gravitatis centro", les figures où des segments d'hyperbole ou d'ellipse sont attachés à des fléaux de balances fictives et tenus en équilibre par des triangles.

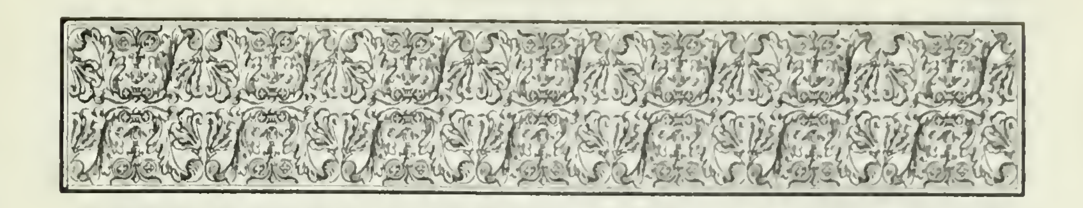
[6]) Dans la „Dedicatio" à W. Oughtred de son „Arithmetica infinitorum" de 1655 Wallis écrit: „Ineunte anno 1650 incidi in Torricellii scripta Mathematica .. ubi inter alia Cavallerii *Geometriam Indivisibilium* exponit .. visum erat mihi .. eo spectare non pauca quæ apud .. Archimedem passim exstant ... Et quidem si unius Parabolæ quadratura Archimedem tantum nobilitaverit .. gratum illud orbi Mathematico futurum satis præsensi, si etiam ejusmodi figurarum infinita genera quadranda docerem". Etc.

Dans une lettre à Leibniz du 16 janvier 1699 („Opera math." III, 1699, p. 693) Wallis écrira: „Quod tuus *Calculus Differentialis* multa habet cum aliorum sensis communia, etiam ipsius *Archimedis*; tu (pro candore tuo) libere profiteris: Non tamen est inde minus æstimandus. Nam multa sunt, quorum prima fundamenta fuerint Veteribus non ignota; ita tamen intricata & difficultatis plena, ut sint ea nostra ætate reddita multo dilucidiora & usibus aptiora".

Nous saisissons cette occasion pour rappeler — puisque les logarithmes jouent un assez grand rôle dans le présent Tome — que les mérites de Torricelli ressortent aussi de l'article de 1900 de G. Loria „Le ricerche inedite di Evangelista Torricelli sopra la curva logarithmica" que nous avons cité à la p. 441 du T. XIV; nous ajoutons qu'on trouve le nom de Cavalieri, en même temps que ceux de Galilée et de Neper, à la p. 82 du T. XIX où il est question (p. 82 et 83) de la courbe logarithmique et de ce que nous avons appelé la „méthode des fluxions" de Huygens de 1668.



RÈGLES DE L'ACCOMPAGNEMENT



Avertiſſement.

Un an après la mort de ſon père que eut lieu pendant le ſéjour de 1686—1687 de Fatio de Duillier en Hollande, Huygens fixa ſa réſidence à Hofwyck près de la Haye[1]). C'eſt là ſans doute qu'il rédigea définitivement le Traité de la Lumière [2]) et le Discours de la Cauſe de la Peſanteur et qu'il exécuta la plupart des calculs des 7 ou 8 dernières années de ſa vie ſur la dioptrique [3]), le mouvement périodique des horloges [4]) et la géométrie infinitéſimale [5]).

Nous aimons à croire qu'il ne ſe borna pas, en fait de muſique, à écrire le Nouveau Cycle Harmonique ainſi que d'autres pièces théoriques [5]) mais qu'il continua auſſi à pratiquer lui-même ce noble art [6]) et peut-être à chanter comme il l'avait fait dans ſa jeuneſſe [7]).

---

[1]) Voyez sa lettre de mai 1688 à son frère Constantyn (T. IX, p. 295).
[2]) T. XIX.
[3]) T. XIII.
[4]) T. XVIII, p. 546—596. Sur l'origine des recherches sur les mouvements oscillatoires on peut consulter e. a. le dernier alinéa de la p. 486 du T. XVIII et la p. 357 du T. XIX.
[5]) Présent Tome.
[6]) Voyez e. a. les p. 104 et 161 qui précèdent.
[7]) Voyez la p. 356 du T. XIX.

Fondée par fon père en 1640, la maifon de campagne Hofwyck avait été de tout temps un temple de mufique. On y entendait fréquemment le fon des violes, des efpinettes et des luths, celui du clavecin, des théorbes et des guitares. Nous terminons ce volume par la publication des dernières feuilles — non datées il eft vrai — du portefeuille „Mufica", nous figurant que c'eft à Hofwyck que Huygens les rédigea.

RÈGLES DE L'ACCOMPAGNEMENT [1]).

1. La main droite doit tousjours [corrigé au crayon en: d'ordinaire] faire 3 parties [ajouté au crayon: et quelques fois quatre].
2. Il ne faut pas faire la 5 de la main gauche sans adjouter la tierce.
3. Dans les basses fort basses on ne fait point d'accord de la main gauche que l'octave seulement.
4. On monte rarement plus haut que le dernier mi.
5. Il ne faut pas escarter beaucoup la main droite de la gauche [ajouté au crayon: en accompagnant].
6. Quand le chant monte haut, il est bon d'accompagner vers le haut du clavier.
7. Il ne faut pas lever les deux mains a la fois pour reprendre plus haut, mais faire demeurer la basse pendant que la main droite prend le mesme accord, qu'elle faisoit, à un endroit plus haut. car chaque accord se prend en 3 differentes manieres de la main droite.
8. D'ordinaire il faut accompagner la basse de la 5e et 3e.
9. Seulement sur un mi ou ci ou sur une dièse la 6e et 3e d'ordinaire est meilleure mais quand il y a un ♮ marquè au dessus c'est signe qu'il faut l'accompagner de la 5 et 3.
10. Quand on fait la 6e il n'est pas bon de redoubler l'octave de la basse en bas sur tout au second temps de la mesme 6e. Il faut remplir avec la main gauche les parties vuides vers en haut, et frapper la 3e ou la 6e pres de la basse pour le second temps.

---

1) Dernières feuilles du Portef. „Musica". Nous publions les règles — en leur donnant le titre „Règles de l'accompagnement" — dans l'ordre indiqué par les chiffres de Huygens. Nous y ajoutons le facsimilé d'une autre feuille du Portef. „Musica". On y lit: Accords parfaits, sçavoir de quinte et tierce, et imparfaits de 4 et 6e, avec leurs agreements. Ils se font de trois manieres, et en montant plus haut sur le clavier on fait les repetitions de ces 3 manieres. Comme ces accords sont icy sur ut de la basse, ils se font de mesme sur ro, mi, fa, sol, la, ça. — Cadences en 4 temps avec leurs agreements.
Agreements = Cieraden (p. 69, note 9). Voyez sur le „nom particulier" qu'on peut donner „a chacun des 12 tons de l'octave" les p. 129 et 167 qui précèdent.

10 [bis]. Sur un ci il ne faut pas que le deſſus face l'octave mais il faut l'accompagner de la 6 et 3 [corrigé au crayon en: . . l'octave quand on l'accompagne de la 6 mineure].
11. Devant l'octave il faut preſque tousjours que la 6ᵉ ſoit majeure.
12. La fauſſe quinte [2]) s'accompagne de la 6 mineure et de la 3.
13. Le triton [2]) s'accompagne de la 6ᵉ majeure et 2ᵉ majeure.
14. La 7ᵉ s'accompagne de la 5 et 3 majeure ou mineure, quelque fois de la 10 et 8 ſeulement exceptè ſur ut ou fa au ton naturel [ajouté au crayon: ou l'octave ne peut pas eſtre].

[Le bout de phraſe: „exceptè etc." a été ajouté plus tard en remplacement de quelques autres mots biffés [3]). A la fin Huygens a ajouté encore au crayon: on doit omettre la 5].

15. La 2ᵉ doit eſtre accompagnée de la 4 et 5 [ajouté au crayon: ou de la 4 et 6 majeure. et la 2ᵉ ſe peut redoubler [corrigé au crayon en: ſe redouble(r) d'ordinaire]. la note d'apres deſcend d'ordinaire d'un demiton et les touches de la 4 et 5 precedente font contre cette derniere baſſe la 6 et 5.
16. [Alinéa biffé au crayon]. Dans la 7ᵉ majeure, c'eſt a dire qui ſe fait ſur fa ou ut dans le ton naturel l'on ne redouble point l'octave, et ainſi il faut l'accompagner de la 3ᵉ majeure et 9ᵉ ou de la 5 et 3 ſeulement.
17. Quand la baſſe va deſcendre d'un ſemiton, et à un accord parfait comme aux cadences, il n'y faut point d'8ᵉ.

On fait ces cadences en faiſant la 7ᵉ et puis la 6 contre la premiere note de la baſſe. [Les mots: „6 contre . . . . la baſſe" ont été biffés au crayon et remplacés par le ſeul mot „ſauve" (?)] Ou en ſauvant la 7 au deſſus [ajouté au crayon, en remplacement de quelques mots biffés: et alors] au lieu d'octave, on adjoute la fauſſe quarte [corrigé au crayon en: adjoute le triton]. [Biffé au crayon: aux autres cas on redouble la 3, ou la 6.] Mais quand la note de baſſe a la quelle on descend ſera accompagnee de la 6ᵉ, alors l'on peut [corrigé au crayon en: doit] faire l'octave dans l'accompagnement de celle qui precede.

18. Quand le deſſus fait la 3ᵉ ou la 6ᵉ contre la baſſe, les deux mains peuvent [ajouté au crayon: quelques fois] monter enſemble. Et quoyque les parties du milieu ſemblent faire 2 octaves ou 2 quintes, elles n'en font pas, parce qu'elles ſe croiſent. mais le deſſus contre la baſſe ne doit jamais faire 2 octaves ni 2 quintes, parce qu'on ne peut pas faire monter aucune partie plus haut que le deſſus, ni deſcendre au deſſous de la baſſe [le dernier bout de phraſe: „parce qu'on . . . . la baſſe" a été biffé au crayon].
19. Sur la 7 mineure l'on redouble l'octave de la baſſe, mais non pas ſur la 7 majeure.
19.1. L'on ne redouble jamais la 7ᵉ.

---

[2]) Sur la fausse quinte et le triton on peut consulter e. a. la note 1 de la p. 165 qui précède.

[3]) Après le mot „ſeulement" Huygens avait d'abord écrit: quelque fois de la 3 maj. et 9ᵉ, exceptè ſur mi ou ci, dans le ton naturel.

20. Sur une diese qui ne fait qu'un temps et dont on monte a la note prochaine, il est presque tousjours bon de faire la fausse quinte.

20.1. On ne redouble pas la basse quand c'est une feinte. pour le second temps quand la basse est une feinte ou un ci on fait la fausse quinte de la main droite.

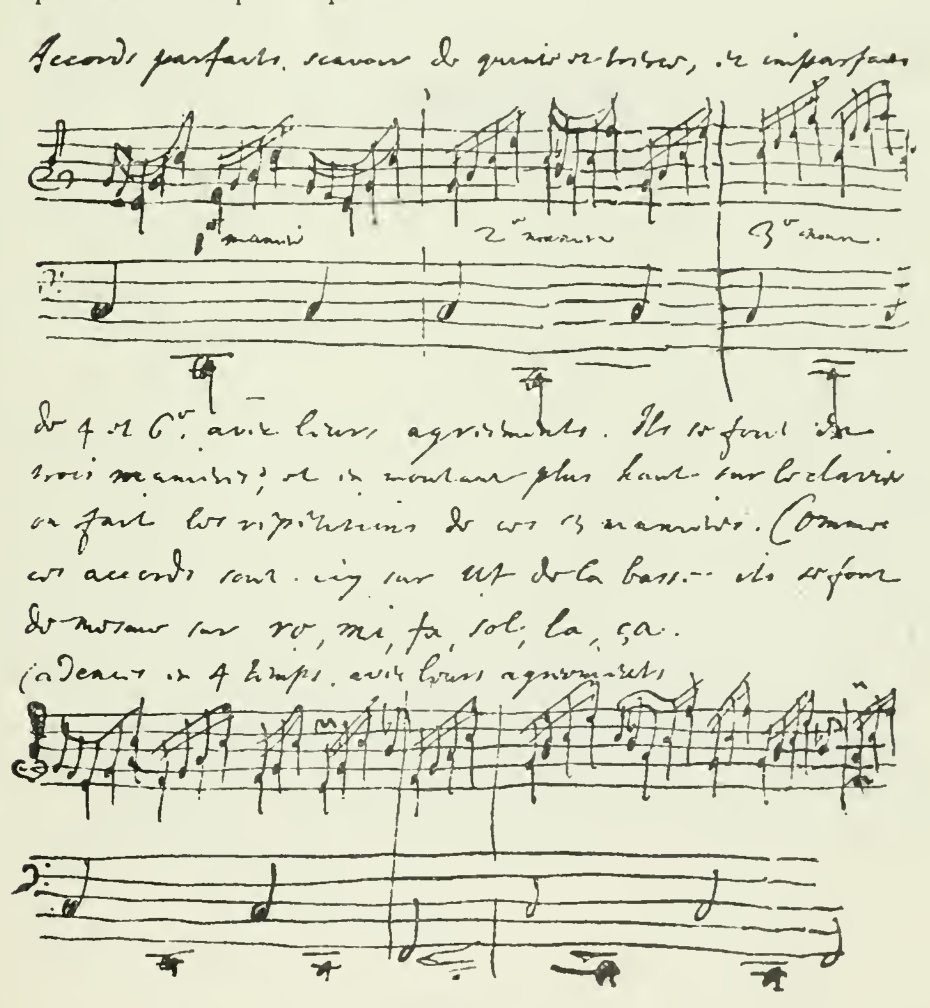
21. Dans la mesure à deux temps, sur une o on bat quelques fois deux fois l'accord, quelques fois on ne redouble qu'une des parties basses.

22. Sur le point au commencement d'une mesure on redouble tout l'accord, autrement seulement une des parties basses.

23. Sur la blanche d'une mesure a 3 temps on rebat pour le second temps une des parties basses, et s'il y a un point en suite, on rebat pour cela l'accord entier.

24. On ne doit pas frapper l'accord sur une crochue quand elle finit un des 4 temps de la mesure, mais quand elle en commence un. [Ajouté au crayon: l'on faict pourtant souvent de la main droite une tierce contre la crochue qui finit un temps laissant les autres doits sur l'accord ou ils estoient].

25. On ne doibt pas pointer les notes dans l'accompagnement quoyqu'on les voye pointees dans les parties qui chantent.



TABLES.

I. PIÈCES ET MÉMOIRES.

	Page.
Hommage de Huygens à Théocrite [1688]	1—2
MUSIQUE ET MATHÉMATIQUE	3—13
Avertissement	5—7
I. Critique du livre de 1655 de M. Meibomius „De proportionibus dialogus" [1656]	8—11
II. Mufique et logarithmes chez Huygens [1661]	12
III. La compofition ou addition des rapports [1662]	13
MUSIQUE	15—173
Avertissement général	17—19
Titre	21—22
I. Théorie de la confonance	23—39
Avertiffement	25—29
A. Origine du chant. Rapport des longueurs des cordes confonantes fuivant Pythagore, etc. [1661?]	30—37
B. Autres confidérations fur la gamme diatonique, produit d'intervalles confonants. Les demitons chromatiques modernes	38—39
II. La divifion du monochorde [1661]	41—60
Avertiffement	43—47
A. Copie d'une partie d'un écrit d'un des deux frères Hemony intitulé „Vanden Beyært" (c.à.d. du carillon)	48
B. Divifio Monochordi I	49—56
C. Divifio Monochordi II	56—58
Appendice à la Pièce *C* [1676]	59—60
III. Pièces fur le chant antique et moderne	61—82
Avertiffement	63—67
A. Le tempo giufto	68—69
B. Les divers modes	69—76
C. Différences de hauteur, par rapport aux tons des inftruments, réfultant de la jufteffe du chant	76—77
D. Les anciens connaiffaient-ils le chant polyphone?	78—81
E. Mérite des „Belgæ", fuivant Guicciardini, dans l'établiffement ou rétabliffement du chant polyphone	82
IV. Notes fe rapportant à des écrits de muficologues anciens	83—105
Avertiffement	85—88
Texte	89—103

Page.

Appendice. „Tons de ma flute". La sirène (?) .... 104—105
V. Notes se rapportant à des écrits de musicologues modernes .... 107—137
Avertissement.......... 109—110
Texte .... 111—137
VI. Le (nouveau) cycle harmonique .... 139—173
Avertissement.......... 141—146
A. Divisio octavæ in 31 intervalla æqualia (per logarithmos) [1661].......... 147—149
B. Table intitulée „Division de l'octave en 31 parties egales".......... 149—150
C. Commentaire sur une table .... 151—153
D. Projet d'une lettre à Basnage de Beauval.......... 153—155
E. Cycle harmonique par la division de l'octave en 31 dièses, intervalles égaux 155—164
F. Lettre à Basnage de Beauval touchant le cycle harmonique (connue sous le nom de Novus Cyclus Harmonicus) [1691].......... 164
G. Quelques notes se rapportant à la division de l'octave en 31 intervalles égaux .... 165—167
Appendice I. L'idée de la περικύκλωσις, etc. (programme de la Pièce E) .. 168—170
Appendice II. Tableau comparatif de 11 ou 30 moyennes proportionnelles d'après différents calculateurs .... 171—173
HUYGENS ET EUCLIDE .... 175—191
AVERTISSEMENT.......... 177—182
TITRE.......... 183
I. A propos de l'ouvrage projeté d'un mathématicien inconnu se proposant de corriger les Eléments d'Euclide [1672 ou 1673?].......... 185—187
II. L'incommensurable [1675].......... 188—189
III. Le corps, la surface, la ligne, le point [1690] .... 190—192
MATHEMATICA VARIA: LES MANUSCRITS .... 193—196
HUYGENS À L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES. COMMUNICATIONS SUR DES SUJETS DE MATHÉMATIQUE.......... 197—365
AVERTISSEMENT.......... 199—222
TITRE 223
I. Règle pour trouver les logarithmes [1666 ou 1667] .... 225—227
II. Demonstratio regulæ de maximis et minimis [1667].......... 228—241
III. Regula ad inveniendas tangentes linearum curvarum [1667] .... 242—255
IV. De curvis paraboloidibus et hyperboloidibus [1667] .... 256—257
V. Examen du livre de Wallis „Arithmetica infinitorum" de 1655 [1667]...... 258
VI. Insuffisance de la démonstration de Gregory de l'impossibilité de la quadrature du cercle [1668].......... 259
VII. Sur la quadrature arithmétique de l'hyperbole par Mercator et sur la méthode qui en résulte pour calculer les logarithmes [1668] .... 260—264
VIII. Problema Alhaseni [1669 ou 1670?].......... 265—271

Page.

IX. Conftructio loci ad hyperbolam per afymptotos [1670?] .... 272—281
X. Sur les lieux plans d'Apollonios [1678] .... 282—284
XI. Rectification et quadrature de l'épicycloïde [1678—1679] 285
XII. Sur les équations folides [1680] .... 286—287
XIII. Théorème fur les points d'interfection des coniques dont les axes font parallèles ou à angles droits [1680] .... 288—290
Appendice I à la Pièce I. Logarithmes et fuites géométriques [1661?] .... 291—294
Appendice II à la Pièce I. Règle pour trouver les logarithmes [1661] .... 295—297
Appendice I à la Pièce II. A propos de l'ouvrage de 1659 „de maximis et minimis etc." de Viviani [1660] .... 298—299
Appendice II à la Pièce II. Cônes maximaux [1669] .... 300—301
Appendice à la Pièce III. Tangente à la courbe hyperboloïde de Ricci [1666] 302
Appendice I à la Pièce VI. Premières réflexions fur la „Vera circuli et hyperbolæ quadratura" de 1667 de Gregory [1667 ou 1668] .... 303—307
Appendice II à la Pièce VI. Projet d'une réplique à la réponfe de Gregory à la critique de Huygens [1668] .... 308—309
Appendice III à la Pièce VI. Calculs au fujet des approximations de Gregory dans le cas du cercle [1668] .... 310—315
Appendice IV à la Pièce VI. Nouvelles approximations pour le cercle [1668]. 316—322
Appendice V à la Pièce VI. Calculs au fujet des approximations de Gregory dans le cas de l'hyperbole [1668] .... 323—327
Appendice I à la Pièce VIII. Ratio conftructionis problematis Alhafeni [1672] 328—329
Appendice II à la Pièce VIII. Solution préferée du problème d'Alhazen [1673] 330—333
Appendice à la Pièce XII. Recherches fe rapportant au problème des deux moyennes proportionnelles et plus généralement à des „folida problemata" [1682] .... 334—360
Appendice à la Pièce XIII. Démonftrations, l'une antérieure, l'autre poftérieure à la rédaction de la Pièce XIII, du théorème fur les points d'interfection etc. [A. 1680, B. ?] .... 361—365

LES TROIS GRANDS PROBLÈMES DE L'ANTIQUITÉ .... 367—404
AVERTISSEMENT .... 369—377
TITRE 379
I. Huygens et Hobbes [1666] 381
II. Une quadrature approchée du cercle [1668] .... 382—387
III. Le développement du „numerus impoffibilis" (π) en série par Leibniz [1674] 388
IV. Du livre de Wallis, Hiftoria Algebræ anglicè. Développement du „numerus impoffibilis" (π) en une fraction continue [1686 ou 1687] .... 389—394
V. Progreffio optima ad quadrandum circulum ac non tantum Leibnitiana multo citius appropinquans fed et Newtonianam poft fe relinquens fimpliciorque ea ac commodior .... 395—400

Page.
VI. Huygens et Hubertus Huighens [1692] 401
VII. Inveftigatio duarum mediarum .... 402—403
MATHEMATICA VARIA 1666—1681 .... 405—444
AVERTISSEMENT .... 407—410
TITRE 411
I. A Paris (mai 1666—août 1670) .... 413—420
I, 1. De combinationum mirandis [1668] .... 413—416
I, 2. Trois problèmes fur les triangles [1668 ou 1668—1669] .... 417—418
Appendice. „Sur la 15. propofition" [de Frenicle] .... 419—420
II. A la Haye (feptembre 1670—juin 1671) ....
III. A Paris (juillet 1671—juillet 1676) .... 421—441
III, 1. Queftion des fignes dans les équations de géométrie analytique [1673) 421
III, 2. Trois problèmes fur le triangle [1673—1674] .... 422—431
III, 3. Un théorème fur la tangente à l'ellipfe [1674 ou 1675] 432
III, 4. Un problème fur le quadrilatère, avec extenfion du théorème trouvé en cette occafion fur le quadrilatère infcrit dans une circonférence de cercle, à un polygone infcrit quelconque [1675] .... 433—440
III, 5. Les „quantitez imaginaires" [1675] 441
IV. A la Haye (juillet 1676—juin 1678) .... 442—443
IV, 1. Queftions fe rapportant au traité „Van rekeningh in fpelen van geluck" [1676] 442
IV, 2. Queftion des fignes dans les équations de géométrie analytique [1676 ou 1677] .... 442—443
V. A Paris (juillet 1678—août 1681). Queftion fe rapportant au traité „Van rekeningh in fpelen van geluck" [1679] 444
MATHEMATICA VARIA 1681—1695 .... 445—476
AVERTISSEMENT .... 447—449
TITRE 451
I. A propos du „pendulum cylindricum trichordon" (finufoïde et parabole, courbes ofculatrices) [1683] .... 453—454
II. Démonftration de théorèmes trigonométriques [1687, 1680]. .... 455—461
III. Queftion fe rapportant au traité „Van rekeningh in fpelen van geluck" [1688] 462
IV. Examen curvæ lineæ quam Cartefius regulæ et fili ductu defcribere docet, an fit eadem atque ovalium ipfius prima [1690] .... 463—466
V. Surface obtenue par la révolution de la parabole autour d'une tangente au fommet [1691] .... 467—468
VI. Développée du „folium Cartefii" [1691] 469
VII. Solide de révolution obtenu par la rotation de la cycloïde autour de fon axe [1691] 470
VIII. Calcul de logarithmes en partant de la confidération de l'hyperbole équilatère

Page.

[1691] .... 471—473

IX. Cycloïde et ciſſoïde; ſolides de révolution et centres de gravité [1691 ou 1692] 474—475

X. Calcul du rayon de courbure minimal de la courbe logarithmique [1692] ... 476

PROBLÈMES ET MÉTHODES MODERNES .... 477—554

Avertissement .... 479—488

Titre 489

I. Fatio de Duillier et Huygens. Méthode des tangentes pour les „curvæ filares" de Tſchirnhaus, ou plutôt pour les courbes données en coördonnées bipolaires, tripolaires, etc., les poles étant ſitués ſur une ligne droite [1687] .... 491—504

II. Solution du problème propoſé par M. Leibnitz dans les nouvelles de la Republique des Lettres du Mois de Septembre 1687 [ſur la courbe de deſcente uniforme] [1687] 505

III. Fatio de Duillier et Huygens. Règle pour trouver l'équation d'une courbe lorſque la ſouſtangente eſt donnée en coördonnées cartéſiennes (problème inverſe des tangentes" ou „problème des tangentes renverſées") [1691] .... 506—541

IV. Methodus Leibnitij [1691] .... 542—546

V. A propos de la méthode du Marquis de l'Hoſpital [1692] .... 547—550

VI. Le problème de la chaînette, etc. [1691 et 1693] 551

VII. Solution d'un problème mathématique propoſé par Jean Bernoulli [1693 et 1694] 552

VIII. A propos des „Reflections upon ancient and modern learning" de W. Wotton [1694 ou 1695] .... 553—554

RÈGLES DE L'ACCOMPAGNEMENT .... 555—561

Avertissement .... 557—558

Texte .... 559—561

II. PERSONNES ET INSTITUTIONS MENTIONNÉES.

Dans cette liste on a rangé les noms sans avoir égard aux particules *de*, *a*, *van* et autres. Les chiffres gras désignent les pages où l'on trouve des renseignements biographiques [1]).

Académie de Caen. 227.
Académie de Montmort. 191.
Académie (française) des Sciences. 130, 145, 178, 186, 196, 197, 206, 207, 211—213, 216, 220, 221, 223—290, 295, 296, 333—335, 375, 407, 408, 410, 419, 481.
Accademia dei Lincei. 123.
Accademia (Reale) d'Italia. 121.
Adam (Charles). 18, 34, 209.
Ahrens (H.L.). 1.
Akademie der Wetenschappen (Koninklijke). 6, 32.
Akademie der Wissenschaften (Sächsische). 126.
Alencé (Joachim d'). 207, 597.
Alhazen. 196, 207, 218, 223, 265—271, 328—333, 422.
Alypius. 86, 89, 92, **93**, 94, 96, 100, 126.
Ambros (A.W.). 65, 66, 129.
Apollonios Pergaeus. 9, 178, 217, 221, 223, 282—284, 289, 298, 299, 332, 335, 341, 342, 359, 360, 363—365, 480, 531.
Arabes (les savants arabes). 299, 371, 373, 620. Voyez aussi Alhazen.
Aratos. 89.
Archibald (R. C.). 7, 177.
Archiloque. 80.
Archimède. 9—11, **178**, 180—182, 186, 187, 370, 480, 487, 504, 509, 553, 554.
Archytas. 620.
Aristide Quintilien. 26, 86, 89, **90**, 93, 95.
Aristote. 78, 86, 87, 89, 132, **178**, **179**, 181, 188, 192, **371**, 373, 620.
Aristoxène. 5, 7, 26, 33, 35, 78, 86, 91, 94—96, 113, 114, 121, 131, **144**, 155, 168.
Aristoxéniens (les). 31, 34, 35, 121.
Arrighettus (Andreas), 299.
Artusi (Giovanni M.). **74**, 109.

[1]) Voyez la note 1 de la p. 675 du T. XVIII.

Asklepios. 5.
Athenæus. 96, 131, 132.
Aubry (A.). 620.
Auguſtin (Saint) (Aurelius Auguſtinus). 120, 121, 128.
Auzont (Adrien). 227.
Avoye ou Auoye. 227.
Aynſcom (Fr. X.). 9.

Bacchius Senex. 86, 89, 94, **95**.
Bach (Joh. Sebaſtian). 129, 144.
Balfoort (Dirk J.). 64, 69.
Ban ou Bannius (Joannes Albertus). **82**.
Barrow (Iſaac). 191, **371**—**373**, 488, 507, 509, 513, 549, 601, 605.
Baryphonus. Voyez Pipegrop.
Baſnage de Beauval. 22, 141, 145, 147, 153, 164, 481, 551, 606, 607, 609.
Beaugrand (J. de). 34, 35, 143, 144, 171, 199.
Beaune (Florimond de). 217, 274, 275, 582 (note), 609.
Beda Venerabilis. **78**.
Beeckman (Iſaac). 34, 35.
Bernoulli (Jacques). 390, 552, 621.
Bernoulli (Jean). 481, 489, 552, 603, 609—611.
Bethe (E.). 96.
Beynum (Bertha van B.- von Essen). 160.
Bibliotheca monaſterii Scheurenſis. 81.
Bibliotheca nazionale di Firenza. 65.
Bibliothèque de l'univerſité de Leiden. 381.
Bibliothèque du couvent S. Salvator à Meſſine. 126.
Bibliothèque royale à Paris. 180.
Bibliothèque royale de Hannovre. 375, 391.
Bierens de Haan (D.). 32, 33, 35, **44**, 171, 458.
Blankenburg (Quirinus G. van). **69**, 129.
Boèce (Anicius Manlius Torquatus Severinus Boethius). 116.
Borelli (G. A.). 298, 299.
Boſmans (H.). 206, 390.
Boſſe (Abraham). 192, 220, 221.
Boulliau (Iſmaël). 11, 34, 35, 144, 171, 172, 179, 180, 377.
Brahmagupta. 439.
Briggs (Henry). 6, 7, 199, 200, 202, 448, 600.
Brocard (H.). 211, 620.
Brouncker (William). 213, 373, 374, 394.
Brown (Harcourt). 227.

Brugmans (H. L.). 43, 154, 222.
Brunet (Pierre). 178.
Bruno (H.). 18.
Bryennius (Manuel). 26, 89.
Bürgi (Joſt). 6.
Buttler (Charles). 119.
Cantor (Moritz). 221, 409.
Carcavy (Pierre de). 195, 209, 211.
Cardanus (Hieronymus). 389.
Cartes (René des). **17**, 18, 34, **67**, 143, 178-180, 199, 209-211, 216, 217, 228, 230, 242, 243, 274, 275, 284, 335, 337, 343, 361, 389, 437, 448, 451, **463-466**, 469, 480, 484, 485, 489, 499, 538, 551, 553, 605, 608, 611.
Caſſini (J. D.). 179.
Catelan (Fr.? de). 390,608.
Cavalieri (Bonaventura). 201, 202, 215, 553, 554.
Ceulen (Ludolf van). 188, 439.
Chalcidius. 178.
Chilmead (Edm.). 89.
Chriſt (W.). 132.
Cicéron (Marcus Tullius Cicero). 125.
Clærbergen (Ph. E. Vegelin van). 433, 434.
Clavius (Chriſtoffel). 8.
Clerfelier (Cl.). 211.
Coets (H.). 597, 598.
Collins (J.). 375, 620.
Combarieu (J.). 178.
Copernic (Nicolaus Coppernicus). 179.
Couſin (Jean?). 7.
Craig (John). 553.
Crama (non pas Cramers). 49.
Croiſet (Alfred). 80.
Croiſet (Maurice). 80.
Cyſatus (J. B.). 81.

Daniel (le prophète). 131.
Dati ou Datus (Carolus). 298, 299.
Davenant (Edward). 393.
Démocrite. **179**.
Deſargues (Girard). 191, 192, 220, **221**, 402, 407.
Deſcartes. Voyez Cartes (des).
Deventer (Ch. M. van). 584 (note).

Didymus. 114.
Diels (H.). 99.
Diophante. 188, 371, 597.
Doncker (H.). 457.
Duhamel (J. M. C.). 211.
Duillier (N. Fatio de). 376, **396**, 484-489, 491-504, 506-541, 544, 557, 597, 601—603, 608.
Dupont (N.). 154, 157, 158, 160.
Dupuy. Voyez Puteanus.
Düring (I.). 5, 79, 90-93, 95, 99, 100.
Durven (les van). 88.
Dijkſterhuis (E. J.). **584**, **621**.

Ecchellenſis (Abraham). 299.
Einſtein (Alfred). 137, 145.
Eitner (R.). 45.
Elſt (J. van der). 109, 110, **128-129**, 618.
Eneſtröm (G.). 6.
Epicure. **179**, 180.
Epigonus. **96**.
Eratoſthène. 10, 89-92, **178**, 334.
Etats de Hollande et de Weſtfriſe. 69.
Euclide. 5, 7-13, 86, 89, 94, 95, 97, 98, 131, 175, **177-180**, 181-192, 199, 200, 434.
Euler (Leonhard). 145, 200.
Euthymius (perſonnage fictif). 9, 10.
Eutokios. 9, 11, 287.

Faber Stapulenſis (I.). 28, 617.
Fano (Fabio). 121.
Fatio de Duillier. Voyez Duillier.
Ferdinando II de Medicis. 298.
Fermat (Pierre). 204, 208-212, **221**, 228-230, 232, 233, 242, 243, 245, 248, 249, 300, 302, 335, 390, 407, 606, 608, 619, 620.
Fétis (F. J.). 7, 145.
Fogel (Martin). 227.
Frédéric III, roi de Danemarck etc. 8.
Frenicle de Beſſy (B.). 407, 408, 410, 411, 419.
Friedländer (Paul). 126.

Galeus. Voyez Gallé.
Galilei (Galileo). 18, 30, 33, **69**, 89, 178, 179, 299, 554.
Galilei (Vincentio, père). 33, **65**, 89, 96, 109, 121.

Gallé (Jean). 34, 35, 171, **173**.
Gallois (Jean). 259.
Gaffend ou Gaffendi (Pierre). 179.
Gaudence ou Gaudentius. 86, 89, 93-95, 98, 99.
Gellibrand (Henry). 199.
Genebrardus (Gilbert). 119.
Gent (P. van). 375, **483**, 484.
Gerhardt (C. I.). 391, 393.
Gevaert (Fr. A.). **86**.
Gibel (Otto). **133**, 134.
Gilbert (W.). 81.
Girard (Albert). 33, 64, **217**, 363, 371.
Glareanus (H. L.). **70**, 71, 116.
Gogavinus (A.). 96.
Graaf, Graaff ou Graef (A. de). 457, 598.
Graindorge (André de). 227.
Gravelaar (N. L. W. A.). 6.
's Gravefande (G. J.). 164.
Grégoire de Saint-Vincent. 9, 200—202, 205, 206, 213, 214, 221, 264.
Gregory ou Gregorius (David). 177, 488, 608.
Gregory ou Gregorius (James). 188, 212—214, 223, 259, 303—327, 369, 374, **375**, 386, 388, 449, 604, 609. 620.
Gresham College. 553.
Groffi. Voyez L. da Viadana.
Guicciardini (Lodovico). 21, 64, 66, 82.
Guido Aretinus. 109, 119, 120, **123**, 124—126, 128.
Guillaume. Voyez Willem III.
Gutfchovius (G. van Gutfchoven). 534, 609.
Gyfelynck (H. J.). 49.

Halley (E.). 553.
Händel (G. Fr.). 129.
Harduinus (J.). 132.
Heiberg (J. L.). 6, 177, 187, 199, 206, 289, 332, 364, 509, 531.
Heinfius (Nicolas). 298.
Helmholtz (H. von). 36.
Hemony (François). 49.
Hemony (frères). 17, 18, 21, 28, 29, 43, 44, 48, 49.
Hemony (Pierre). **44**.
Henry (Ch.). 209, 211.
Hérigone (Pierre). 7, 199, 202—204, 208, 209, 212, 616, 619.

Hermotimus (perfonnage fictif). 9—11.
Héron d'Alexandrie. 131, 132, 192.
Hiéron, roi de Syracufe. 1, 130.
Hiller (Ed.). 178.
Hippocrate. 605.
Hire (Philippe de la). 207, 212, 216, 217, **219—222**, 256, 335, 364, 408.
Hobbes (Thomas). 13, 258, 379, **381**.
Horace (Quintus Horatius Flaccus). 132, 219, 416.
Horrocks (Jeremias). 393.
Horfley (Samuel). 376, 391, 392.
Hofpital (G. E. A. Marquis de l'). 195, 271, 474, 487—489, 510, 538, 539, 547—550, 552, 598, 605—611.
Hudde (Johan). 195, 208, 210, 228—230, 233, 242, 243, 300, 437.
Huighens (Hubertus). 379, 401, 482, 483, 529, 532, 605.
Hutton (Charles). 205, 206.
Huygens (Conftantyn, frère). 220, 554.
Huygens (Conftantyn, père). 17, 26, 28, 33, 34, 46, 64, 66, 82, 161, 170, 199, 209, 551, 557, 558, 617.
Huygens (Lodewyk). 161, 191.

Inftitut archéologique liégeois. 173.
Inftitut de France. 211.
Ioannes XX (pape). 124.

Janus (Carolus von Jan). 89.
Jean (pape). Voyez Ioannes.
Jean (Saint, apôtre). 120, 125.
Jeans (James). 144.
Jonckbloet (W. J. A.). 82.
Jordan (M. C.). 372.

Kaibel (G.). 132.
Kapfberger (Johann Hieronymus von). **127**.
Kepler (J.). 179, 294.
Kircher (Athanafius). 85, 89, 110, **123-128**.
Knott (C. G.). 6.
Korteweg (D. J.). **551**.

Lalovera (A. de Lalouvère). 620.
Land (J. P. N.). **44**, 58, 82, 144, 145, 149.
Lange (W.). 9.
Leeuwenhoeck (Antony van). 88.

Lefèvre d'Etaples. Voyez Faber Stapulensis.
Leibniz (G. W.). 188, 195, 374, **375**, 376, 379, 388, 389, 391, 395, 398, 400, 409, 441, 454, 472, 475, 479-481, 483-489, 501-503, 505, 506, 510, 511, 513, 517, 525, 535, 539, 540, 542-546, 549, 552-554, 598—605, 608, 618, 621. 622.
Leopoldo de Medicis. 298, 302.
Lepaige (C.). 172, 219.
Lobkowitz (J. C.). 204.
Loria (Gino). 465.
Loulié (E.). 69.
Lucrèce (Titus Lucretius Carus). 179, 180.

Magalotti (Laurentius). 299.
Maillard ou Maillart (Pierre). 109, **118-120**.
Maire (le). **120**.
Manetti (Braccio). 299.
Maroles (de). 597.
Marchetto. **144**.
Mariotte (E.). 407, 417.
Maferes (Fr.). 205, 206, 261, 302.
Mathematical Affociation of America. 7.
Maubuiffon (de). 422, 428, 429.
Maurolycus (Fr.). 199.
Meibomius (Marcus). 5-7, **8**, **9**, 10, 11, 13, 86, 90, 92-100, 131, 155, 214.
Menæchme. 287, 371.
Menge (H.). 94, 97, 98, 131.
Mercator (Nicolaus). 7, 11, 200, 201, **214**, 215, 223, 260-264, 297, 302, 448, 526.
Merfenne (Marin). 17, 18, 26-29, 33-35, 37, 43, 64-69, 80, **86**, 87, 109, 110, 114, **120-122**, 124, 126, 141-144, 149, 156-158, 162, 163, 168-173, **179**, 195, 199-200, 205, 206, 209, **214**, 294, 296, 297, **409**, **410**, 619.
Méfomède. **89**.
Metius (A. A.). 392.
Mieli (Aldo). 178.
Miniftère (français) d'inftruction publique. 211.
Moll (W.). 69.
Monforte (A.). 440.
Montalent (de). 44, 46.
Montmort (H. L. H. de). 191.
Moray (Robert). 12, 18, 145.
Muris (Johannes de). **124**, 129.
Muziekhiftorisch Inftituut à Utrecht. 46.
Mylon (Cl.). 221.

Neidhardt (J. G.). 145.
Neile (Paul). 553 [1]).
Neper ou Napier (John). **6**, 173, 199, 370, **447**, 459, 554, 600.
Newton (Isaac). **374**, 376, 379, 391, 393, 395, 396, 448, 449, **453**, 485, 486, 488, 514, 553.
Nicomaque (Nikomachos Gerafenus). 5, 86, 89—91, 99.
Nicomedes. 537.
Niquet (V.). 227.

Oldenburg (Henricus). 195, 196, 207, 218, 313, 328, 374, 376, 388, 391, 483, 621.
Oofterwijck (S. H.). 291.
Oftwald (W.). 192.
Oughtred (W.). 554.
Ovide (Publius Ovidius Nafo). 416.

Paige (C. le). Voyez Lepaige.
Papin (D.). 483.
Pappos. 9, 284, 425, 432, 553.
Pafaro (Domenico de). 161.
Pafcal (Blaife). 390, 407, 408, 448, 453 475.
Perrault (Claude). **85**, 86, 109, 129, **130—133**, 319.
Perrault (Pierre). 131.
Philippe II, roi d'Efpagne. 82.
Philolaus. 99.
Philofophes grecs (les). 372.
Pindare. 85, 89, 110, **126**, 131, 132.
Pipegrop (Heinrich). 133, **134**.
Platon. 11, 18, 180.
Platoniciens (les). 179.
Plaute (Titus Marcus Plautus). 81.
Pline (Cajus Plinius). 132.
Plutarque. 80, 179.
Pollux (Julius). 96.
Porphyre. 5, 93.
Poterie (A. de la). 192.
Poudra (M.). 192.
Prag (A.). 390.
Preftet (J.). 608.
Ptolémée (Klaudios Ptolemaios). 5, 26, 27, 33, 43, 63, 75, 78—80, 86, 88, 90—96, 99—102, 112, 114, 117, 169, 178, **180**, 212.

[1]) Dans le T. XVIII (p. 682, ligne 1) il faut corriger Neile (W.) en Neile (P.).

Puteanus (Eric). **119**.
Putte (van de). Voyez Puteanus.
Pythagore. 21, 25, 27, 28, 30, 32, 50—52, 87, 90, 91, 115, 121, 155, 189.
Pythagoriciens (les). 79. 179.

Reinach (Th.). 96, 114.
Ricci (M. A.). 302.
Richer (Jean). 227.
Riemann (K. W. J. Hugo). 7, 137, 141, 145, 158.
Roberval (Gilles Perſonne de). 206, 407, 408, 619, 621.
Rome (A.). **126**.
Römer (Ole). 195, 216, 407, 434, **440**, 485.
Rook (L.). 215.
Royal Society. 391, 393.
Royal Society of Edinburgh. 6.

Salinas (Franceſco). 18, 35, **45**, 46, 78, 109, 110, **111—114**, 115, 116, 118, 122, 142, 143, 149, 154—158, 162, 168.
Salmon (Thomas). 109, **136**, 137.
Sant' Angiolo (cardinal). 89.
Sarafa (A. A. de). 200, 202, 206.
Scaliger (Joſephus Juſtus). 371, 372, 620.
Schlick (Arnolt). 45, 46, 157.
Scholes (Percy A.). 63.
Schooten (Fr. van). 8, 201, 202, 204, 208, 209, 212, 217, 219, 221, 228, 230, 233, 275, 283, 361, 363, 373, 389, 437, 484, 619.
Schott (G.). 433, 434.
Schuh (F.) **259**, 364, 369, 374.
Schütte (Fr.). 465.
Sémiramis. 1.
Senti (H.). 154.
Seth Ward. Voyez Ward.
Shore (John). **87**.
Sherwin (H.). 205.
Simplicius. 620.
Simpſon (Chriſtopher). 109, **130**.
Sluſius (René de Sluſe). 196, 218, **219**, 242, 243, 329, 334, 335, 340, 358—360, 370, 403, 534, 609.
Smith (D. E.). 6.
Smits van Waesberghe (J.). 75.
Snellius (Willebrord). 439.

Societas Iefu. 186.
Société hiftorique néerlandaife des fciences médicales, exactes et naturelles. 504.
Socrate. 99.
Stevin (Simon). 17, 18, 27, 28, 32—35, 44, 64, 65, 141, 143, **144**, 169, 171, 217, **371—373**, 620.
Stirling (James). 409.

Tacquet (André). 185, **186**, 187.
Tannery (Paul). **6**, 12, 18 34, 177, 199, 206, 209, 211, 221, 619.
Tannery (M.me Paul). 27, 34, 67.
Theo Alexandrinus. 9.
Théobald (évêque). 124.
Théocrite. **1**, 2, 88, 177, 178.
Theo Smyrnæus. 5, 10, 11, 177, 180, 377.
Thévenot (Melchifédec). 221.
Titelouze (J.). 27, 114, **120**.
Torricelli (Evangelifta). 123, 554.
Tfchirnhaus (E. W.). 222, 375, 483—487, 489, 492, 502—504, 597, 602.

Univerfité de Cambridge. 391.
Univerfité de Leiden. 381, 620.
Univerfité de Louvain. 126.
Univerfité d'Oxford. 380.
Univerfités du moyen-âge. 6.
Uylenbroek (P. J.). 485, 491, 493, 505.

Vas Nunes (A.). 49.
Vaumefle (Pierre de). 216.
Vegelin. Voyez Claerbergen.
Vereeniging voor Noord-Nederlands (ou: voor Nederlandsche) Muziekgeschiedenis. 44. 82.
Verheijen (Abraham). 35.
Viadana (Lodovicus), ou L. Groffi da Viadana. 129, **618**.
Vicentino (N.). **144**, 157.
Vieta ou Viete (François). 217, 389, 480.
Virgile (Publius Virgilius Maro). 416.
Vitellio. 270, 330.
Vitruve (Marcus Vitruvius Pollio). 9.
Viviani (Vincentio). 69, 298, 299, 606.
Vlacq ou Vlack (Adriaen). 147, 204, 448, 456—460.
Volder (B. de). 597.
Vollgraff (J. A.). **594**.
Voffius (G. J.). 85.

Voffius (Ifaac). 85, 109, 131.
Voye (de la). 227.
Vries (H. de). 221.

Waard (C. de). **27**, 34, 67, 209, 211.
Wallis (John). 7, 13, 26, 63, 78—80, 88, 90—93, 95, 99, 100, 102, 202, 204, 205, 210, **212—217**, 223, 258—261, 370, 372—374, 376, 379, 381, 389—394, 408, 448, 449, 454, 475, 488, 513, 553, 554.
Ward (Seth). 215.
Weiffenborn (H.). 483.
Werckmeifter (Andreas). 18, 88, 100, 109, 110, **133**, 134, 135.
Weftphal (R.). 78, 114.
Whewell (W.). 191, 372, 509.
Willem III, ftadhouder, roi d'Angleterre. 554.
Witt (Johan de). 210, 216, **217**, 220, 221, 233, 249.
Worp (J. A.). 33.
Wotton (W.). 489, 553, 554.
Wren (Chriftopher). 216.

Zacharias (M.) 192.
Zarlino (Giofeffo). 18, 35, **45—46**, 47, 54, 65, 70, 78, 101, 109—111, 113, **114—118**, 121, 129, 154, 155, 158, 160, 162, 168, 171, 294.
Zeuthen (H. G.). 6, 199, 206.

III. OUVRAGES CITÉS.

Les chiffres gras défignent les pages où l'on trouve une defcription de l'ouvrage.

Les chiffres ordinaires donnent les pages où il eft queftion de l'ouvrage, ou qui contiennent, dans le cas de Huygens la reproduction de l'ouvrage[1]).

Ch. Adam. Voyez *des Cartes.*
Alhazen, Opticæ Thefaurus, trad. et éd. *F. Rifner*, 1572. 270, 330.
Alypius, Introductio mufica, **93**, 100.
„ Voyez Mufici fcriptores græci, éd. *C. Janus.*
A. W. Ambros, Die Entwicklung des geregelten mehrftimmigen Gefanges, 1864. **65**.
„ Gefchichte der Mufik, 1864. **65**, 66.
„ Zur Lehre vom Quintenverbot. 129.
Apollonios, Conica, 217, 289, 298 et 299 (édition projetée de *G. A. Borelli* et *A. Ecchellenfis*), 332, 335, 341, 342, 359, 360, 364, 365, 530, 531. (éd. *J. L. Heiberg*, 1891: **289** 332, 364, 365, 530, 531).
„ Voyez *Borelli* et *Viviani.*
Aratos, Φαινόμενα καὶ Διοσημεῖα, éd. *J. Fell*, 1672. 89.
R. C. Archibald, Mathematicians and Mufic, 1923/1924. 7, 177.
Archimède, De conoïdibus et fphæroïdibus, 186, 187.
„ De fphæra et cylindro. 509.
„ La Méthode (Πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος). 178, 554.
„ Manufcrit de la Méthode. 554.
„ Opera omnia, éd. *J. L. Heiberg*, 1910-1913. 187.
„ Quadratura parabolæ. 554.
Ariftides Quintilianus. De Mufica lib. III, éd. *M. Meibomius.* **90**, 93, 95.
„ „ Oeuvres de mufique (manufcrit). 89.
Ariftote, Catégories. 620.
„ De Coelo. 178.
„ Meteorologica. 181.
„ Phyfica. 181, 192.
„ Politica. 78.

---

[1]) Dans le T. XIX nous avons omis par mégarde dans la lifte III:
G. G. Leibniz, Difcours de métaphyfique, 1686. 165.
Vincent de Beauvais, Speculum naturale. 388.

Ariſtote, Problemata. 87.
„ Voyez Muſici ſcriptores græci, éd. *C. Janus*.
„ Voyez Simplicius.
Ariſtoxène, Harmonicorum elementa, éd. *M. Meibomius*, 1652. **91**, 94, 96, 131.
G. M. Artuſi, L'arte del contrapunto, ridotta in tavola, 1586—1589 et 1598. 74.
„ L'Artuſi, ovvero delle imperfettioni della moderna muſica, 1600—1603. 74.
Aſklepios, Commentaire ſur l'Arithmétique de Nicomaque. 5.
Athenæus, Dipnoſophiſtarum libri, éd. G. Kaibel, 1887. 131, **132**.
A. Aubry, Sur l'origine de la versiera (note dans les Oeuvres de *Fermat*). 620.
St. Auguſtin, De Muſica, 1569. **121**.
„ Opera omnia, T. I, 1877. **121**.
Auteurs néerlandais (16e, 17e et 18e ſiècles) ſur les ſciences mathématiques etc. 458.
Fr. W. Aynſcom, Expoſitio et deductio geometrica, 1656. 9.

Bacchius Senex. Voyez Muſici ſcriptores græci, éd. *C. Janus*.
D. J. Balfoort, Het muziekleven in Nederland in de 17de en 18de eeuw, 1938, **64**.
„ Quirinus Gideon van Blankenburg, 1938. 69.
Joan Albert Ban, Zangh-bericht, 1642. **82**.
„ Zangh-bloemſel, 1642. **82**.
I. Barrow, Lectiones geometricæ, 1669. 373, 488, 509.
„ Lectiones mathematicæ, 1664. 192, 372, 373.
„ The mathematical works, éd. *W. Whewell*, 1860. 192, **372**, 509.
Baryphonus (H. Pipegrop), Iſagoge muſica, 1609. 134.
Fl. de Beaune, In geometriam Renati Deſcartes notæ breves, 1659. 275.
Beda Venerabilis, Hiſtoria eccleſiaſtica gentis Anglorum. 78.
„ Oeuvres. 78.
I. Beeckman, Lettre à Merſenne, 1629. **34**.
Jacques Bernoulli, Demonſtratio rationum, quas habent ſeries numerorum etc. 1686. **390**.
„ Narratio controverſiæ inter Dn. Hugenium & Abbatem Catelanum agitatæ de centro oſcillationis, 1686. **390**.
„ Solutio problematis Fraterni, 1693. 610.
„ Conſtructio curvæ acceſſus et receſſus æquabilis etc. 1694. 621.
Jean Bernoulli, Solutio problematis funicularii, 1691. 603.
„ Solutio problematis Carteſio propoſiti Dn. de Beaune [1]) [et nouveau problème propoſé par l'auteur], 1693. 489, 609—611.
E. Bethe. Voyez *Pollux*.
B. Beynum-von Eſſen, Bouw en Geſchiedenis van het klavier, 1932. **160**.

[1]) Voyez ſur le problème de Fl. de Beaune les premières lignes de la p. 449 du T. X. Il en eſt queſtion (Table IV qui ſuit) à la p. 15 du Manuſcrit I.

D. Bierens de Haan, Bibliographie néerlandaise historique-scientifique des ouvrages importants dont les auteurs sont nés aux 16e, 17e es 18e siècles sur les sciences mathématiques et physiques avec leurs applications, 1881—1883. **458**.
„ Voyez *Stevin*.
Q. G. van Blankenburg, Clavecimbel en orgelboek der gereformeerde psalmen en kerkzangen, 1732. **69**, 129.
„ Elementa musica etc., 1739. 69.
A. M. T. S. Boethius, De institutione musica. 87.
G. A. Borelli, Edition de 1661 des Conica d'Apollonios. 298, 299. Voyez aussi *Apollonios*.
H. Bosmans, Sur l'œuvre mathématique de Blaise Pascal, 1924. **390**.
A. Bosse. Voyez *Desargues*.
I. Boulliau, Astronomia philolaica, 1645. 179.
„ Voyez *Ptolémée*.
Voyez *Theo Smyrnæus*.
H. Briggs, Arithmetica logarithmica, 1624. 202. Voyez aussi *Vlacq*.
„ Trigonometria britannica. (*Gellibrand* et *Briggs*), 1633. 448. Voyez aussi *Gellibrand*, même ouvrage.
H. Brocard, La quadrature de la versiera (note dans les Oeuvres de *Fermat*). 620.
H. Brown, L'Académie de physique de Caen (1666—1675) d'après les lettres d'*André de Graindorge*, 1938. 227.
H. L. Brugmans, Le séjour de Chr. Huygens à Paris etc. 1935 (voyez aussi *Chr. Huygens*). 43, 222.
P. Brunet et *A. Mieli*, Histoire des sciences; antiquité, 1935. 178.
M. Bryennius, Harmonika (manuscrit). 26, 89.
„ „ éd. *J. Wallis*, 1699. 26.
Bucolicæ græci, éd. *H. L. Ahrens*, 1909. 1, 2.
Ch. Buttler, The principles of musick, in singing and setting; with the twofold use thereof, ecclesiastical and civil, 1636. 119.
M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik III, 1901. 409.
R. des Cartes, Geometria, éd. *F. v. Schooten*, 1659 et 1683. 217, 228, 230, 275, 284, 361, 363, 389, 437, 463, 484.
„ La Géométrie, 1637. 216, 284, 337, 343, 448, 463.
„ Lettre à Const. Huygens, 1635. 34.
„ Lettres à M. Mersenne, 1630, 1634 et 1638. 18, 34, 67, 209.
„ Lettres, éd. *Cl. Clerselier*, T. III, 1667. 211.
„ Oeuvres, éd. *Ch. Adam* et *P. Tannery*, 1897—1913. 18, 34, 67, 209.
„ Principia Philosophiæ, 1644. 17.
„ Voyez *van Schooten*.
de Catelan, Logistique pour la science générale des lignes courbes, 1691. 608.
B. Cavalieri, Directorium generale uranometricum, 1632. 202.
„ Geometria indivisibilium, 1635. 554.
L. van Ceulen, De arithmetische en geometrische fondamenten, 1615. 188.

L. van Ceulen, De circulo & adfcriptis liber, trad. et éd. par *W. Snellius*, 1619. **439**.
Cicéron (M. Tullius Cicero), De oratore. 125.
Chr. Clavius. Voyez *Euclide*.
Cl. Clerfelier. Voyez *des Cartes*.
J. Combarieu, Hiftoire de la mufique des origines au début du XXe fiècle, 1920. **178**.
J. Combarieu, La mufique et les philofophes antiques, 1920. **178**.
J. Craig, Methodus figurarum lineis rectis et curvis comprehenfarum quadraturas determinandi, 1685. 553.
„ Tractatus mathematicus de figurarum curvilinearum quadraturis et locis geometricis, 1693. 553.
„ Voyez *Wotton*.
A. et M. Croifet, Hiftoire de la littérature grecque, 1914. **80**.
J. B. Cyfatus, De loco, motu, magnitudine et caufis cometæ, qui fub finem anni 1618 et initium anni 1619 in cœlo fulfit, 1619. **81**.
Daniel. Voyez *Livre de Daniel*.
G. Defargues, Broüillon project d'exemple d'une maniere univerfelle touchant la practique du trait à preuves pour la coupe des pierres en l'architecture, etc. 1640. 191.
„ Broüillon project d'une atteinte aux évenemens du rencontre du cone avec le plan (copie de 1679 par *Ph. de la Hire*; l'édition originale était de 1639). 192, 221. Voyez auffi *M. Zacharias*, édition allemande de 1922.
„ Manière univerfelle de Defargues pour pratiquer la perfpective etc. par *M. Boffe*, 1648. 220.
„ Oeuvres, réunies et analyfées par *M. Poudra*, 1864, 192.
R. Defcartes. Voyez *des Cartes*.
H. Diels, Fragmente der Vorfokratiker, 1922. 99.
Diophante, Algèbre, éd. françaife de *S. Stevin*. **371**.
J. M. C. Duhamel, Mémoire fur la méthode des maxima er des minima de Fermat (et obfervations de Brocard fur ce mémoire). **211**.
N. Fatio de Duillier, Publications de 1687 et 1689 dans la „Bibliothèque univerfelle et hiftorique". 484; dont la première eft intitulée: Reflexions fur une methode de trouver les tangentes de certaines lignes courbes, laquelle vient d'être publiée dans un livre intitulé Medicina Mentis [voyez Tfchirnhaus]. 485.
W. Dupont, Gefchichte der mufikalifchen Temperatur, 1935. 154, **157**, 158, 160.
I. Düring, Ptolemaios und Porphyrios über die Mufik, 1934. 93.
„ Voyez *Ptolémée*.
E. J. Dijkfterhuis, De elementen van Euclides I et II (T. I et III de la „Hiftorische bibliotheek voor de exacte wetenfchappen"), 1929—1930 [1]). **11**, 187. Voyez auffi *Euclide*.
„ De verfiera, 1932. **621**.

[1]) Le dernier Appendice du livre, où l'auteur cite e. a. Ch. M. van Deventer qui f'intéreffait à la muficologie, traite brièvement du λόγος, du διάστημα etc.

A. Ecchellenſis. Voyez *Apollonios.*

Alfred Einſtein. Voyez *Riemann.*

R. Eitner. Voyez *Schlick.*

J. van der Elst, Notæ auguſtinianæ ſive muſices figuræ etc., 1657. 128.

„ Den ouden ende nieuwen grondt vande muſijcke, 1662, **128**, 129.

G. Eneſtröm. Voyez *Bibliotheca mathematica.*

Eratoſthène, Carminum reliquiæ, éd. *E. Hiller,* 1872. **178**.

„ Fragmenta, éd. *J. Fell,* 1672. 89.

Euclide, Écrits optiques. 177.

„ Eléments. 5, 8, 185, 192, 434; 8 et 9 éd. *Chr. Clavius* (1589, 1607); **11** et 187 éd. *E. J. Dijkſterhuis* (voyez auſſi *Dijkſterhuis*); 185, **186**, 187 éd. *A. Tacquet* (voyez auſſi *Tacquet*).

Euclide, Introductio harmonica, éd. *M. Meibomius,* 1652. 94, 97, 98, 131, 177; éd. *H. Menge* 131.

„ Liber de canonis ſectione, 9, 12, 177.

„ Phænomena, ex traditione. *Fr. Maurolyci.* 199.

„ Quæ ſuperſunt omnia, éd. *D. Gregory,* 1703. 177.

„ Scripta muſica, éd. *H. Menge.* 94, 97, 98.

„ Voyez Muſici ſcriptores græci, éd. *C. Janus.*

L. Euler, Oeuvres. 145, 200.

I. Faber Stapulenſis. De muſica, 1552. 617.

„ „ Ouvrages ſur la muſique. 28.

J. Fell. Voyez *Aratos, Eratoſthène* et *Méſomède.*

P. Fermat, Manuſcrits. 204, 209, 335.

„ Oeuvres, éd. *P. Tannery, Ch. Henry* et *C. de Waard,* 1891—1922. 209, **211**, 620.

„ Varia opera, 1679. 209, 211.

„ Voyez Aubry et Brocard.

F. J. Fétis, Biographie univerſelle des muſiciens, 2[ième] édition, 1864. 7, 145.

P. Frenicle de Beſſy, Abregé des combinaiſons, 1893 et 1729. **410**.

„ „ Traité des triangles rectangles en nombre, 1676—1677 et 1729. **419**.

P. Friedländer, Die Melodie zu Pindars erſtem Pythischen Gedicht. **126**.

Galileo Galilei, Dialogo intorno ai due maſſimi ſiſtemi del mondo, Tolemaico e Copernicano, 1632. 179.

„ „ Manuſcrit. 178.

Vincentio Galilei, Dialogo della muſica antica et della moderna, 1581, 1602 et 1934. 89, 96, **121**.

„ „ Diſcorſo intorno all' opere di meſſer Gioſeffo Zarlino etc. 1589. **65**.

„ „ Manuſcrits. **65**.

J. Gallé, Nouveau epitome d'arithmetique, 1616. 173.

„ Nouvelle invention d'apprendre l'arithmétique par le moyen de dix petits batons etc. 1635. 173.

Gaudentius, Harmonica introductio. **93**, 95, 99.

„ Voyez Muſici ſcriptores græci, éd. *C. Janus.*

H. Gellibrand, Trigonometria britannica (*Gellibrand* et *Briggs*), 1633. 199. Voyez auſſi *Briggs*, même ouvrage.
G. Genebrard, Ouvrages. 119.
C. I. Gerhardt. Voyez *Leibniz*.
Fr. A. Gevaert, Hiſtoire et théorie de la muſique de l'antiquité, 1875. **86**.
O. Gibel, Introductio muſicæ didacticæ, 1640. 133.
„ Proportiones mathematico-muſicæ, 1666. 133.
W. Gilbert, Tractatus ſive phyſiologia nova de magnete etc. 1600. 81.
A. Girard, Invention nouvelle en l'algebre, 1629. 363.
„ Voyez *Stevin*.
H. L. Glareanus, Dodekachordon, 1547. 70.
A. de Graindorge. Voyez *Brown*.
N. L. W. A. Gravelaar, John Napier's werken, 1899. **6**.
Grégoire de St. Vincent, Opus geometricum, 1647. 9, 200, 201, 205, 206, 213, 214, 264.
D. Gregory ou Gregorius. Voyez *Euclide*.
J. Gregory ou Gregorius, De verâ circuli et hyperbolæ quadraturâ, 1667. 259, 303, 311, 312, 323, 325, 388.
„ „ Exercitationes geometricæ, 1668. 604.
„ „ Geometriæ pars univerſalis, 1668. 620.
„ „ Lettre à Collins, 1670/1671. 375, 620.
„ „ Polémique avec Huygens au ſujet de la „vera circuli etc. quadratura", 1668 et 1669. 259, 307, 308, 313.
L. Guicciardini, Deſcrittione di tutti i paeſi baſſi, altrimenti detti Germania Inferiore, etc. 1567, 1581 et 1588. 21, 82.
Guido Aretinus, Introductorium, ou: Micrologus de diſciplina artis muſicæ, 11ième ſiècle. 124.
E. Halley. Voyez *Wotton*.
J. L. Heiberg, Litterargeſchichtliche Studien über Euklid, 1882. **177**.
„ Voyez *Apollonios* et *Archimède*.
H. v. Helmholtz, Die Lehre von den Tonempfindungen, 1870. 36.
P. (?) Hemony, Vanden Beyært, copie (d'après un manuſcrit?). 18, 21, **48**.
Ch. Henry. Voyez *Fermat*.
P. Hérigone, Cours mathematique, 1634—1644. 7, 199, 202—204, 208, 209, 616, 619.
G. Hiller. Voyez *Eratoſthène*.
Ph. de la Hire, La conſtruction des équations analytiques, 1679. 335.
„ Nouveaux éléments des ſections coniques; les lieux géométriques; la conſtruction
„ ou effection des équations, 1679. 217, 220, 221, 335.
„ Nouvelle méthode en géométrie pour les ſections des ſuperficies coniques etc., 1673. 221.
„ Voyez *Deſargues*.
Th. Hobbes, De corpore, 1655. 381.
„ De principiis et ratiocinatione geometrarum etc. 1666. 381.

Th. Hobbes, Examinatio et emendatio mathematicæ hodiernæ etc. (dialogi fex), 1660. 13, 381.
„ Opera philofophica etc. 1668, 381.
„ Problemata phyfica una cum magnitudine circuli, 1662. 381.
„ Quadratura circuli, cubatio sphæræ, duplicatio cubi, 1669. 381.
Horace (*Q. Horatius Flaccus*), Carmina. 132.
„ Epiftolæ. 219.
J. Horrocks, De rationum et fractionum reductione, 1678. 393.
„ Opera pofthuma, 1673 et 1678. 393.
S. Horfley. Voyez *Newton*.
J. Hudde, Epiftola fecunda de maximis et minimis, 1659. 437.
Ch. Hutton, Introduction hiftorique à *Sherwin*'s „Mathematical tables", ainfi qu'à la collection des „Scriptores logarithmici" publ. par *Fr. Maferes*, 1785 et 1791. 205. Voyez *Maferes* et *Sherwin*.
Chr. Huygens, Anecdota, 195.
„ Aftrofcopia compendiaria, 1684. 88.
„ Chartæ aftronomicæ. 203.
„ Chartæ mathematicæ. 8, 207, 229, 243, 265, 328, 330, 364, 388, 418, 425, 433.
„ Conftructio univerfalis problematis a Jo. Bernoulio propofiti, 1694, 481, 552.
„ Cofmotheoros. 110, 178.
„ Critique de Hobbes. 13.
„ De circuli magnitudine inventa, 1654. 259, 310, 311, 313, 316—318, 325, 369, 370, 374, 382, 385, 386, 388, 391—393.
„ De combinationum mirandis. 408, 413—416.
„ De coronis et parheliis. 203, 616 (note).
„ De motu corporum ex percuffione. 291, 372.
„ De motu naturaliter accelerato. 204.
„ De problemate Bernouliano anni 1693. 1693. 481, 552, 610, 611 (voyez auffi Conftructio univerfalis etc.).
„ Defcriptio automati planetarii. 394.
„ Deux démonftrations du théorème concernant les quatre points d'interfection de deux coniques à axes parallèles (éd. *F. Schuh*, 1921). 364.
„ Difcours de la caufe de la pefanteur, 1690. 178, 447, 448, 557, 619.
„ Divifio Monochordi. 18, 21, 29, 49—58.
„ Excerpta ex epiftola C. H. Z. ad G. G. L., 1694. 552, 622.
„ Ἐξέτασις, 1651. 202.
„ Experimenta circa electrum. 618.
„ Fundamentum regulæ ad inveniendos logarithmos. 205.
„ Horologium ofcillatorium, 1673. 185, 187, 206, 216, 285, 448, 479, 503.
„ Journal de voyage à Paris et à Londres (éd. *H. L. Brugmans*, 1935). 43, 49, 154, 191, 209, 212, 221, 222.
„ Lettre à H. Bafnage de Beauval, 1692. 481, 550, 551, 606, 609.

Chr. Huygens, Manufcrits A—K. 195.
„ Manufcrit A. 203, 298, 299, 616 (note), 619.
„ Manufcrit B. 13, 205, 225, 413, 534.
„ Manufcrit C. 210, 225—227, 229, 231, 233, 256—257, 303, 417.
„ Manufcrit D. 218, 261, 263, 265, 267, 275, 287, 300, 308, 310, 316, 317, 323—325, 330, 369, 382, 385, 388, 413, 417, 418, 421, 422, 425, 426, 428.
„ Manufcrit E. 104, 109, 121, 207, 219, 286, 287, 361, 363, 423, 431—433, 437, 440—442, 456.
„ Manufcrit F. 179, 334, 335, 341, 359, 389, 393, 394, 455, 456, 458, 459, 464, 480, 491—493, 495—497, 500, 551, 597—598.
„ Manufcrit G. 109, 112, 128, 129, 190, 375, 376, 395—397, 398, 463, 467, 471, 472, 475, 480, 487, 499, 502—508, 511, 513, 514, 516—518, 520—522, 525—527, 529, 532, 534, 537—540, 551, 598—604, 605, 609, 618.
„ Manufcrit H. 221, 471, 472, 474, 480, 509, 542, 544, 547, 549, 551, 604, 608.
„ Manufcrit I. 479, 480, 551—553, 582 (note), 604, 608—611.
„ Manufcrit K. 616 (note), 619.
„ Manufcrit 11. 269, 287, 330, 334, 336, 341, 359.
„ Manufcrit 12. 208.
„ Manufcrit 13. 44, 55—58.
„ Manufcrit 14. 177, 291, 294.
„ Nouveau Cycle Harmonique. 7, 18, 19, 22, 28, 38, 110, 112, 113, 129, 139—173, 557.
„ Opera varia, 1724. 141, 164, 230, 241, 243, 270, 275.
„ Opufcula pofthuma, 1703. 394.
„ Phyfica Varia. 109, 130, 186, 188.
„ Pièces fur le chant antique et moderne. 21, 68—82.
„ Polémique avec J. Gregory au fujet de la „vera circuli etc. quadratura", 1668. 213, 223, 259, 303—327, 369, 374, 386, 449.
„ Portefeuille Mufica. 1, 17, 18, 19, 30, 44, 47, 48, 50, 58, 59, 63, 68—70, 73, 76, 78, 80, 88—90, 100, 102, 105, 111, 112, 114, 118, 120, 123, 129, 133, 147, 149, 151, 153—155, 164, 165, 168, 169, 205, 295, 558, 559.
„ Solution du problème propofé par Leibniz en 1687 fur la courbe de defcente uniforme, 1687. 481, 505, 600, 601.
„ Solutio ejufdem problematis, c.à.d. du problème de la chaînette, 1691. 481, 551, 603.
„ Teftament. 195, 196.
„ Theoremata de quadratura hyperboles, ellipfis et circuli ex dato portionum gravitatis centro, 1651. 215, 324, 554.
„ Théorie de la confonance. 21, 30—39, 114.
„ Traité de la lumière, 1690. 222, 448, 479, 503, 504, 557, 619.
„ Van rekeningh in fpelen van geluck, 1657. 408, 411, 442, 444, 451, 462.
„ Varia. 195, 196.

Chr. Huygens. Voyez *Jacques Bernoulli.*
„ Voyez *H. L. Brugmans.*
„ Voyez *D. J. Korteweg.*
„ Voyez *J. P. N. Land.*
„ Voyez *H. Oldenburg.*
„ Voyez *F. Schuh.*
„ Voyez *P. J. Uylenbroek.*
„ Voyez *J. A. Vollgraff.*
Const. Huygens, Compoſitions muſicales. *66.*
„ Correſpondance et œuvre muſicales, éd *W. J. A. Jonckbloet* et *J. P. N. Land,* 1882. **82.**
„ Ghebruik, en Onghebruik van 't orgel in de kerken der Vereenighde Nederlanden, 1660. **64.**
„ Lettres, éd. *J. A. Worp,* T. III, 1891. 33.
„ Pathodia ſacra et profana occupati, 1647 et 1882. *617.*
C. von Jan ou *Janus.* Voyez Muſici ſcriptores græci.
St. Jean. Voyez *Apocalypſe de St. Jean.*
J. Jeans, Science and muſic, 1938. **144.**
W. J. A. Jonckbloet. Voyez *Conſt. Huygens.*
M. C. Jordan, Cours d'analyſe, 1893. **372.**
J. Kepler, Chilias logarithmorum, 1624. 294.
A. Kircher, Muſurgia univerſalis, 1650. 110, **123,** 124—127.
D. J. Korteweg, La ſolution de Chriſtiaan Huygens du problème de la chaînette, 1900—1901. **551.**
A. de Lalouvère ou *Lalovera,* Quadratura circuli, 1651. *620.*
J. P. N. Land, Het toonſtelſel van Chr. Huygens, 1891. **44,** 58, 82, 144, 145, 149.
„ Joan Albert Ban en de theorie der toonkunst. **82.**
„ Voyez *Conſt. Huygens.*
W. Lange, Epiſtola ad Meibomium, 1656. 9.
J. Lefèvre d'Etaples. Voyez *Faber Stapulenſis.*
G. W. Leibniz, Der Briefwechſel mit Mathematikern, éd. *C. I. Gerhardt,* 1899. **391,** 393.
„ De vera proportione circuli ad quadratum circumſcriptum in numeris rationali-
„ bus, 1682. **388.**
„ Diſſertatio de arte combinatoria, 1666 et 1690. 400.
„ Lettres à Oldenburg, 1674. 388, 621.
„ Meditatio nova de natura anguli contactus et oſculi, 1686. 454.
„ Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus etc. 1684. **485.**
„ Problème propoſé en 1687 ſur la courbe de deſcente uniforme. 486, **489, 497,** 600.
„ Quadratura arithmetica (manuſcrit de 1675). 375, 388.
„ Quadratura arithmetica communis ſectionum conicarum quæ centrum habent etc. 1691. **375.**

C. Lepaige, Notes pour ſervir à l'hiſtoire des mathématiques dans l'ancien pays de Liège. **173**.
„ Voyez *Sluſius*.
G. Loria, Le ricerche inedite di Evangeliſta Torricelli ſopra la curva logarithmica, 1900. 554.
„ Spezielle algebraiſche und tranſcendente ebene Kurven, Theorie und Geſchichte, éd. allemande de *Fr. Schütte*, 1902. **165**.
E. Loulié, Eléments ou principes de muſique, 1696 et 1698, **69**.
P. Maillart, Les tons, ou diſcours ſur les modes de muſique, et les tons de l'égliſe. **118**, **119**.
Fr. Maſeres, Scriptores logarithmici, 1791—1807. **205**, 261, 302.
Fr. Maurolycus. Voyez *Euclide*.
M. Meibomius, Antiquæ muſicæ auctores ſeptem, 1652. 8, 86, 87, **90**, 91, 93—100, 155.
„ De fabrica triremium, 1671. 9.
„ De proportionibus dialogus, 1655. 5, 7, **8**, 9, 13.
„ Obſervationes ad loca quædam librorum decem M. Vitruvii de Architectura. 9.
„ Reſponſio ad Langii epiſtolam, 1657. 9.
H. Menge. Voyez *Euclide*.
N. Mercator, Logarithmotechnia, 1667, 1668, 1674 et 1791. 11, 201, 214, **261**, 296, 302.
„ Some illuſtrations of the Logarithmotechnia, 1668. **261**.
M. Merſenne, Balliſtica, 1644. 173.
„ Cogitata phyſico-mathematica, 1644. 199, 214.
„ Correſpondance, éd. *M.me P. Tannery* et *C. de Waard*, II, 1933. 27, 34, 67.
„ De la vérité des ſciences, 1625. 66, 67, 86, 409, 410.
„ Harmonicorum libri, 1635. 409, 410.
„ Harmonie univerſelle, 1636. 26, 28, 29, 33, 37, 65, 68, 87, 120, 122, 124, 126, 142, 144, 163, 171, 199, 409, 410.
„ Nouvelles obſervations phyſiques et mathématiques, 1636. 34.
„ Novarum obſervationum phys. math. T. III, 1647. 201.
„ Queſtions harmoniques, 1633. **115**, 121, 179.
„ Queſtions inouyes ou recreation des ſcauans, 1633. 179.
„ Queſtions théologiques, phyſiques, morales et mathématiques, 1634. 28, 33.
„ Traité de l'harmonie univerſelle, 1627. 28.
„ Traité des conſonances, des diſſonances, des genres, des modes et de la compoſition, 1636. 26, 33, 34, 37, 69, 70, 120, 126, 141, 142, 149, 162, 169.
„ Traité des inſtruments, 1636, 29, 34, 35, 37, 121, 122, 142.
„ Traitez de la nature des ſons et des mouvements etc. 1636. 26, 87, 124.
„ Traitez de la voix et des chants, 1636. 410.
„ Univerſæ geometriæ mixtæque mathematicæ ſynopſis, 1644. 199.
Méſomède, Hymnes à Calliopé, à Phébus, et à Néméſis. **89**.
A. Mieli. Voyez *Brunet*.
J. de Muris, Muſica practica, 1321. 124.
„ Muſica ſpeculativa, 1323. 124.
„ Quæſtiones ſuper partes muſicæ. 129.

Mufici fcriptores græci *Ariftoteles, Euclides, Nicomachus, Bacchius. Gaudentius, Alypius* avec Supplementum (Melodiarum reliquiæ), éd. *C. Janus*, 1895—1899. **89**.
J. G. Neidhardt, Sectio canonis harmonici, 1724. 145.
J. Neper (ou *Napier*) Mirifici logarithmorum canonis defcriptio, 1614. 6, 447, 459.
„ Voyez *Gravelaar*.
„ Voyez Napier Tercentenary Memorial Volume.
I. Newton, Lettres à Oldenburg, 1676. 374, 376, 391, 393.
„ Philofophiæ naturalis principia mathematica, 1687. 448, 485, 486.
„ Opera quæ exftant omnia, éd. *S. Horfley*, 1779. 376, 391, 392.
Nicomaque (Nicomachus Gerafenus), Arithmétique. 5.
„ Harmonices manuale. **91**, 99.
„ Voyez Mufici fcriptores græci, éd. *C. Janus*.
H. Oldenburg, Excerpta ex epiftolis nonnullis, ultrò citróque ab illuftriffimis viris, Slufio & Hugenio, ad editorem fcriptis, 1673. **218**.
C. le Paige. Voyez *Lepaige*.
Bl. Pafcal, Lettre de A. Dettonville à Monfieur Hugguens de Zulichem, en luy envoyant la dimenfion des lignes de toutes fortes de roulettes etc., 1659. 453.
„ Voyez *Bofmans*. Il s'agit du Traité du triangle arithmétique de 1665.
Ch. et P. Perrault, Oeuvres diverfes de phyfique et de mechanique I, 1721. **129**.
Cl. Perrault, De la mufique des anciens, 1680. 130, **131**, 132, 133.
„ Effais de phyfique, 1680—1688. 130.
„ Le parallèle des anciens et des modernes, 1688—1697. 85.
Pindare, Carmina, éd. *W. Chrift*, 1896. 132.
„ Lettre à Hiéron. 131, 132.
„ Ode (dite de P., fragment). 85, **89**, 110, **126**.
„ Voyez *Friedländer*.
H. Pipegrop. Voyez *Baryphonus*.
Platon, Voyez *Theo Smyrnaeus*.
Plaute (T. Maccus Plautus), Comoediæ (e. a. Mercator et Trinummus), éd. *G. Goetz*. 1906—1907. **81**.
Pline (C. Plinius Secundus), Hiftoria naturalis, éd. *J. Harduinus*, 1783. 132.
Plutarque. De mufica. 80, 179.
J. Pollux. Pollucis Onomafticum, éd. E. Bethe, 1900. 96.
Porphyre ou *Porphyrios*, Kommentar zur Harmonielehre des Ptolemaios, éd. *I. Düring* (grec et allemand), 1932. **5**.
A. Prag, John Wallis (1616—1703), 1931. **390**.
Ptolémée (*Kl. Ptolemaios*), Harmonika. 27, 180; éd. *A. Gogavinus* (1562): 96; éd. *J. Wallis*
„ (1682): 63, 78, 79, **80**, 88, 90—93, 95, 96, 99, **100**, 102, 212; éd. *I. Dühring* (1930): 79, 90—93, 95, 99, 100.
„ Manufcrits. 180.

Ptolémée (Kl. Ptolemaios), Tractatus de judicandi ſacultate et animi principatu, éd. *I. Boulliau*, 1663. 180.
„ Voyez *Wallis*.
E. Puteanus, Modulata Pallas, 1599. 119.
„ „ „ , 2ième édition, appelée auſſi Muſathena, 1602, **119**, 120.
„ Oeuvres. 119.
Th. Reinach, La muſique grecque, 1926. 96, 114.
M. A. Ricci, Geometrica exercitatio de maximis et minimis, 1666 et 1668. **302**.
K. W. J. H. Riemann, Geſchichte der Muſiktheorie im IX—XIX Jahrhundert, 1898. 7, 144, 158.
„ Muſiklexikon, 9ième éd. 1919. 137, 145.
„ „ *(Riemann—Einſtein)*, 11ième éd. par *Alfred Einſtein*, 1929. 7, 145.
F. Risner. Voyez *Alhazen* et *Vitellio*.
O. Römer, Solution d'un problème ſur le quadrilatère. 440.
Fr. Salinas, De muſica libri ſeptem etc., 1577. 35, **45**, 46, 78, 111—118, 122, 142, 143, 149, 155, 157, 162.
Th. Salmon, An eſſay to the advancement of muſick, 1672. 63, 136, **137**.
A. A. de Saraſa, Solutio problematis a R. P. Marino Merſenno propoſiti etc., 1649. 200—202, 206.
A. Schlick, Spiegel der Orgelmacher und Organiſten, 1511 et 1869 (éd. *R. Eitner*). 45.
P. A. Scholes, The Oxford companion to muſic, 1938. **63**.
Fr. v. Schooten. Voyez *des Cartes* et *Viète*.
„ Appendix [aux Commentarii in Libros Geometriæ R. Carteſii] de cubicarum æquationum reſolutione. 389.
F. Schuh, Sur quelques formules approximatives pour la circonférence du cercle et ſur la cyclométrie de Huygens, 1914. **259**, 369, 374.
„ Voyez Chr. Huygens.
Fr. Schütte. Voyez *Loria*.
Scriptores logarithmici. Voyez *Maſeres*.
H. Sherwin, Mathematical Tables, éd. *Ch. Hutton* de 1785. 205.
Simplicius, In Ariſtotelis Categorias commentarius. 620.
Chr. Simpſon, A compendium, or introduction to practical muſick, 1655 etc., 8ième éd. 1678. **130**.
R. de Sluſe ou *Sluſius*, Correſpondance, éd. *Lepaige* (ou *le Paige*), 1885. **219**.
„ „ Meſolabum, 1659 et 1688. 334, 335, 340, 358—360, 403.
„ „ Voyez *Oldenburg*.
D. E. Smith, The law of exponents in the works of the ſixteenth century, 1915. **6**.
W. Snellius. Voyez *van Ceulen* et *Stevin*.
S. Stevin, Arithmetique, 1585. **371**, 372, 373.
„ Bijvoegh der Singconſt. 28, 33.
„ Eertclootſchrift, 1608. 33.
„ Hypomnemata mathematica, trad. de *W. Snellius*, 1608. 27, 33, 371.

S. Stevin, Libri geographiæ, 1608. 33, 371.
„ Livres de géographie, éd. *A. Girard*, 1634. **64**.
„ Oeuvres mathématiques augmentées par *A. Girard*, 1634. 33, 64, 371.
„ Vande molens, manufcrit et éd. *D. Bierens de Haan*, 1884. 32.
„ Vande fpiegeling der fingkonft, manufcrit. 27, 28, 32, 33, **34**, 35.
„ Vande fpiegeling der fingkonft, éd. *D. Bierens de Haan*, 1884. **32**, 65, 171.
„ Wifconftige Ghedachteniffen, 1608. 33. Voyez auffi Hypomnemata mathematica.
„ Voyez *Diophante*.
A. Tacquet, Elementa geometriæ planæ ac folidæ quibus accedunt felecta ex Archimede theoremata, 1654 et 1665. 185, **186**, 187.
P. Tannery, Du rôle de la mufique grecque dans le développement de la mathématique pure, 1902 et 1915. **6**.
„ Lettre à H. Bofmans, 1902. **206**.
„ Lettre à M. Cantor, 1891. **221**.
„ Mémoires fcientifiques, éd. *J. L. Heiberg* et *H. G. Zeuthen*, 1915—1934. **6**, 12, 199, 206, 221.
„ Voyez *des Cartes* et *Fermat*.
M.me P. Tannery. Voyez *Merfenne*.
Théocrite, Idylles. Voyez Bucolicæ græci.
Theo Smyrnæus, Τῶν κατὰ μαθηματικὴν χρήσιμα εἰς τὴν τοῦ Πλάτωνος ἀνάγνωσιν, éd. *I. Boulliau*, 1644. 5, 11, 177, 180, 377.
„ Manufcrits. **180**.
J. Titelouze, Lettre à Merfenne, 1662. 27.
E. Torricelli, Opera mathematica. 1644. 554.
„ Voyez *Loria*.
E. W. Tfchirnhaus, Medicina mentis, 1687. 485, 502.
„ Voyez *F. de Duillier*, *de Volder* et *Vollgraff*.
P. J. Uylenbroek, Chr. Hugenii aliorumque feculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicæ et philofophicæ, 1833. 485, **491**, 493, 505.
A. Vas Nunes, Experimenteel onderzoek van klokken van F. Hemony, 1909. **49**.
A. Verheyen, Lettre à S. Stevin. **35**.
L. (da) Viadana, Opera omnia facrorum concentuum etc. cum baffo continuo et generali organo applicato etc., 1620. 618.
N. Vicentino, L'antica mufica ridotta alla moderna prattica, 1555. 144, 157.
F. Vieta, Opera mathematica, éd. *F. van Schooten*, 1646. 217.
Virgile (P. Virgilius Maro), Aeneis. 416.
Vitellio, Opticæ libri X, éd. *F. Rifner*, 1572. 270, 330.
Vitruve (M. Vitruvius Pollio), De Architectura. 9.
V. Viviani, De maximis et minimis geometrica divinatio in quintum Conicorum Apollonii Pergæi adhuc defideratum, 1659. **298**, 299.

A. Vlacq, Arithmetica logarithmica (*Briggs*), ed. fec. aucta per Adr. Vlacq, 1628. 147. Voyez auffi *Briggs*.
„ Petites tables, éditions diverfes, 1661, 1665, 1681 etc. 204, 448, **456—458**, 459, 460.
B. de Volder, Démonftration fur les „curvæ filares" de Tfchirnhaus, 1687. 597.
J. A. Vollgraff, Démonftration mécanique des théorèmes de Tfchirnhaus confidérés dans le T. XX des Oeuvres Complètes de Chr. Huygens, 1940. **504**.
„ Deux pages confécutives du Manufcrit G. de Chr. Huygens, 1940. **504**.
H. de Vries, Defargues, 1934. 221.
„ Hiftorische ftudien, 1934. **221**.
C. de Waard, Biographie de Fr. v. Schooten. **209**.
„ Voyez Fermat et Merfenne.
J. Wallis, Adverfus Meibomium de proportionibus tractatus elencticus, 1657. 13, 214.
„ Appendix [ad Ptolemæi Harmonika]. De veterum harmonia ad hodiernam comparata, 1682. 80, **100**, 102.
„ Arithmetica infinitorum, 1655. 213, 223, 258, 372, 373, 389—391, 513, 554.
„ Arithmetica univerfalis, 1655. 372. Voyez les Additions et Corrections.
„ Articles fur la mufique. 212.
„ A treatife of algebra both hiftorical and practical. 1685. 374, 376, 379, 389—394, 449, 454.
„ Hobbiani puncti difpunctio, 1657. 258.
„ Lettre à Leibniz, 1693.
„ Mathefis univerfalis, 1657. 202, 258, 620.
„ Opera mathematica. 389, 391.
„ Opera mathematica, I, 1695. 217, 373.
„ „ „ II, 1693. 391.
„ „ „ III, 1699. 554.
„ Thomæ Hobbes quadratura circuli etc. confutata, 1669. 381.
„ Tractatus algebræ auctus, 1693. 389, 488.
„ Tractatus de fectionibus conicis, 1655. 215, 217, 258.
„ Tractatus duo de cycloide, de ciffoide etc., 1659. 212, 258.
„ Voyez *Bryennius* et *Ptolémée*.
H. Weiffenborn, Lebensbefchreibung von Ehrenfr. Walther von Tfchirnhaus auf Kiefflingswalda, und Würdigung feiner Verdienfte, **483**.
A. Werckmeifter, Muficalische Temperatur, 1691. 18, 100, **133**, 134, 135.
R. Weftphal, Ariftoxenus von Tarent, Melik und Rhytmik des claffifchen Hellenentums, 1883. 78, 114.
W. Whewell. Voyez *Barrow*.
J. de Witt, Elementa curvarum, 1659. 216, **217**, 220, 221.
J. A. Worp. Voyez *Conft. Huygens*.
W. Wotton, Reflections upon ancient and modern learning, contenant e.a. un Difcours de *J. Craig* touchant l'arithmétique et géométrie, et un difcours de *E. Halley* of ancient and modern aftronomy and optics, 1694. 489, 553, 554.

M. Zacharias (voyez auſſi *Deſargues*), Erſter Entwurf eines Verſuchs über die Ergebniſſe des Zuſammentreffens einer Kegel mit einer Ebene, traduction allemande de 1922 d'un ouvrage de *Deſargues*, **192**.

G. Zarlino, Dimoſtrazioni harmoniche, 1571, 1573 et 1589. **15**, **16**, 115—118, 168, 171.

„ Iſtituzioni harmoniche, 1558, 1562, 1573 et 1589. **15**, 46, 101, 114—118, 162, 171.

„ Sopplementi muſicali, 1588, 1589. 35, **65**, 71, 114—116.

„ Traité ſur la patience. 45.

„ Tutte l'opere, 1589. **15**, 114, 116.

„ Voyez *Vincentio Galilei*.

Acta Eruditorum. 19, 480, 486, 603.

„ 1682. 388.

„ 1684. 485.

„ 1685. 492.

„ 1686. 390.

„ 1689. 397.

„ 1691. 375, 481, 551.

„ 1693. 481, 552.

„ 1694. 481, 552, 621.

Apocalypſe de Saint-Jean. 125.

Archives néerlandaiſes des ſciences exactes et naturelles, 1914. **259**.

Berichte über die Verhandlungen der Sächſiſchen Akademie der Wiſſenſchaften zu Leipzig, 1934. **126**.

Bibliotheca mathematica, publ. p. *G. Eneſtröm*. **6**.

Bibliothèque univerſelle et hiſtorique, 1687. 484.

„ „ 1689. 484.

Bulletin de l'inſtitut archéologique liégeois, 1889. 173.

Bullettino di bibliografia e di ſtoria delle ſcienze matematiche e fiſiche, T. XIV—XVI, 1881—1883. 458.

Catalogue de la vente des livres de Chr. Huygens, 1695. 46, 87, 116, 127, 180, 204, 389, 393, 447, 458.

Catalogue de la vente des livres de Conſt. Huygens, 1687. 28, 46.

Chriſtiaan Huygens, revue, 1921. 364.

Die Haghe, annuaire, 1938. **69**.

Divers ouvrages de mathematique et de phyſique par MM. de l'Academie Royale des Sciences, 1693. 207, 219, 229, 243, 270, 271, 273, 410.

Euclides, revue, 1932/1933. **621**.

Hiſtoire de l'Académie Royale des Sciences depuis 1666 juſqu'à ſon renouvellement en 1699. 1733. 220.

Hiſtoire des ouvrages des ſçavans, périodique, 1691. 141, 147, 164, 488.

„ „ 1693. 481, 550, 551, 606.

Hiftorifche bibliotheek voor de exacte wetenfchappen, 1929 et fuiv. 584.
Intermédiaire des mathématiciens, 1900. 199.
Janus, archives internationales pour l'hiftoire de la médecine etc. 1940. **504.**
Journal des Sçavans, 1668, 259, 303, 308, 311.
„ „ 1685. 492.
Livre de Daniel, traduction latine. 131.
Livre d'hymnes du dixième fiècle du couvent S. Salvador à Meffine. 124.
Manufcrits provenant de Conft. Huygens. 33.
Mathematical affociation of America. 7.
Mémoires de mathématique et de phyfique tirez du regiftre de l'Académie royale des fciences, 1692. 333.
Memoires de l'Academie Royale des Sciences, depuis 1666 jufqu'à 1699, 1729. 410, 419.
Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Inftitut de France, 1864. 211.
Monatfhefte für Mufikgefchichte, 1869. 45.
Napier Tercentenary Memorial Volume, publ. p. *C. G. Knott*. **6.**
Nieuw Nederlandfch biographifch woordenboek, 1927. 209.
Nouvelles de la république des lettres, 1687. 481, 487, 505, 598.
Oftwalds Klaffiker der exakten Wiffenfchaften, N° 179, 192.
Patrologia latina, T. XXXII, 1877. **121.**
Philofophical Tranfactions. 1668. 259, 261, 302.
„ „ 1673. 218.
Quellen und Studien zur Gefchichte der Mathematik, 1931. **390.**
Regiftres de l'Académie Royale des Sciences, 196, 206—208, 214, 215, 219, 225, 227, 229, 230, 241, 243, 256—261, 282, 285, 286, 288, 335.
Revue des queftions fcientifiques, 1924. **390.**
The American mathematical Monthly XXXI, 1924. 7.
Tijdfchrift der Vereeniging voor Noord-Nederlands Muziekgefchiedenis, 1891. 44, 82.
Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenfchappen, 1899. **6.**
Verflagen en mededeelingen der Koninklijke Akademie, Afd. Natuurkunde, 1884. 32.

IV. PAGES DES MANUSCRITS F, G, H ET I SE RAPPORTANT À DES SUJETS DE MATHÉMATIQUE PURE QUI ONT ÉTÉ CITÉES OU PUBLIÉES, EN TOUT OU EN PARTIE, DANS LES TOMES IX ET X CONTENANT LA CORRESPONDANCE ANNOTÉE ET POURVUE D'APPENDICES DES ANNÉES 1685—1695 [1]).

Manuscrit F,	p. 235	publiée [2])	dans le	T. IX,	p. 117. Pièce de 1686 de Fatio de Duillier sur certaines épicycloïdes.
„	p. 261—265	citées [2])	„ „	T. IX,	p. 132—133 [1687]. „Problème [diophantique] de Mr. de Maroles".
„	p. 270—271	citées	„ „	T. IX,	p. 174.
„	„	publiées	„ „	T. IX,	p. 181—183. C'est la Pièce de mars 1687 réimprimée dans le présent Tome aux p. 491—493 (§1 et §2).
„	p. 277	publié	„ „	T. IX,	p. 167. Sommaire de la lettre envoyée par Huygens à J. d'Alencé le 20 juin 1687 avec les copies de certains traités devant être imprimés à Paris. Une autre partie de la p. 277 a été publiée dans le présent Tome (p. 500, note 9).
„	p. 278	citée	„ „	T. IX,	p. 187. A propos d'une démonstration de B. de Volder sur les „curvæ filares" de Tschirnhaus (juillet 1687).
„	p. 280	publiée	„ „	T. IX,	p. 198. Sommaire de la lettre du 27 août 1687 de Huygens à H. Coets sur un problème mathématique de ce dernier.
„	p. 281	citée	„ „	T. IX,	p. 202. Calcul se rapportant à celui de la p. 285 du Manuscrit.

[1]) Cette liste a été mentionnée à la p. 480 qui précède.

[2]) „Publiée" veut dire „publiée *dans le texte* du T. IX ou du T. X"; „citée" veut dire „citée, résumée ou publiée *dans les notes* du T. IX ou du T. X".

Manuscrit F, p. 285	publiée	dans le T. IX,	p. 201—202 (appendice à la lettre à H. Coets du 27 août 1687). Sur le point d'inflexion de la conchoïde.
„ p. 297	publiée	„ „ T. IX,	p. 224—226. „Solution du Probleme proposé par M. Leibnitz dans les nouvelles de la Republique des Lettres du Mois de Septembre 1687". Comparez les p. 481 et 505 du présent Tome.

Manuscrit G [3]), p. 9r	citée	dans le T. X,	p. 218 [1691]. Passage qui se rapporte au problème de la chaînette.
„ p. 37r [4])	citée	„ T. X,	p. 72.
„ „	publiée	„ T. X,	p. 73 (Appendice à la lettre à A. de Graaff de mars 1691). Rectification de la catacaustique du cercle pour le cas de rayons parallèles. Voyez sur cette Pièce les 4 dernières lignes de la p. 503 du présent Tome.
„ p. 50r et v,	citées	„ T. IX,	p. 439—440. A propos de „la maniere du marquis de l'Hospital" pour trouver la place du centre d'oscillation dans le cas d'une série de poids punctiformes. Voyez sur cette manière les p. 461—464 du T. XVIII. Ces pages du Manuscrit se rattachent à la lettre de Huygens à de l'Hospital du 6 juillet 1690.
„ p. 51v [Hg. 1],	citée	„ T. X,	p. 245.
„ p. 51v et 52r [Hg. 1 et 2]	citées	„ T. IX,	p. 472. Voyez aussi sur ces deux pages le § 27 de la Pièce III à la p. 540 du présent Tome.
„ „	publiées	„ T. IX,	p. 473—475 (Appendice à la lettre à Leibniz du 24 août 1690). Huygens choisit les formules de deux soustangentes pour les proposer à Leibniz: voyez les l. 9—10 de la p. 487 du présent Tome.

[3]) Nous citons tant la pagination générale que celle de Huygens. La page 1 de Huygens, que nous désignons par Hg. 1, correspond à la p. 51v de la pagination générale, etc.

[4]) A la p. 72 du T. X le numéro de la page citée du Manuscrit G n'est pas indiqué.

Manuscrit G, p. 57v et 58r [Fig. 13 et 14]		publiées dans le	T. IX,	p. 504 (§ II de l'Appendice II à la lettre à Leibniz du 9 octobre 1690). Rectification de la chaînette etc.
„	p 58r [Fig. 14],	citée	„ T. IX,	p. 541.
„	p. 59r [Fig. 16],	publiée	„ T. IX,	p. 505 et 507 (§ III et VI de l'Appendice II à la lettre à Leibniz du 9 octobre 1690). Rectification de la chaînette. Quadrature de la surface de révolution de la même courbe etc.
„	p. 59v [Fig. 17],	publiée	„ T. IX	p. 506 (§§ IV et V de l'Appendice II à la lettre à Leibniz du 9 octobre 1690). Rectification de la développée de la chaînette etc.
„	p. „ „	publiée	„ T. IX	p. 541—542 (§ I de l'Appendice à la lettre à Leibniz du 18 novembre 1690). Réduction, en deux étapes, de la quadrature de la courbe $x^2y^2 = a^4 - a^2y^2$ à celle de la courbe $x^2y^2 = 4a^4 - x^4$: ici la quadrature de la première courbe est réduite à une somme infinie de sécantes. Ceci fait partie des calculs sur la chaînette.
„	p. 61r [Fig. 20],	publiée	„ T. IX,	p. 507—509 (§§ VII et VIII de l'Appendice II à la lettre à Leibniz du 9 octobre 1690). Construction des courbes $x^2y^2 = a^2x^2 - a^2y^2$ et $x^2y^2 = a^4 - a^2y^2$, dont la quadrature sert à la rectification de la chaînette.
„	p. 61v [Fig. 21],	publiée	„ T. IX,	p. 509—510 (§ IX de l'Appendice II à la lettre à Leibniz du 9 octobre 1690). Calcul de nombres proportionnels à un certain arc, une certaine abscisse et une certaine ordonnée.
„	p. 62v et 63r [Fig. 23 et 24]	publiées	„ T. IX,	p. 500—501 (Appendice I à la lettre à Leibniz du 9 octobre 1690). Explication d'un anagramme sur la solution du problème de la chaînette.
„	p. 64r [Fig. 26]	publiée	„ T. X,	p. 192—193 (Appendice à la lettre à Leibniz du 16 novembre 1691). Calcul d'une limite supérieure et d'une limite inférieure de $\int_0^{\varphi} \sec\varphi \, d\varphi$.

Manuscrit G, p. 69r [Fig. 34bis] citée „ T. IX, p. 541.

„ p. „ „ publiée „ T. IX, p. 542—543 (§ II de l'Appendice à la lettre à Leibniz du 18 novembre 1690). Réduction, en deux étapes, de la quadrature de la courbe $x^2y^2 = a^4 - a^2y^2$ à celle de la courbe $x^2y^2 = 4a^4 - x^4$. Une somme infinie de sécantes est réduite à la quadrature de la deuxième courbe. Ceci fait partie des calculs sur la chaînette.

„ p. 69v [Fig. 35] publiée „ T. X, p. 63—64 (§ I de l'Appendice II à une lettre à Leibniz du 26 mars 1691). Recherches qui ont mené aux résultats formulés dans l'anagramme proposé par Huygens à Leibniz dans cette lettre.

„ p. 71v et 72r [Fig. 39 et 40] publiées „ T. IX, p. 573—576 (Appendice à une lettre à Leibniz du 19 décembre 1690). Détermination de quelques courbes, les soustangentes étant données.

„ p. 73r et v [Fig. 44 et 45] citées „ T. IX, p. 568. Brouillon de la lettre à Leibniz du 19 déc. 1690.

„ p. 73v et 74r [Fig. 45 et 46] publiées „ T. IX, p. 45—47 (Appendice II à la lettre à Leibniz du 23 février 1691). Calcul de logarithmes népériens, et du module du système décimal. Ce module étant connu, manière de déduire les logarithmes briggiens des logarithmes népériens.

Comparez la note 3 de la p. 472 du présent Tome.

„ p. 74v [Fig. 47] publiée „ T. IX, p. 226—228 (Appendice I à la Pièce No. 2489 — comparez la p. 481 qui précède — c.à.d. „Solution" de Huygens dans les Nouvelles de la Republique des Lettres du 8 oct. 1687 du „Probleme proposé par M. Leibnitz [en] Septembre 1687". Il s'agit de la courbe de descente uniforme.

„ p. 75v—81v [Fig. 49—61] publiées „ T. X, p. 23—42 (§§ I—X de l'Appendice I à la lettre à Leibniz du 23 février 1691), traitant „de descensu corporum gravium et ascensu

				per aerem aut materiam aliam, quæ reſiſtit motui in ratione duplicata celeritatum, ut revera contingit" et contenant e.a. la réduction de la ſommation de la ſérie $b + \frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{5}b^5 + \ldots$ à la quadrature de l'hyperbole, et l'emploi de cette ſérie au calcul des logarithmes. Voyez auſſi ſur la p. 79v les p. 467—468 du préſent Tome et ſur la p. 80r les §§ 1 et 1 bis de la Pièce III aux p. 507 et 508 qui précèdent.
Manuscrit G,	p. 80r [Hg. 58]	publiée	„ T. X,	p. 64—65 (§ II de l'Appendice II à la lettre à Leibniz du 26 mars 1691). Quadrature d'une certaine aire. Ceci ſait partie des calculs ſur la chaînette.
„	p. 84r [Hg. 66]	citée	„ T. X,	p. 211. La note du T. X ſe rapporte à une lettre du 18 décembre 1691 à Fatio de Duillier, où Huygens traite d'un problème des tangentes renverſées en faiſant uſage du théorème de Barrow. Comparez le § 1 de la Pièce III à la p. 507 du préſent Tome.
„	p. 89r [Hg. 76]	publiée	„ T. IX,	p. 229 (Appendice II à la Pièce No. 2489). „Problema Leibnitſii de æquali deſcenſu in curva, ſuperius reſolutum, etiam hoc modo invenitur". Une autre partie de la p. 89r eſt publiée à la p. 513 du préſent Tome (§ 6 de la Pièce III).
„	p. 90r [Hg. 78]	publiée	„ T. X,	p. 43 (§ XI de l'Appendice I à la lettre à Leibniz du 23 février 1691). Comparaiſon des durées de l'aſcenſion et de la deſcente d'un corps peſant jeté en haut avec la viteſſe terminale dans le cas d'une réſiſtance proportionnelle au carré de la viteſſe.
„	p. 93r [Hg. 82]	publiée	„ T. X,	p. 65 (§ III de l'Appendice II à la lettre à Leibniz du 26 mars 1691). Application de la quadrature obtenue dans le § II. Ceci ſe rapporte à la chaînette.
„	p. 93v [Hg. 83]	citée	„ T. X,	p. 68.
„	p. 93v et 94r [Hg. 83 et 84]	publiées	„ T. X,	p. 59—62 (Appendice I à la lettre à Leibniz

				du 26 mars 1691). Explication de l'anagramme envoyé par Huygens à Leibniz dans cette lettre; l'anagramme ſe rapporte au problème de la chaînette.
Manuscrit G,	p. 94v [Hg. 87]	publiée	„ T. X.	p. 66—69 (§ IV de l'Appendice II à la lettre à Leibniz du 26 mars 1691).
„	p. 95r et v [Hg. 88 et 89][5])	citées	„ T. IX,	p. 510 (note ſe rattachant au § IX de l'Appendice II à la lettre à Leibniz du 9 octobre 1690). Calcul d'ordonnées à l'aide de logarithmes.
„	p. 97r [Hg. 92]	publiée	„ T. IX,	p. 502 (§ I de l'Appendice II à la lettre à Leibniz du 9 octobre 1690). „Fundamentum omnium eorum quæ de curva catenæ reperimus".
„	p. 97v [Hg. 93]	citée	„ T. IX,	p. 511.
„	p. „ „	citée	„ T. IX,	p. 512 [1690]. Sur la catacauſtique de Tſchirnhaus. Comparez ſur la première conſtruction erronée de Tſchirnhaus la note 15 de la p. 503 du préſent Tome.
„	p. 101r [Hg. 100]	citée	„ T. X,	p. 75. La note du T. X ſe rapporte à la lettre à Fatio de Duillier du 3 avril 1691. Il eſt queſtion dans ce paſſage d'une ſolution par Fatio du ſecond des problèmes propoſés par Huygens à Leibniz en août 1690 (voyez dans la préſente liſte Man. G. p. 51v et 52r = T. IX p. 473—475).
„	p. 101v [Hg. 101]	citée	„ T. X,	p. 223. A propos de la méthode de Fatio de Duillier pour intégrer les „équations différentielles" (problème des tangentes renverſées). Cette note du T. X ſe rapporte à la lettre à Leibniz du 1 janvier 1692. Voyez ſur cette page le § 12 de la Pièce III aux p. 517—518 qui précèdent (et auſſi ſur les p. 101r et 101v le § 13).
„	p. 106v [Hg. 111]	citée[6])	„ T. X,	p. 87. La note du T. X ſe rapporte à la lettre

[5]) La note 20 de la p. 510 du T. IX dit à tort que les p. 95r et v de la pagination générale sont les p. 90 et 91 de Huygens.

[6]) Avec introduction des ſymboles *dx* et *dy* de Leibniz dans les „équations différentielles" du texte de Huygens.

			à Leibniz du 21 avril 1691. Il s'agit dans ce paſſage du déguiſement des expreſſions qui repréſentent les ſouſtangentes conſidérées ou, ſi l'on veut, de celui des équations différentielles à intégrer. Voyez ſur la p. 106v le § 16 de la Pièce III à la p. 522 du préſent Tome.
Manuscrit G,	p. 108r [Fig. 114] citée	„ T. X,	p. 96. La page du Manuſcrit porte la ſuſcription „miſſa ad auctores actorum Lipſienſium 5 Maj 1691" et ſe rattache à la Pièce No. 2981 — comparez la p. 481 qui précède — ſavoir la „Chr. Hugenii . . . Solutio ejuſdem problematis", c. à. d. du problème de la chaînette. Dans les Acta Eruditorum cette Pièce ſuit la „Solutio problematis funicularii, exhibita a Iohanne Bernoulli".
„	p. 109v [Fig. 117] citée	„ T. X,	p. 247 [1691]. Expreſſion qui repréſente la ſouſtangente d'une circonférence de cercle. Comparez le § 20 de la Pièce III à la p. 529 du préſent Tome.
„	p. 111r [Fig. 120] citée	„ T. X,	p. 223. A propos de la méthode de Fatio de Duillier pour intégrer les „équations différentielles" (problème des tangentes renverſées). Cette note du T. X ſe rapporte à la lettre à Leibniz du 1 janvier 1692. Comparez le § 23 de la Pièce III à la p. 535 du préſent Tome.
„	p. 116v—119r [Fig. 131—136] citées	„ T. X.	p. 129. Ces pages qui portent les dates du 5, 6 et 7 août 1691, contiennent l'examen de Huygens de la ſolution par Jean Bernoulli du problème de la chaînette. La note du T. X ſe rapporte à la lettre à Leibniz du 1 ſeptembre 1691.
„	p. 119v et 120r [Fig. 137 et 138] publiées	„ T. X,	p. 135—138 (Appendice à la lettre à Leibniz du 1 ſeptembre 1691). Quadrature de la chaînette et détermination des centres de gravité de l'arc et de l'aire d'un ſegment de cette courbe, avec vérification d'un théorème de Jean Bernoulli.

Manuscrit G,	p. 121r et v [Hg. 140 et 141] publiées	„ T. X,	p. 127—128. Sommaire de la lettre à Leibniz du 1 feptembre 1691.
„	p. 122r [Hg. 142] citée	„ T. X,	p. 131 [1691]. Calcul des aires de certains fegments de la chaînette.
„	p. 123v [Hg. 145] citée	„ T. X,	p. 140 „Inveni 1 Sept. 1691, momento poft quam ad Leibnitfium literas dediffem in quibus querebar hactenus non potuiffe me hoc invenire, nempe conftructionem Catenariæ ex data menfura lineæ Parabolicæ vel quadratura Hyperbolæ". La note du T. X fe rapporte à la lettre à Leibniz du 4 fept. 1691.

Nous obfervons en paffant que la p. 126r [Hg. 150] a été publiée aux p. 377—378 du T. XIV, comme nous le difons auffi à la p. 470 (Pièce VII) ainfi que dans la note 3 de la p. 475 du préfent Tome.

Manuscrit G,	p. 127v [Hg. 153] citée	„ T. X,	p. 186 (et T. X, p. 418—419). Achèvement de la conftruction de la chaînette en faifant ufage de certains réfultats obtenus par James Gregory dans fes „Exercitationes geometricæ" de 1668 fur la fomme des fécantes. La note du T. X fe rapporte à la lettre à Leibniz du 16 novembre 1691. Voyez auffi fur ce fujet la p. 17 du Manufcrit I.
„	p. 128v et 129r [Hg. 155 et 156] citées	„ T. X,	p. 98. Commencement d'un article qui doit avoir été compofé dans les derniers mois de 1691. Voyez ci-deffous la publication des p. 216—218 du T. X.
„	p. „ „ „ publiées	„ T. X,	p. 216—218 [1691]. „Reflexions fur ce qui a paru touchant le Problème de la Chaînette".

Manuscrit H,	p. 8 citée dans le	T. X,	p. 222. Le 19 décembre 1691 commence l'examen de la méthode de Leibniz pour réfoudre le problème inverfe des tangentes. La note du T. X fe rapporte à la lettre à Leibniz du 1 janvier 1692.
„	p. 8 citée	„ T. X,	p. 247. Voyez fur cette p. 8 la Pièce IV („Methodus Leibnitij") à la p. 542 du préfent Tome.
„	p. 10—12 citées	„ T. X,	p. 222. Examen de la méthode de Leibniz.

Manuscrit H,	p. 14	publiée	„ T. X,	p. 309—310 (Appendice à la lettre à de l'Hofpital du 27 août 1692). Démonftration d'un théorème général fur les quadratures et application de ce théorème à la quadrature de la courbe $x^2y^2 = a^4 - a^2y^2$, dont dépend la conftruction par points (x, y) de la chalnette. A la même page le théorème de Barrow que nous publions aux p. 509—510 du préfent Tome (§ 1 ter de la Pièce III).
„	p. 18—40	citées et publiées	„ T. X,	p. 244—256. Calculs de 1692 fe rapportant à ceux de Hubertus Huighens.
„	p. 18—22	publiées dans le	T. X,	p. 249—252 (Appendice I à la lettre à Hubertus Huighens du 12 février 1692). Méthode de Huygens pour trouver l'ordonnée Be d'une courbe Ae quand l'aire AeB eft donnée en fonction de l'abfciffe AB. Etc.
„	p. 19	citée	„ T. X,	p. 245. Huygens renvoie à fa p. 1 du Manuscrit G (p. 51v de la pagination générale).
„	p. 21—22	citée	„ T. X,	p. 251—252.
„	p. 25	citée	„ T. X,	p. 248.
„	p. 28—36	citées	„ T. X,	p. 255. Cette note du T. X fe rapporte à la lettre à Hubertus Huighens du 15 février 1692.
„	p. 37	citée	„ T. X,	p. 246.
„	p. „	publiée	„ T. X,	p. 253—254 (Appendice II à la lettre à Hubertus Huighens du 12 février 1692).
„	p. 39	citée	„ T. X,	p. 262 [1692]. Huygens retrouve la manière dont Leibniz a conftruit une certaine aire quadrable en partant de la confidération d'une lunule d'Hippocrate.
„	p. 97	citée	„ T. X,	p. 300. „Contra Cartefii dogma, Corporis naturam feu notionem in fola extenfione confiftere". La note du T. X fe rapporte à la lettre à Leibniz du 11 juillet 1692. Nous avons de nouveau publié cette tirade à la p. 325 du T. XIX.
„	p. 99	citée	„ T. X,	p. 325. A propos de la rectification de la logarithmique par de l'Hofpital. La note du T. X fe rapporte à la lettre à de l'Hofpital du 22 octobre 1692.

Manuscrit H,	p. 101	citée	„ T. X,	p. 327. Même ſujet.
„	p. 104	publiée	„ T. X,	p. 333 (Appendice II à la lettre à de l'Hoſpital du 22 octobre 1692). Calcul du rayon minimal de la logarithmique. Comparez les p. 451 et 476 qui précèdent.
„	p. 106	publiée	„ T. X,	p. 330 (Appendice I à la lettre à de l'Hospital du 22 octobre 1692). Quadrature de la ſurface de révolution da la logarithmique tournant autour de ſon aſymptote.
„	p. 107	citée	„ T. X,	p. 326. Réduction d'une „ſomme des $aady : y\sqrt{aa+yy}$ à la quadrature de l'hyperbole". La note du T. X ſe rapporte à la lettre à de l'Hoſpital du 22 octobre 1692.
„	p. 108	publiée	„ T. X,	p. 356—357 (Appendice I à la lettre à de l'Hoſpital du 29 décembre 1692). Réduction de la quadrature de la courbe $x^2y^2 - a^2x^2 = a^4$ à celle de l'hyperbole.
„	p. 110—111 citées et publiées avec les p. 138—140		„ T. X,	p. 350 (note 14) et p. 364—373 (Appendice IV à la lettre à de l'Hoſpital du 29 décembre 1692). Démonſtration de théorèmes ſur certaines intégrations. Extenſion de théorèmes de Fermat. Application e.a. à la quadrature des courbes $x^4 - a^2x^2 + a^2y^2 = 0$ et $xy^2 + a^2x - a^3 = 0$.
„	p. 115	citée	„ T. X,	p. 329.
„	p. „	publiée	„ T. X,	p. 336—338 (Appendice III à la lettre à de l'Hoſpital du 22 octobre 1692). Sur le problème de Viviani. Sinuſoïde (linea ſinuum) et lignes cyclo-cylindriques. Comparez la note 1 de la p. 453 qui précède.
„	p. 117—137 citées et	publiées	„ T. X,	p. 409—412. Tractrice. Inſtruments propres à la décrire. Les notes du T. X ſe rattachent à la Pièce No. 2793 — comparez la p. 481 qui précède —, lettre à Baſnage de Beauval publiée dans l'Hiſtoire des Ouvrages des Sçavans en février 1693.
„	p. 117—118 citées et publiées avec les p. 128 et 166		„ T. X,	p. 418—422 (Appendice à la lettre à Bas-

nage de Beauval). Première découverte de la tractrice comme quadratrice de l'hyperbole. Découverte de la propriété de la tractrice de se laisser mesurer par elle-même. Construction de la tractrice au moyen de logarithmes, équivalant à la connaissance de son équation analytique. Cubature du solide de révolution décrit par l'aire comprise entre la tractrice et son asymptote. Centre de gravité de cette aire. Quadrature des surfaces de révolution décrites par la tractrice autour de son asymptote etc. Centre de gravité de la courbe. Tracé du cas particulier de la tractrice circulaire où la longueur du fil est égale au rayon du cercle directeur.

Manuscrit H, p. 128 citée et publiée avec les p. 117—118 et 166 „ T. X, p. 418—422.

„ p. 138—140 publiées avec les p. 110—111. „ T. X, p. 364—373.

„ p. 141—145 publiées „ T. X, p. 374—380 (Appendice V à la lettre à de l'Hospital du 29 décembre 1692). Quadrature du folium Cartesii.

„ p. 148 citée „ T. X, p. 463. Renvoi de Huygens à cette page. La note du T. X se rapporte à la lettre à de l'Hospital du 23 juillet 1693.

„ p. 153 citée „ T. X, p. 349. Essai de réduction infructueux. La note du T. X se rapporte à la lettre à de l'Hospital du 29 décembre 1692.

„ p. 155 publiée „ T. X, p. 361 (Appendice III à la lettre à de l'Hospital du 29 décembre 1692). Réduction de la quadrature d'une certaine aire à celle de l'hyperbole, etc.

„ p. 156 citée „ T. X, p. 353. La note du T. X se rapporte à la lettre à de l'Hospital du 29 décembre 1692.

„ p. 160 publiée „ T. X, p. 358—360 (Appendice II à la lettre à de l'Hospital du 29 décembre 1692). Solution définitive du problème de la rectification de la logarithmique.

„ p. 166 citée et publiée avec les p. 117—118 et 128 „ T. X, p. 418—422.

Manuscrit H,	p. 196	publiée	„ T. X,	p. 276. Sommaire de la lettre à Fatio de Duillier du 5 avril 1692.
„	p. 196	citée	„ T. X,	p. 477. Huygens croit devoir attribuer à J. Preftet le livre anonyme de 1691 intitulé „Logiftique pour la fcience générale des lignes courbes" qui était en réalité de l'abbé de Catelan.

Manuscrit I [7],	p. 1	citée dans le	T. X,	p. 438. Difcuffion de la quadrature d'une aire du folium Cartefii par Leibniz. La note du T. X fe rapporte à la lettre à de l'Hofpital du 9 avril 1693.
„	p. 1 et 2	citées	„ T. X,	p. 462. Calcul du volume du folide obtenu par la rotation de la boucle du folium Cartefii autour de fon axe.
„	p. 6	publiée	„ T. X,	p. 473. Remarque fur le manque de rigueur de la démonftration de certaines formules où entrent des expofants fractionnaires „quanquam per confequentias oftendatur verum effe poftquam de veris poteftatibus demonftratum fuerit". La note du T. X fe rapporte à l'Appendice II (pièce de D. Gregory) à la lettre à de l'Hofpital du 23 juillet 1693.
„	p. 7 et fuiv. citées	et publiées	„ T. X,	p. 462—463. „Dav. Gregorij Regula ad inueniendas Curvarum certi generis quadraturas ex data Aequatione earum" et applications de cette règle. La note du T. X fe rapporte à la lettre à de l'Hofpital du 23 juillet 1693.
„	p. 11	citée	„ T. X,	p. 460. Quadrature de la courbe $a^2y^2 = a^2x^2 + x^4$ d'après une méthode de Fermat. La note du T. X fe rapporte à la lettre à de l'Hofpital du 23 juillet 1693.

[7]) Dans le T. X le Manuscrit I est désigné — sans doute pour distinguer la lettre majuscule du chiffre romain I — par l'expression „Livre J des Adversaria".

Manuscrit I,	p. 15	citée	„ T. X,	p. 449. Interprétation géométrique d'une ſolution d'un problème de de Beaune [8]). La note du T. X ſe rapporte à la lettre du marquis de l'Hoſpital à Huygens du 12 mai 1693.
„	p. 15—28	citées	„ T. X,	p. 457. Examen de cette lettre du 12 mai 1693.
„	p. 17	citée	„ T. X,	p. 413. Huygens corrige une remarque [voyez la p. 127v du Manuſcrit G] qu'il avait faite ſur J. Gregory et la loxodromique. La note du T. X ſe rapporte à la Pièce No. 2793, lettre de Huygens à Baſnage de Beauval, publiée en février 1693; voyez la p. 481 qui précède.
„	p. 18	citée	„ T. X,	p. 451. Manifeſtement beaucoup de courbes diverſes ſatisfont à la même équation différentielle. La note du T. X ſe rapporte à la lettre du marquis de l'Hoſpital à Huygens du 12 mai 1693.
„	p. 20	citée	„ T. X,	p. 439. La page porte la date du 6 juillet 1692. Huygens motive l'addition d'une conſtante dans l'intégration.
„	p. 20 et 25	citées	„ T. X,	p. 458. Différentiation détournée de l'équation $x = my^2$. Ces notes du T. X ſe rapportent à la lettre à de l'Hoſpital du 23 juillet 1693.
„	p. 21	publiée	„ T. X,	p. 469—470 (Appendice I à la lettre à de l'Hoſpital du 23 juillet 1693). „Ad colligendas ſummas".
„	p. 23	citée	„ T. X,	p. 460. Huygens vérifie la conſtruction par de l'Hoſpital de la courbe dont la ſouſtangente eſt $x - y$. La note du T. X ſe rapporte à la lettre à de l'Hoſpital du 23 juillet 1693.
„	p. 25	citée	„ T. X,	p. 458. „Trouver la courbe de M. Sluſe ou Gutſchoven par ſa ſoutangente donnée par la methode de M. de l'Hoſpital". Cette note du T. X ſe rapporte à la lettre à de l'Hoſpital du 23 juillet 1693.

[8]) Comparez Jean Bernoulli, Solutio etc. de 1693 dans la Table III qui précède.

Manuscrit I,	p. 27	citée	„ T. X,	p. 458. „Pofition du M. de l'Hofpital pour diminuer les termes d'une equation differentielle, et comment il forme ces pofitions etc."
„	p. 28	citée	„ T. X,	p. 459. Recherche des courbes (hyperbole et circonférence de cercle) correfpondant à la fouftangente donnée $\frac{x^2 - a^2}{x}$.
„	p. 35	publiée	„ T. X,	p. 474. Sommaire de la lettre à de l'Hofpital du 5 août 1693.
„	p. 36—37	publiées	„ T. X,	p. 478—480 (Appendice à la lettre à de l'Hofpital du 5 août 1693). Quadrature d'une certaine courbe dont la fouftangente s'exprime alternativement par $x - y$, $y - x$ et $x + y$.
„	p. 38	citée	„ T. X,	p. 491. „Tollitur difficultas... et colliguntur veræ fummæ $\int - \frac{2a^3\, dz}{2z} + \frac{a^4\, dz}{z^3}$".
„	p. 41	citée	„ T. X,	p. 491. Transformation d'une équation en confidérant „$\sqrt{mm - mdm}$ cenfendum æquari $m - \frac{1}{2}dm$".
„	p. 44—49	citées	„ T. X,	p. 494—495. Recherches fur la „Jacobi Bernoullii folutio problematis Fraterni" de juin 1693. Voyez fur ce problème de Jean Bernoulli la p. 481 qui précède (No. 2823 et No. 2875). Ces notes du T. X fe rapportent, comme celles des p. 491 et 492, à la lettre à de l'Hofpital du 3 feptembre 1693.
„	p. 47—48	citées	„ T. X,	p. 492. „Inventio Regulæ Hofpitalianæ ad diminuendos terminos æquationum differentialium".
„	p. 49	citée	„ T. X,	p. 537—538. Sur une manière de décrire la courbe qui réfout le problème de Jean Bernoulli. La note du T. X fe rapporte à la lettre à de l'Hofpital du 1 octobre 1693.
„	p. 49	citée	„ T. X,	p. 553. Autres confidérations fur la courbe de Jean Bernoulli et la manière de la décrire. La note du T. X fe rapporte à la lettre à de l'Hofpital du 5 novembre 1693.
„	p. 52—57	publieés	„ T. X,	p. 500—508 (Appendice à la lettre à de l'Hofpital du 10 feptembre 1693). Solution du problème de Jean Bernoulli.

Manuscrit I,	p. 53	publiée	„ T. X,	p. 555 (Appendice I à la lettre à de l'Hoſpital du 5 novembre 1693). Détermination du point de rebrouſſement de la courbe de Jean Bernoulli.
„	p. 58	citée	„ T. X,	506—507.
„	p. 62	citée	„ T. X,	p. 534. Huygens s'aſſure de l'identité des ſolutions des frères Bernoulli et du marquis de l'Hoſpital du problème de Jean Bernoulli. La note du T. X ſe rapporte à la lettre à de l'Hoſpital du 1 octobre 1693.
„	p. 63	publiée	„ T. X,	p. 534. Sommaire de la lettre à de l'Hoſpital du 1 octobre 1693.
„	p. 66	citée	„ T. X,	p. 625. Calcul d'une formule pour la ſous-normale des courbes paraboloïdes, laquelle devient le rayon de la développée pour le point de l'axe qui conſtitue le ſommet ou le point d'inflexion. La note du T. X ſe rapporte à la lettre à de l'Hoſpital du 16 juin 1694.
„	p. 72—73	publiées	„ T. X,	p. 556 (Appendice II à la lettre à de l'Hoſpital du 5 novembre 1693). Démonſtration „qu'une voile faite de certain nombre de rectangles égaux et inflexibles eſtant étendue par le vent" ne pourra prendre la même poſition qu'une chaîne de ce genre le ferait par ſon poids [9]).
„	p. 85	citée	„ T. X,	p. 542. Conſtruction au moyen de la logarithmique d'une courbe mentionnée par Leibniz dans ſa lettre à Huygens du 11 oct. 1693.
„	p. 90	citée	„ T. X,	p. 578. Eſſai de vérification d'une méthode du marquis de l'Hoſpital pour quadrer le folium Carteſii. La note du T. X ſe rapporte à la lettre à de l'Hoſpital du 24 décembre 1693.

[9]) Nous faiſons mention ici de cet Appendice II de nature fort mathématique, quoiqu'en général, comme nous l'avons dit dans la note 7 de la p. 480 qui précède, nous ne tenions pas compte dans le préſent Tome de ce qui ſe rapporte aux voiles ou à la manoeuvre des vaiſſeaux.

V. MATIÈRES TRAITÉES.

Nous pourrions répéter ici, mutatis mutandis, les remarques initiales de la table correſpondante du T. XIX: nous ne tâchons pas, en rédigeant la préſente liſte, d'être complets. Ceci s'applique e.a. à la Partie „Muſique".

Vu la brièveté de la première Partie „Muſique et Mathématique" nous ne donnons pas de liſte des ſujets traités dans cette Partie.

Il en eſt de même pour la Partie „Huygens et Euclide" [1]. Euclide et Huygens étaient l'un et l'autre muſicologue et mathématicien. Cette Partie forme la tranſition entre la Partie „Muſique" et la Partie „Mathématiques".

Quant à la Partie „Mathématiques", la liſte des Pièces et Mémoires (Table I) fait ſuffiſamment connaître les ſujets traités. Nous nous contentons de ſignaler les paſſages où il eſt queſtion de l'application des logarithmes à la muſique et ceux qui ſe rapportent à une douzaine d'autres ſujets.

Les chiffres indiquent les pages de ce Volume.

MUSIQUE (p. 1, 19—173 et 555—561).

AUTEURS ſur l'hiſtoire et la théorie de la muſique [2]. Alypius, Ambros, Archibald, Ariſtide Quintilien, Ariſtote, Ariſtoxène, Artuſi, Athénée, St. Auguſtin, Bacchius Senex, Balfoort, Ban, Baryphonus (= Pipegrop), Beda, van Beynum-von Eſſen, van Blankenburg, Boèce, Bryennius, Buttler, Cicéron, Combarieu, Couſin, A. Croiſet, M. Croiſet, van Deventer, Didymus, Dupont, Dijkſterhuis, Alfr. Einſtein, Eitner, van der Elſt, Eratoſthène, Euclide, Euler, Faber Stapulenſis, Fano, Fétis, Friedländer, V. Galileo, Gaudence, Genebrardus, Gevaert, Gibel, Glareanus, Gogavinus, Guicciardini, Guido Aretinus, Helmholtz, Hemony, Conſt. Huygens, Janus, Jeans, Jonckbloet, Kapsbergen, Kepler, Kircher, Land, Loulié, Maillard, le Maire, Marchetto, Meibomius, Menge, Mercator, Merſenne, de Montalent, de Muris, Neidhardt, Nicomaque, Paſaro, Pipegrop, Plutarque, Pollux, Porphyre, Ptolémée, Puteanus, Reinach, Riemann, Rome,

---

[1] Nous avons toutefois indiqué dans la liſte des ſujets traités dans la Partie „Muſique" qu'à la p. 178, qui appartient à la Partie „Huygens et Euclide", il eſt queſtion (dans une note) de muſique chinoiſe.

[2] Dont plusieurs sont aussi des compositeurs. La liste comprend de plus les noms de quelques organistes et de quelques construćteurs d'instruments.

Parmi nos „auteurs" il y en a quelques-uns qui n'ont parlé qu'incidemment de musique.

Salinas, Salmon, Schlick, Scholes, Senti, Shore, Smits van Wæsberghe, Stevin, Tannery, Théon de Smyrne, Titelouze, Vas Nunes, Verheyen, da Viadana, Vicentino, G. J. Voſſius, I. Voſſius, de Waard, Wallis, Werckmeiſter, Weſtphal, Zarlino.

Baguettes de Neper. 173.

Battement de la mesure. 120, 121.

Beauté des chants ou de la musique instrumentale. 1, 35, 36, 38, 66, 67, 78, 86, 125—127, 129, 131, 163, 170 (conſultez auſſi la p. 410 appartenant à la Partie „Mathématiques").

Bourdon. 131; faux-bourdon. 65, 78, 80, 117, 118.

Caractères éthiques des différents modes. 76, 96, 99.

Chant d'église. 64, 68, 69, 78, 111, 119, (grégorien) 127.

Choeurs antiques. 85; modernes. 129.

Comma. 45, 46, *paſſim*; dièſe. 112, 113, 143, 144, 146, 155, 156, 165, 166; „intervalle-atome". 155; limma. 155; cent. 146, *paſſim*.

Compositeurs [3]). Archiloque, Bach, Händel, Méſomède, Pindare.

Concerts. 131, 153.

Contrepoint. 74, 133.

Dièse; (voir *Comma*).

Différence entre certains genres anciens et les genres modernes correspondants. 102.

Division du tétrachorde en différents intervalles. 86, *paſſim*.

Division du ton en un certain nombre d'intervalles égaux ou inégaux. 35, 95, 99, 112, 113, 116, 120, 143, 144, 157, 169.

Division harmonique et arithmétique des intervalles. 110, 118.

Etalons et instruments de mesure. 21 (ſirène); 68, 69 (pendule et métronome); 87, 91 (diapaſon etc.); 105 (ſirène); (voir auſſi *Inſtruments de muſique: monochorde*).

Experientia et ratio. 17, 18, 168, 170.

Expériences pour déterminer les fréquences des vibrations. 18, 30, 33, 110, 124.

Faux-bourdon; (voir *Bourdon*).

Floraison de la musique dans les Pays-Bas. 66, 82.

Fugues. 125.

Genres (voir *Différence etc.* et *Particularités etc.*).

Harmonie. 1, 43, 100, 129, 133, 153—155, 158; cycles harmoniques (voir *Tempéraments*); proportion harmonique 75 (voir auſſi *Diviſion harmonique etc. des intervalles*); *paſſim*; (voir auſſi *Queſtion de ſavoir s'il y a deux ou pluſieurs modes*).

Hasard. 18, 115.

Hexachorde. 79, 111.

Hymnes et odes antiques. 85, 89, 90, 100, 110, 124, 126, 127, 132.

[3]) Voyez aussi la note précédente: nous ne répétons pas ici les noms de ceux qui, comme Const. Huygens, furent en même temps compositeurs et auteurs d'ouvrages sur l'histoire (ou la théorie) de la musique.

INSTRUMENTS DE MUSIQUE. 6, 18, 46, 73, 101; archicymbale. 18, 112, 113, 157, 158; αὐλός. 87; barbitus ou barbiton. 132; carillon. 43, 48, 49; clavecin, clavier. 55, 69, 72, 74, 75, 77, 116, 124, 125, 144, 145, 153, 159, 160, 161, 163, 167, 168, 558; idem (et autres inftruments) à touches fcindées. 18, 154, 160; cloche. 18, 26, 36, 44, 49; (inftruments à) cordes. 29, 37, 43, 72, 76, 91, 100, 617; cymbale, 113, 114; cythare (ciftre). 34, 80, 91, 99, 113, 117, 131, 617; epigonium. 96; fiftula. 131; flute. 21, 87, 104; gravicembalo. 160; guitare. 558; harpe. 1, 137; luth. 34, 35, 121, 122, 132, 137, 558; lyre. 1, 31, 99, 113, 117; magadis. 131, 132; mandore. 132; monochorde. 18, 29, 41—60, 72, 110, 113, 117, 133, 134, 141, 159, 168; orgue. 34, 35, 45, 46, 55, 64, 69, 71, 72, 75, 77, 113, 114, 116, 120, 122, 133, 137, 142, 144, 153, 159, 160, 168; orgue hydraulique. 124; pandoron ou pandouros. 132; pectis. 132; pfalterium. 131; fambuca. 131; fpinette (ou épinette). 120, 133, 558; σῦριγξ, 87; fymphonia. 131; théorbe. 558; trompette. 37, 122, 618; trompette marine. 37, 122; tuba. 131; vielle. 131; viola da gamba, 130; viole. 34, 35, 113 [4]), 558; violon. 75, 131, 137; (voir auffi *Tétrachorde* et *Hexachorde*).

INVENTION DE LA BOUSSOLE. 81.

INVENTION DU CHANT POLYPHONE. 82, 124; (voir auffi *Queftion de favoir fi les anciens ont connu la polyphonie*).

INVENTION DU TÉLESCOPE. 81.

INVENTION ET ÉCRITURE DES NOTES. 63, 68, 92, 93, 100, 119, 120, 126, 128, 129, 136, 137.

ISOCHRONISME DES OSCILLATIONS DU PENDULE. 69, 557.

Κροῦσις. 80, 99, 126.

LOGARITHMES APPLIQUÉS À LA MUSIQUE. 60, 113, 136, 141, 145, 147—151, 157, 158, 169 (171—173).

MONOCHORDE (voir *Inftruments de mufique*).

MUSIQUE ANTIQUE. 6; chinoife. 178; iroquoife. 131; ifraëlite. 131. grecque. *paffim*; romaine. 125.

NOMS DES TONS DU GRAND SYSTÈME PARFAIT. 93, 98; petit fyftème parfait. 98. *paffim*.

ODES; (voir Hymnes).

PARTICULARITÉS DES DIVERS GENRES. 86, *paffim*.

PEINTURE ANTIQUE. 132.

Πυκνόν. 89, 90, 96.

Περικύκλωσις. 22, 143, 168.

PROPORTIONALITÉ INVERSE DES LONGUEURS DES CORDES AVEC LES FRÉQUENCES DE LEURS VIBRATIONS. 25, 29, 35.

QUESTION DE LA DÉFENSE DE QUINTES (ETC.) SUCCESSIVES. 81, 101, 129, 130, 170.

QUESTION DE LA VALEUR DE LA MUSIQUE GRECQUE ANTIQUE. 85, 86, 89, 121, 131.

QUESTION DE L'EXISTENCE D'INTERVALLES CONSONANTS OÙ ENTRE LE NOMBRE SEPT. 35, 37, 161—164, 169.

QUESTION DE SAVOIR QUELLES CONSONANCES ÉTAIENT ADMISES PAR LES ANCIENS. 26, 27, 31, 79, 80, 91, 99, 101, 121, 123, 124, 153.

[4]) P. 113: viola = lyra; viola = genus cythararum.

QUESTION DE SAVOIR SI ARISTOXÈNE ET LES ARISTOXÉNIENS ONT CONNU LA GAMME UNIFORMÉMENT TEMPÉRÉE À DOUZE INTERVALLES. 33—35, 78, 113, 114, 121.
QUESTION DE SAVOIR SI LES ANCIENS ONT CONNU LA POLYPHONIE. 21, 65, 78—82, 86, 91, 92, 99, 101, 121, 123, 124, 153.
QUESTION DE SAVOIR S'IL Y A DEUX OU PLUSIEURS MODES. 39, 64, 69—71, 75, 86, 95 (mode grec = ἁρμονία), 98, 110, 119, 170.
RÈGLE DES FONDEURS DE CLOCHES. 28.
RÈGLES POUR LA COMPOSITION MUSICALE. 67, 74, 81, 92, 95, 126; (voir aussi: *Contrepoint*).
RÉUNION DE TÉTRACHORDES EN SYSTÈMES. 86, *passim*.
SCULPTURE ANTIQUE. 132.
SECTIO CANONIS PYTHAGORICI. 90, *passim*.
SEMITONS, NOMS NOUVEAUX. 128, 129, 167, 559, 561.
SENARIUS, 27, 37, 141, 162, 169.
SON DANS LE VIDE? 110, 123.
SYSTÈME DE LA SOLMISATION. 124, 126.
SYSTÈMES DE NOTES, 86; (voir aussi *Invention et écriture des notes*).
TÉLESCOPE SANS TUYAU. 88.
TEMPÉRAMENTS. 18, 43—45, 66, 91, 102, 110, 112, 114—116, 122, 123, 143, 154, 157, 168; de Salinas(?). 113; de Werckmeister (et d'autres). 110, 134, 135; de Zarlino. 47, 54, 113, 115, 116, 168; „du ton moyen" („temperament veritable" suivant Huygens). 45, 46, 58, 59, 72, 113, 115—117, 121, 133, 143, 145, 146, 149—161, 168, 169; tempéraments uniformes et cycles harmoniques (voir aussi περικύκλωσις). 18, 19, 143, 144: à 12 intervalles (gamme tempérée). 110, 122, 135, 136, 144, 145, à 31 intervalles (tempérament de Huygens). 22, 44, 112, 113, 129, 139—173, 557.
TÉTRACHORDE. 31, 75, 79, 97, 102, 116, 118; (voir aussi *Réunion de tétrachordes en systèmes*).
THÉORIE DE STEVIN SUR L'ÉGALITÉ DES 12 INTERVALLES DE LA GAMME. 17, 27, 32—35, 64, 141, 143, 144.
TOUCHES SCINDÉES (voir *Instruments de musique*).
TRITON ET FAUSSE QUINTE. 56, 73, 131, 156, 161, 163, 165, 167, 560.
UNITÉ DE LONGUEUR. 64.

MATHEMATIQUES (p. 193—554).

APPLICATION DES LOGARITHMES À LA MUSIQUE. 202—205, 213, 214, 291, 377.
COURBES [5]). Catacaustiques (voir *Optique*); chaînette. 480, 484, 489, 513, 551; cissoïde. 213, 223, 256, 257, 443, 514; conchoïde. 537, 538; courbe de descente uniforme. 480, 489, 505;

[5]) Nous ne faisons pas mention dans cette liste des nombreux endroits où il est question de sections coniques ni de ceux où il s'agit de différentes courbes du troisième, quatrième ou cinquième degré.

courbe de Wallis. 204, 373; courbes géométriques. 210, 481; courbes ofculatrices. 451, 454; courbes tranfcendentes. 525; curvæ filares. 192, 463—466, 484, 495; cycloïde. 216, 258, 448, 451, 453, 470, 474, 475; épicycloïde. 216, 223, 285, 407; folium Cartefii. 244—255, 469; hyperboloïdes (hyperboles de divers degrés). 212, 223, 256, 257, 302; lemnifcate. 496—498, 621; ligne cyclocylindrique. 453; logarithmique. 204, 206, 291, 294, 373, 408, 413—415, 451, 476, 482, 526, 527, 544—546, 548—551, 554; loxodromique. 375; première ovale de Defcartes. 448, 451, 463—466, 484, 499; paraboloïdes (paraboles de divers degrés). 212, 223, 256, 257, 443, 514; fpirale d'Archimède. 370; finufoïde. 453; tractrice. 480; verfiera. 376, 397—399, 620, 621. Voyez en outre fur quelques-unes de ces courbes la Table IV qui précède.

Cours mathématique d'Hérigone (Tab. III). Confultez la p. 619 qui fuit, où nous apportons une importante correction au texte de la p. 209.

Démonstration (ou invention) mécanique, ou cinématique, de propositions géométriques. 504, 553, 554, 621 (addition au texte de la p. 408).

Epoque vers laquelle Huygens commença à se servir couramment du calcul des logarithmes, 202—205, 619. N'oubliez pas de confulter cette dernière page où nous apportons des corrections importantes au texte des p. 202 et 204.

Grandeurs et nombres, le continu et le discret. 217, 264, 308, 323, 370—374, 380, 387—390, 480, 485, 503.

Induction. 213, 372, 390, 479.

Optique. Catacauftiques. 202—504, perfpective. 220, 402; ovales de Defcartes (voir *Courbes*); problème d'Alhazen. 196, 218, 265—271, 328—333; quarts de cercle avec des verres de lunette. 553.

Projection. 402, 428, 429 (voir auffi *Optique, perfpective*).

Rigueur ou insuffisance des démonstrations. 212, 213, 223, 259, 303—327, 369, 374, 389, 490, 479.

Séries. 200—206, 214, 215, 261—263, 291—294, 303—309, 375, 376, 387, 388, 391—393, 395—400. 448, 449, 453, 471—473, 488, 527, 621.

Siècle sage de Stevin [6]). 371.

Trigonométrie et goniométrie. 202, 203 [7]), 213, 375, 447, 451, 455—461, 619 [7]).

---

[6]) Voyez sur le siècle sage de Stevin les p. 554 et 555 du T. XV.

[7]) Les calculs logarithmiques de l'Appendice X au Traité des couronnes et des parhélies sont de nature goniométrique et trigonométrique, comme ceux des Manuscrits K et A dont il est question à la p. 619 (correction à la p. 204).

ADDITIONS ET CORRECTIONS[1]).

Page	*Au lieu de*	*lisez*
8 *ligne* 9	p. 184	p. 185
17 *note* 3	p. 33	p. 34
27 *ligne* 3	point du vue	point de vue
28 *ligne* 12	Règle des fondeurs. — Voyez plus loin p. 170.	
28 *note* 5	*Le catalogue de vente des livres de Chr. Huygens mentionne lui aussi (libri mathem. in* 4°, 119)*: Jac. Fabri Musica, Paris* 1552.	
35 *ligne* 4	du son grave	du ton grave
	Dans la ligne 6 *aussi il est question du „ton grave" et dans la ligne* 5 *du „ton aigu". Le* t *et le* s *de Huygens sont parfois fort semblables l'un à l'autre: on peut en quelques endroits lire tout aussi bien „ton" que „son".*	
46 *ligne* 3 *des notes*	Senefe.	Senese.
54 *note* 23	p. 46	p. 47
66 *note* 17	*On ne connait plus d'autres compositions de Const. Huygens que celles qui se trouvent dans les „Pathodia Sacra et profana occupati" de* 1647, *réimprimés en* 1882*: voyez la note* 2 *de la p.* 30 *du T. I.*	
72 *note* 11 *ligne* 4	p. 52	p. 51
87 *ligne* 9	aussi, à	aussi à
95 *ligne* 1 *des notes*	ὀξύτατος	ὀξύτατος
96 *ligne* 15	fpiffum	spissum
104 *ligne* 7 *d'en bas*	c $\overline{1}$ 2 3 5 6 toe	c 1 2 $\underline{3}$ 5 6 toe
124 *note* 91	Instrumenta polyplectra. *Puisque* πλῆκτρον *ou plectrum = id quo fides (citharæ etc.) tenduntur, il semble bien qu'il n'est question ici que d'instruments à cordes.*	
127 *ligne* 5 *des notes*	ton	toni
127 *note* 109 *ligne* 4	mélodique;	mélodique:

---

[1]) Voyez aussi le deuxième alinéa de la note 56 de la p. 207, où il s'agit d'une correction à apporter dans le T. XIX.

Le lecteur est prié en outre de corriger, également dans le T. XIX, dans la l. 12 de la p. 644, 4ième *objection* en 11ième *objection*. Et dans la l. 4 de la note 6 de la p. 104 du T. XIX il faut corriger ED en EN.

Page	*Au lieu de*	*liſez*
129 *ligne* 2 *d'en bas*	Manuſcrit G, f. 47 r. *Ce qui ſuit ſe rattache aux remarques ſur l'ouvrage de J. van der Elſt.* Ludovicus Viadana inventor Baſſi Continui in Polyplectris A° 1610. Permittit quintas et octavas continenter poni in partibus hiſce, quanquam non permittat in cantu. Videndum. Quartas ſupra quintas, conſecutive non poſſe poni, ſupra tertias poſſe. Potius infra cantum continendam ſymphoniam omnem Baſſus continui quo magis emineat cantus. qui quo minus obturbetur, non idem cantus in polyplectro exponendus quem vox ſequitur. *L. (Groſſi) da Viadana naquit à Mantoue en* 1564 *et décéda à Gualtieri, probablement en* 1645. *On connaît beaucoup de ſes compoſitions (meſſes, madrigaux, motets etc.). En* 1620 *parurent à Francfort ſes „Opera omnia ſacrorum concentuum etc. cum baſſo continuo et generali organo applicato etc."*	
130 *note* 127 *ligne* 8	either or them	either of them
148 *et* 149	*Dans la dernière colonne de la table le ſigne* ♯ *doit être remplacé par* ♯.	
149 *ligne* 10	1)	11)
149 *ligne* 12	V[2])	V
156 *ligne* 13	fixte	ſixte
156 *ligne* 16	ce que	ce qui
156 *ligne* 8 *d'en bas*	Le ſon	Le ton
169 *ligne* 8	♯l	s♯l
170 *ligne* 7 *d'en bas*	De la cauſe des tons . . . trompettes etc. — *Voyez ce que Huygens dit en* 1672 *ſur la conſtruction de la trompette (T. XIII, p.* 804) *en parlant de la règle des fondeurs (T. XIX, p.* 363, *note* 3).	
179 *dernière ligne*	ainfi	ainſi
180 *ligne* 10	. . . pas d'eſpace abſolu. — *A la p.* 658 *du T. XVIII (dernière ligne) nous avons écrit par inadvertance, en citant la p.* 215 *du T. XVI: „nullus eſt mutatio loci reſpectu ſpatij mundani". Le lecteur eſt prié de corriger „nullus" en „nulla", conformément au texte du T. XVI.*	
190 *note* 1	*La date de la* **Pièce** *que nous avons intitulée „Le corps, la ſurface, la ligne, le point" eſt ſans doute* 1690 *d'après le lieu que cette Pièce occupe dans le Manuſcrit G. Il eſt vrai qu'on trouve exceptionnellement la date* 1692 *ſur la f.* 44*: c'eſt la date, d'après Huygens, de la* **Pièce** *„Experimenta circa Electrum" que nous avons publiée aux p.* 612 *et ſuiv. du T. XIX. Dans le T. XIX nous avons admis cette date* 1692, *tout en remarquant (p.* 607) *que c'eſt dans une lettre à Leibniz* de novembre 1690 *que Huygens parle de ſes expériences ſur „les effets de l'ambre". Il nous ſemble maintenant extrêmement probable que Huygens ſe ſoit trompé en écrivant „*1692*". C'eſt ſans doute en décembre*	

Page	*Au lieu de*	*liſez*
	1693 *qu'il a inſcrit cette date* 1692 *lorſqu'il ajouta à la relation de ſes expériences de* 1690 *la nouvelle obſervation de ce mois de décembre* 1693 *que nous avons publiée dans le T. XIX à la fin du* § 17 *de la p.* 615. *En* 1690 *parut* (*avec le Traité de la Lumière*) *le Discours de la Cauſe de la Peſanteur, dans lequel Huygens traite e. a. de la forme de la terre* (*voyez le T. XXI*). *Qu'elle ſoit ſphérique ou non, il faut bien déterminer, tant ſur les globes que ſur les cartes, la place de chaque ville ou de chaque vaiſſeau par la „longitudo" et la „latitudo". Eſt-ce à cette conſidération que ſont dus les mots biffés* ſphæricæ conoe..æ (*p.* 190)??	
201 *ligne* 1	pendre	prendre
202 *dernière ligne*	.. il commença à ſe ſervir du calcul des logarithmes ..	.. il commença à ſe ſervir couramment du calcul des logarithmes ...
204 *dernières lignes*	.. qu'avant 1661 on ne trouve pas de calculs logarithmiques dans les manuſcrits de Huygens.	.. qu'avant 1661 on ne trouve pas de calculs logarithmiques dans les manuſcrits de Huygens (ce qui toutefois n'eſt pas *abſolument exact*). *En effet, avant* 1661, *plus préciſément en* 1657 *et* 1659, *Huygens s'était ſervi en quelques rares occaſions de logarithmes en conſidérant, en ſa qualité d'aſtronome, différents triangles ſphériques. Conſultez dans notre T. XV les p.* 528 *et* 531 *tirées du Manuſcrit K,* 367—373 *provenant du Manuſcrit A. — La date* 1657 *d'après la note 6 de la p.* 11 *du T. XVII.*
204 *note* 32	1659	1695
206 *ligne* 8 *et note* 47	*Merſenne a-t-il été inſpiré par Roberval, comme le ſuppoſe Tannery? Voyez ſur cette queſtion les lettres de Roberval et de Huygens de* 1656, *N°s* 324 *et* 329 *du T. I, et auſſi ce que van Schooten dit en* 1650 *ſur Merſenne et Roberval* (*T. I, p.* 132).	
209 *lignes* 6—10	*Nous nous ſommes trompés en écrivant „que le nom de Fermat ne ſe trouve pas chez Hérigone" dans la „Propos. XXVI. De maximis & minimis". En effet, il écrit à la p.* 68 *du T. VI ou Supplementum* (*de* 1644, *mais „acheué d'imprimer" en juillet* 1642) *de ſon „Curſus mathematicus" ou „Cours mathematique": „nec unquam fallit haec methodus, ut aſſerit ejus inuentor, qui eſt doctiſſimus Fermat conſiliarius in parlamento Toloſano excellens geometra, nec vlli ſecundus in arte*	

Page	*Au lieu de*	*liſez*
	Analytica, etc." *Comparez la note* 1 *de la p.* 171 *du T. I de* 1891 *des Œuvres de Fermat.*	
218 *ligne* 7 *d'en bas*	Pièces X et XI	Pièces IX et X
220 *ligne* 7	d'avoir	avoir
220 *note* 136	p. 188	p. 192
221 *note* 138 *ligne* 2	(T. I, p. 334)	(T. II, p. 334)
228 *ligne* 4	naximales	maximales
243 *ligne* 6	premier alinéa de la p. —	premier alinéa de la p, 244 —
257 *ligne* 14	Pièces III et VI	Pièces III et IV
289 *première note*	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ *Liſez plutôt* $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}\pm\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$.	
306 *ligne* 23	teperta	reperta
371 *ligne* 8	*Nous n'avons pas voulu dire dans le texte qu'avant Aristote Archytas avait déjà dit (d'après le commentaire de Simplicius ſur les Catégories d'Ariſtote):* ἐστὶν ὁ χρόνος κινάσιός τινος ἀριθμός.	
371 *note* 12	*S. Stevin a évidemment fait connaiſſance avec J. J. Scaliger après que celui-ci ſ'était établi à Leiden en* 1593 *comme profeſſeur à l'univerſité.*	
371 *note* 12 *ligne* 8	⁻̣ punctum	. punctum
	Le petit trait horizontal au-deſſus du point . ne ſe trouvait pas dans les épreuves. Nous n'avons donc pas pu le corriger. Il n'a aucun ſens et eſt dû uniquement à ce qu'on appelle en néerlandais le „drukſoutenduivel" (diable des fautes d'impreſſion). Que perſonne ne ſ'imagine donc que d'après Scaliger les Arabes ſe ſervaient d'un ſigne ⁻̣ *!*	
372 *note* 13 *ligne* 6	p. 191	p. 192
372 *ligne* 4 *d'en bas*	„Arithmetica univerſalis" de 1655	„Matheſis univerſalis ſive Arithmeticum opus integrum" de 1657
	Voyez le Cap. I („De Matheſi in genere") de la „Matheſis univerſalis".	
373 *ligne* 7	p. 234	p. 204
375 *ligne* 6 *d'en bas*	*La lettre de J. Gregory à J. Collins, où il donne la ſérie de l'arc tangente, eſt de février* 1670 *vieux ſtyle,* 1671 *nouveau ſtyle.*	
376 *ligne* 14	„La verſiera". *On peut conſulter ſur cette courbe les deux notes, ſe trouvant reſpectivement aux p.* 151—152 *et* 251—252 *du T. IV de* 1912 *des Œuvres de Fermat. La première, de H. Brocard, eſt intitulée „La quadrature de la verſiera", l'autre, plus explicite, de A. Aubry „Sur l'origine de la verſiera". Après avoir relevé les mérites de Lalouvère („Quadratura circuli", 1651) Aubry dit e. a.: „On terminera l'hiſtoire de la verſiera en rappelant . . que James Gregory (Geometriæ pars univerſalis, Padoue, 1668) l'a donnée . . en montrant*	

Page	*Au lieu de*	*lisez*
	que la quadrature de la verfiera fe ramène . . . à celle du cercle . ." *Le lecteur hollandais peut auffi confulter „De verfiera" par E. J. Dijksterhuis, article publié dans la revue „Euclides"*, 1932/1933, *Noordhoff, Groningen.*	
388 *lignes* 3—2 *d'en bas*	*Dans fes lettres du* 15 *juillet et du* 26 *octobre* 1674 *à Oldenburg Leibniz n'avait pas fait connaître la forme exacte de fa férie. Il fe contentait d'écrire: „Alia mihi theoremata funt, momenti non paulo majoris. Ex quibus illud imprimis memorabile eft, cujus ope area circuli, vel fectoris ejus dati, exactè exprimi poteft per feriem quandam numerorum rationalium continuè productam in infinitum" . . „feriem numerorum rationalium valde fimplicem & regularem".*	
393 *ligne* 2 *des notes*	$2 . \frac{16 x^3}{225 d^3} \sqrt{} dx$	*Lifez dans cette formule* 525 *au lieu de* 225.
408 *ligne* 6	*En* 1692 *et* 1693 *Huygens mentionne „la methode des Tangentes de M. de Roberval" (T. X, p.* 352 *et* 440).	
411 *ligne* 6	À la Haye (feptembre 1670 — juillet 1671).	*Lifez* juin *au lieu de* juillet.
414 *note* 5 *ligne* 4	LVIKIL	LVIKIL
416 *ligne* 4	inutilus	inutiles
443 *ligne* 8 *d'en bas*	æquatio $x^3 \propto aay$ [Fig. 87]	æquatio $x^3 \propto ayy$ [Fig. 87]
449 *note* 12	Pendulum cylindricum trichordon. *Dans la note* 3 *de la p.* 532 *du T. XVIII nous avons écrit par inadvertance: „Cæteris paribus, le moment des forces eft proportionnel à tg α, c.à.d. à fort peu près à la longueur des fils". Le lecteur eft prié de corriger cette phrafe comme fuit: „Cæteris paribus, le moment des forces eft proportionnel à tg α, c.à.d. pour un même angle de rotation autour de l'axe le moment eft à fort peu près* inverfement *proportionnel à la longueur des fils".*	
463 *ligne* 4	AH = *c*, HA = *m*	AH = *c*, HN = *m*
472 *ligne* 5 *d'en bas*	$50\frac{50}{49}$	$50/\frac{50}{49}$
476 *ligne* 1	RAYON MINIMAL	RAYON DE COURBURE MINIMAL
485 *ligne* 5 *d'en bas*	recherche	recherches
492 *ligne* 18	egaux perpendiculaires	egaux aux perpendiculaires
494 *ligne* 3 *d'en bas*	$aa \propto bb$	$aa + bb$
496 *ligne* 2	„lemnifcate". *Ce fut Jacques Bernoulli qui inventa en* 1694 *le nom de* lemnifcata: *confultez fa „Conftructio curvæ acceffus et receffus æquabilis, ope rectificationis curvæ cujufdam algebraicæ, addenda nuperæ folutioni menfis Junii" (Acta Eruditorum, Sept.* 1694).	
496 *ligne* 4	$d + \frac{oe}{d} + \frac{ooe}{dx} - \frac{cd}{x}$	$d - \frac{oe}{d} + \frac{ooe}{dx} - \frac{ed}{x}$

Page	*Au lieu de*	*lisez*
517 *ligne 2 d'en bas*	y	y
540 *note 37*	$+ \frac{1}{2y}$	$+ \frac{1}{2yy}$
552 *note 1*	*L'article mathématique de Huygens (voir le T. XXI) „Excerpta ex epistola C.H.Z. ad G.G.L."* (1694) *ne se rapporte pas* exclusivement *à la courbure des voiles.*	

SOMMAIRE.

Hommage de Huygens à Théocrite 1
Musique et mathématique 3
Musique 15
Huygens et Euclide 175
Mathematica varia: les manuscrits 193
Huygens à l'Académie Royale des Sciences. Communications sur des sujets de mathématique 197
Les trois grands problèmes de l'antiquité 367
Mathematica varia 1666—1681 405
Mathematica varia 1681—1695 445
Problèmes et méthodes modernes 477
Règles de l'accompagnement 555
Tables.
I. Pièces et Mémoires 565
II. Personnes et Institutions mentionnées 570
III. Ouvrages cités 581
IV. Pages des Manuscrits F, G, H et I se rapportant à des sujets de mathématique pure qui ont été citées ou publiées, en tout ou en partie, dans les Tomes IX et X contenant la Correspondance annotée et pourvue d'appendices des années 1685—1695 597
V. Matières traitées. 612
Additions et Corrections 617